FRANÇOIS BLAIS

Asymptotique dans un corps de Hardy

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 6, n° 1 (1997), p. 77-103

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1997_6_6_1_77_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VI, n° 1, 1997

Asymptotique dans un corps de Hardy(*)

FRANÇOIS BLAIS[1]

RÉSUMÉ. — Le but de cet article est d'aborder les problèmes asymptotiques de résolution d'équation de la forme : $F(x, y) = 0$ où F n'est pas un polynôme. Cela conduira à étudier l'inversion des fonctions dans le corps de Hardy des exp-log-fonctions. C'est une des clés de ce problème.

ABSTRACT. — The purpose of this paper is to approach the asymptotic problems of resolution of equation on the form : $F(x, y) = 0$ where F is not polynomial. That leads to study the inversion of functions of the Hardy field of exp-log-functions. It is one of the keys of this problem.

1. Introduction

L'étude du comportement asymptotique des solutions des équations du type $F(x, y) = 0$ est bien connue dans le cas où F est un polynôme. Nous voulons aborder ce problème lorsque F est de la forme : $\sum_{i=1}^{n} f_i(y)g_i(x)$, où les f_i et les g_i sont des fonctions du corps de Hardy des *exp-log-fonctions*.

Rappelons tout d'abord qu'un corps de Hardy est un corps différentiable de fonctions numériques réelles définies au voisinage d'un point. Nous nous placerons ici en $+\infty$. De plus, on dira que deux fonctions sont identiques si elles le sont sur un voisinage de ce point. Le corps des exp-log-fonctions, que nous noterons $\mathcal{F}$, satisfait la définition suivante :

(1) les fonctions exp et ln appartiennent à $\mathcal{F}$;

(2) l'ensemble $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$;

(*) Reçu le 21 octobre 1994

(1) Université de Bourgogne, Laboratoire de Topologie - UMR 5584, UFR Sciences et Techniques, 9 avenue Alain-Savary, B.P. 400, F-21011 Dijon Cedex (France)
E-mail address : Blais@satie.u-bourgogne.fr

(3) $(\mathcal{F}, +, \times)$ est un corps commutatif;

(4) $\mathcal{F}$ est stable pour la composition des fonctions dès lors que la composée est définie sur un voisinage de $+\infty$;

(5) $\mathcal{F}$ est le plus petit ensemble (au sens de l'inclusion) satisfaisant aux propriétés énoncées ci-dessus.

Ce corps est l'extension de Hardy du corps des fractions rationnelles. Il admet une structure naturelle d'ordre total, cependant le corps n'est pas archimédien. Pour de plus amples détails, on peut se reporter à [Bo], [H1], [H2], [R1], [R2], [R3] et [R4].

Dans le cas algébrique, la méthode de résolution de $F = 0$ est basée sur le polygone de Newton (enveloppe convexe des points (n, m) où $x^n y^m$ est un monôme intervenant dans l'équation). Celui-ci permet de dégager facilement les ordres de grandeurs possibles des solutions. Sur le corps des complexes, chaque possibilité conduit à l'existence d'au moins une solution. Sur le corps des réels, il sera éventuellement nécessaire de "désingulariser" diverses branches avant de pouvoir conclure à l'existence ou bien à la non existence d'une solution réelle. Dans les deux cas, l'algorithme est effectif et conduit au développement de Puiseux de chacune des solutions.

Pour étudier le problème dans le corps des exp-log-fonctions, nous introduirons une nouvelle notion de degré. Sans apporter directement de résultats vraiment nouveaux, le degré joue un rôle central dans ce genre d'équations. De plus, on peut facilement manipuler le degré à travers la plupart des opérations sur les fonctions : multiplication, composition, dérivation; l'addition étant une combinaison de compositions et de multiplications.

Ensuite, nous nous intéresserons à un cas particulier du problème posé : l'inversion de fonction. Il consiste, après s'être donné une fonction inversible du corps de Hardy, à trouver un équivalent dans ce même corps, de sa fonction réciproque. C'est une des clés du problème général, bien qu'il soit négligé dans le cas algébrique car alors trivial. Nous verrons que l'hypothèse essentielle pour que cela soit réalisable, est une condition de proximité avec une fonction de $\mathcal{F}$ ayant une fonction réciproque dans $\mathcal{F}$.

Le sujet est traité par des méthodes non-standard dans l'axiomatique introduite par Nelson [N]. Néanmoins, les résultats sont standard, et les méthodes de calculs sont algorithmiques. Aussi le lecteur trouvera quelques remarques qui l'aideront soit à faire le parallèle avec des notions plus classiques, soit à implémenter la méthode suggérée sur ordinateur.

On notera "$\simeq$" pour "infiniment proche de". Le symbole "$\oslash$" (respectivement, "$\pounds$") représente un nombre réel infiniment petit (respectivement, un nombre réel limité) qui peut être différent d'une ligne à une autre. Je rappelle qu'un nombre réel est infiniment grand si son inverse est infiniment petit, qu'il est limité s'il n'est pas infiniment grand, et enfin qu'il est appréciable s'il n'est ni infiniment grand, ni infiniment petit. Le halo d'un nombre réel a, noté $\mathrm{hal}(a)$, est l'ensemble des nombres réels infiniment proches de a.

2. Degré d'une fonction

2.1 Petit et grand degré

DÉFINITION 1.— *Soit f une fonction réelle définie, dérivable et ne s'annulant pas sur un voisinage standard de $+\infty$. Soit ω, un infiniment grand positif.*

i) On appellera petit degré de f en ω, le réel $\deg_\omega(f)$, *défini par*

$$\deg_\omega(f) = \frac{\ln|f(\omega)|}{\ln(\omega)}\,.$$

ii) On appellera grand degré de f en ω, le réel $\mathrm{Deg}_\omega(f)$, *défini par*

$$\mathrm{Deg}_\omega(f) = \frac{\omega \cdot f'(\omega)}{f(\omega)}\,.$$

Dans les deux cas le degré de la fonction nulle sera égale à $-\infty$.

Remarque.— D'un point de vue classique deg est une fonction de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ qui à f associe la fonction $\deg(f)$ définie par

$$\deg(f)(x) = \deg_x(f) = \frac{\ln|f(x)|}{\ln(x)}\,,$$

pour tout nombre réel x assez grand. On définirait de même la fonction *grand degré.*

Lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible ou si le résultat est le même pour les deux définitions, on parlera de degré sans prendre soin de préciser petit ou grand et en quel infiniment grand. Dans toute la suite, ω désignera un nombre réel infiniment grand positif.

Exemples

(1) $\deg_\omega(X^\alpha) = \mathrm{Deg}_\omega(X^\alpha) = \alpha$, où α est un réel quelconque.

(2) $\deg_\omega(\exp) = \omega/\ln(\omega)$ et $\mathrm{Deg}_\omega(\exp) = \omega$.

(3) $\deg_\omega(\ln) = \ln(\ln(\omega))/\ln(\omega)$ et $\mathrm{Deg}_\omega(\ln) = 1/\ln(\omega)$.

On remarquera que le degré de exp est infiniment grand et que le degré de ln est un infiniment petit strictement positif, tandis que le degré d'une fonction monôme est le même que le degré habituel de cette même fonction.

Le grand degré est une notion classique en analyse ultramétrique et correspond à la dérivée logarithmique d'une fonction. Le petit degré représente en fait l'idée que se faisait Borel [B] du type de croissance d'une fonction. Cette même notion est à rapprocher de la notion d'ordre d'une fonction par rapport à une autre [Bo]. L'ordre de f par rapport à g en $+\infty$ est $\rho = \lim_{x\to\infty} \ln|f(x)|/\ln|g(x)|$ quand cette limite existe. Ainsi on a la proposition suivante.

PROPOSITION 1.— *Soient f et g deux fonctions standard telles qu'on puisse définir l'ordre de f par rapport à g en $+\infty$. Si f est d'ordre ρ par rapport à g, alors on a*

(1) si ρ est fini :

$$\frac{\deg_\omega(f)}{\deg_\omega(g)} \text{ est infiniment proche de } \rho\,;$$

(2) si $\rho = +\infty$:

$$\frac{\deg_\omega(f)}{\deg_\omega(g)} \text{ est infiniment grand positif};$$

(3) si $\rho = -\infty$:

$$\frac{\deg_\omega(f)}{\deg_\omega(g)} \text{ est infiniment grand négatif}.$$

De plus, pour pouvoir manipuler plus facilement les degrés des fonctions, on a les propriétés suivantes.

PROPOSITION 2.— *Soient $f \in \mathcal{F}$ et $g \in \mathcal{F}$, alors on a les égalités suivantes :*

(1) $\deg_\omega(fg) = \deg_\omega(f) + \deg_\omega(g)$ *et* $\mathrm{Deg}_\omega(fg) = \mathrm{Deg}_\omega(f) + \mathrm{Deg}_\omega(g)$ *;*

(2) si de plus $f \circ g \in \mathcal{F}$, on a

$$\deg_\omega(f \circ g) = \deg_{g(\omega)}(f) \times \deg_\omega(g)$$

$$\mathrm{Deg}_\omega(f \circ g) = \mathrm{Deg}_{g(\omega)}(f) \times \mathrm{Deg}_\omega(g)\,.$$

En fait, cette proposition ainsi que les deux suivantes sont vraies dans tout corps de Hardy. Les preuves étant triviales sont laissées au lecteur.

PROPOSITION 3

(1) Si f et g, deux fonctions standard de $\mathcal{F}$ positives au voisinage de $+\infty$, vérifient

$$\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - g(x)\big) \geq 0\,,$$

alors

$$\deg_\omega(f) \geq \deg_\omega(g)\,.$$

(2) Si f et g, deux fonctions standard de $\mathcal{F}$ positives au voisinage de $+\infty$, vérifient

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty\,,$$

alors

$$\mathrm{Deg}_\omega(f) > \mathrm{Deg}_\omega(g)\,.$$

Il est bon de noter qu'hormis la fonction identiquement nulle, un élément de $\mathcal{F}$ est soit strictement positif, soit strictement négatif au voisinage de $+\infty$. La propriété (1) montre que pour les fonctions positives à l'infini, le petit degré conserve l'ordre des fonctions à l'infini. Par contre, la propriété (2) nous indique que le grand degré conserve ce même ordre à condition que les fonctions considérées aient un comportement vraiment différent à l'infini.

PROPOSITION 4.— *Soient f et g deux fonctions standard de $\mathcal{F}$, positives à l'infini, alors on a*

$$\deg_\omega(f) = \deg_\omega(g) \Longleftrightarrow f(\Omega) = g(\Omega) \tag{1}$$

où Ω est un infiniment grand positif quelconque.

$$\mathrm{Deg}_\omega(f) = \mathrm{Deg}_\omega(g) \Longleftrightarrow f(\Omega) = k \cdot g(\Omega) \tag{2}$$

où Ω est un infiniment grand positif quelconque et k une constante réelle standard dépendant de f et g.

En fait, les fonctions sont soit identiques dans le cas (1), soit identiques à une constante multiplicative près dans le cas (2), sur l'intersection de leur domaine de définition.

2.2 Degré d'une fonction à un échelon donné

Dans la suite, nous noterons e_n, et respectivement l_n, la fonction exp, respectivement ln, itérée n fois, lorsque n est un entier naturel (on a évidemment $e_0 = l_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$). De même, on définit pour n entier naturel les fonctions e_{-n} et l_{-n} par

$$e_{-n} = l_n \quad \text{et} \quad l_{-n} = e_n\,.$$

DÉFINITION 2.— *Soit f une fonction réelle standard définie sur un voisinage de $+\infty$ telle que*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\,.$$

Soit ω, un infiniment grand positif. Soit p un entier naturel. On appellera degré à l'échelon p de f en ω, le réel $\deg_{\omega,p}(f)$, défini par

$$\deg_{\omega,p}(f) = \deg_\omega(l_p \circ f \circ e_p)\,.$$

THÉORÈME 1.— *Soit f un élément de $\mathcal{F}$ tel que:*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\,.$$

Alors il existe un entier naturel p et un entier relatif q, tels que

$$\lim_{x \to +\infty} \deg_{x,p}(e_q \circ f) \ \textit{est fini et strictement positive}\,.$$

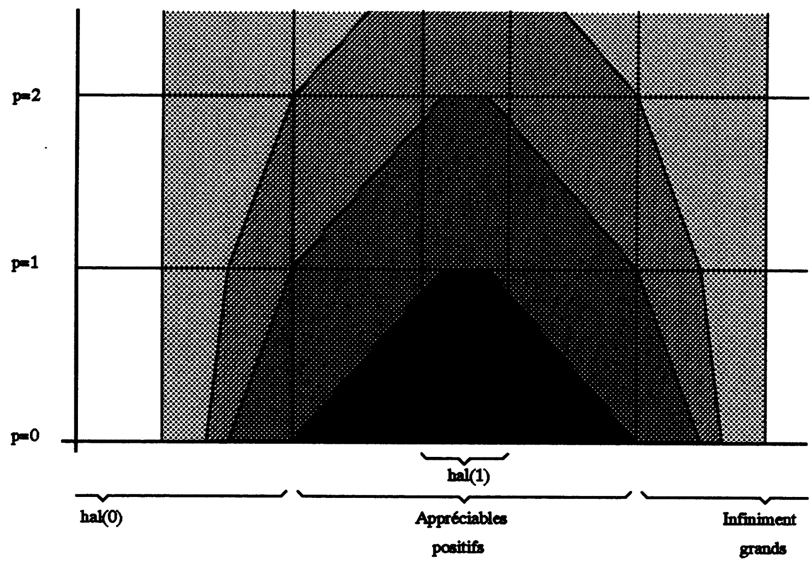

Fig. 1 Ce graphique illustre les degrés d'une même fonction standard à des échelons différents. Toutes les frontières tracées sont *floues*. L'ensemble en pointillés légers représente les degrés des fonctions standard de degré appréciable à un certain échelon. Les autres, sont les degrés des fonctions standard de degré appréciable à l'échelon 0, ou bien 1, ou bien 2.

Preuve.— Par transfert, il suffit de montrer que pour tout f élément standard de $\mathcal{F}$ qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$, il existe un entier naturel standard p et un entier relatif standard q, tels que $\deg_{\omega,p}(e_q \circ f)$ soit appréciable positif.

En décomposant f suivant sa première forme emboitée ([S1], [S2]), on obtient

$$f = (e_n)^{\varepsilon} \circ \left[(l_m)^d \times g\right],$$

où n et m sont des entiers naturels standard, ε est égal à ± 1, d est un nombre réel standard non nul et enfin g est une fonction standard de $\mathcal{F}$ telle que:

$$\frac{\deg_{\omega}(g)}{\deg_{\omega}(l_m)} \simeq 0\,.$$

Remarquons tout d'abord que nous pouvons supposer ε égal à $+1$ et d positif, étant donné que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$. De plus, de la propriété portant sur g, on déduit aisément que

$$\deg_\omega\left(\left[(l_m)^d \times g\right] \circ e_m\right) \simeq d\,.$$

Par conséquent, on a

$$\deg_{\omega,p}(e_q \circ f) \simeq d\,,$$

avec

$$p = m \quad \text{et} \quad q = m - n\,.$$

Et comme d est un nombre réel standard strictement positif, il est appréciable positif. □

Exemple 1.— Soit

$$f(x) = 3x^2 - x + 2\,,$$

on a alors:

$$\deg_\omega(f) = 2 + \frac{\ln(3 - 1/\omega + 2/\omega^2)}{\ln(\omega)} \simeq 2\,.$$

Exemple 2.— Soit

$$f(x) = x \cdot e^x\,,$$

on a alors

$$\deg_\omega(f) = \omega + 1\,.$$

Néanmoins, on peut ajouter que

$$\deg_\omega(e_{-1} \circ f) = 1 + \frac{\ln(1 + (\ln(\omega)/\omega))}{\ln(\omega)} \simeq 1\,.$$

Exemple 3.— Soit

$$f(x) = x \cdot e^{(\ln^2(x))}\,,$$

on a alors

$$\deg_\omega(f) = \ln(\omega) + 1\,.$$

Néanmoins, on peut ajouter que

$$\deg_{\omega,1}(f) = 2 + \frac{\ln(1 + 1/\omega)}{\ln(\omega)} \simeq 2\,.$$

Le théorème suivant permet de savoir, sans calculer l'entier p, si une fonction donnée est de degré appréciable positif à un échelon donné.

THÉORÈME 2.— *Soit f une fonction standard de $\mathcal{F}$ telle que*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty .$$

(1) Si $\deg_\omega(f) \leq \deg_\omega(\ln)$ *ou bien si* $\deg_\omega(f) \leq \deg_\omega(\exp)$ *alors f n'est pas de degré appréciable positif à n'importe quel échelon.*

(2) Si $\deg_\omega(\ln) < \deg_\omega(f) \leq 1$, *alors f est de degré appréciable positif à un certain échelon si et seulement si*

$$\deg_{\omega,1}(f) \geq \deg_\omega(f) .$$

(3) Si $1 < \deg_\omega(f) < \deg_\omega(\exp)$, *alors f est de degré appréciable positif à un certain échelon si et seulement si*

$$\deg_{\omega,1}(f) \leq \deg_\omega(f) .$$

Remarque.— Si la fonction $x \mapsto \deg_x(f)$ est majorée par 1 sur un voisinage de ∞ et si la fonction

$$x \mapsto \frac{\deg_x(f)}{\deg_x(\ln)}$$

est minoré par 1 sur un voisinage de l'infini, alors f est de degré appréciable positif si et seulement si

$$x \mapsto \frac{\deg_{x,1}(f)}{\deg_x(f)}$$

est minorée par 1 sur un voisinage de l'infini. En pratique, pour f donnée, il faudra déterminer un entier relatif n tel que $e_n \circ f$ domine ln et soit dominée par exp à l'infini. Alors $e_{n-1} \circ f$ ou bien $e_n \circ f$ ou bien $e_{n+1} \circ f$ sera de degré appréciable à un certain échelon; les assertions (1), (2) et (3) permettant de savoir laquelle est la bonne.

Preuve.— On peut tout d'abord remarquer que pour toutes fonctions f et g vérifiant les hypothèses du théorème et si le petit degré de f est inférieur à celui de g, on a pour tout entier naturel p :

$$\deg_{\omega,p}(f) \leq \deg_{\omega,p}(g) .$$

De plus, toujours pour tout entier naturel p, on a

$$\deg_{\omega,p}(\ln) \simeq 0\,,$$

et

$$\deg_{\omega,p}(\exp) \text{ infiniment grand positif.}$$

Ainsi la partie (1) du théorème est démontrée.

Supposons maintenant que f vérifie l'hypothèse supplémentaire de (2). Nous pouvons remarquer selon le théorème précédent que f ou bien $\exp\circ f$ est de degré appréciable à un certain échelon. De même, le signe de

$$\deg_{\omega,p}(f) - \deg_{\omega,p+1}(f)$$

où p est un entier naturel, est indépendant de p. De plus, le signe de cette expression pour $\exp\circ f$ est le même que celui pour f. Par conséquent, avec le signe de

$$\deg_{\omega}(f) - \deg_{\omega,1}(f)\,,$$

nous pourrons savoir laquelle de ces deux fonctions n'est pas de degré appréciable à tout échelon. Nécessairement, l'autre sera de degré appréciable positif à un échelon donné.

L'assertion (3) se prouve comme l'assertion (2) en remplaçant $\exp\circ f$ par $\ln\circ f$. □

2.3 Différentiation

PROPOSITION 5.— *Soit $f \in \mathcal{F}$ telle qu'il existe un entier naturel p tel que*

$$\lim_{x\to\infty} \deg_{x,p}(f) \textit{ soit finie et strictement positive}\,,$$

alors

$$\lim_{x\to\infty} \left(\deg_x(f') - \deg_x(f)\right) = -1\,.$$

Preuve.— Par transfert, il suffit de montrer que pour une fonction f standard vérifiant les hypothèses de la proposition, alors

$$\deg_{\omega}(f') \simeq \deg_{\omega}(f) - 1\,.$$

Puisque f est de degré appréciable à l'échelon p (nécessairement standard), il existe une fonction standard d de $\mathcal{F}$ telle que

$$\begin{cases} f(x) = e_p\big(l_p^{d(x)}(x)\big)\,, \\ \lim\limits_{x\to\infty} d(x) \text{ est fini et strictement positive}. \end{cases}$$

En fait, on a plus précisément :

$$d(\omega) \simeq \deg_{\omega,p}(f)\,.$$

Ainsi on obtient

$$f'(x) = f(x)\left(\prod_{i=0}^{p-1} e_i\big(l_p^{d(x)}(x)\big)\right) \frac{d(x)}{x\prod\limits_{i=1}^{p} l_i(x)} \left(1 + \frac{d'(x)}{d(x)} \prod_{i=0}^{p+1} l_i(x)\right).$$

Comme le degré d'un produit est égal à la somme des degrés, il suffit d'étudier le degré de chaque facteur. On a

$$\deg_\omega\big(e_i \circ l_p^d\big) \simeq 0\,,$$

pour tout entier naturel i inférieur strictement à p. De même, on trouve

$$\deg_\omega(l_i) \simeq 0\,,$$

pour tout entier naturel i strictement positif. De plus, comme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{d'(x)}{d(x)} \prod_{i=0}^{p+1} l_i(x) = 0\,,$$

on en déduit

$$\deg_\omega\left(1 + \frac{d'}{d} \prod_{i=0}^{p+1} l_i\right) \simeq 0\,.$$

Finalement, on trouve

$$\deg_\omega(f') \simeq \deg_\omega(f) - 1\,. \ \square$$

Proposition 6.— *Soit $f \in \mathcal{F}$, telle qu'il existe un entier naturel non nul q et un entier naturel p tels que*

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} \deg_{x,p}(e_{-q} \circ f) \ \textit{soit finie et strictement positive} \\ \lim\limits_{x\to\infty} \deg_x(e_{-q} \circ f) \neq 0\,, \end{cases}$$

alors

$$\lim_{x\to\infty} \deg_x(f') - \deg_x(f) \neq -1\,.$$

Preuve.— Par transfert, il suffit de montrer que pour une fonction f standard vérifiant les hypothèses de la proposition, on a

$$\deg_\omega(f') - \deg_\omega(f) \not\simeq -1 .$$

Soit la fonction g, définie par

$$g = e_{-q} \circ f .$$

On a alors

$$f' = f \cdot \left(\prod_{i=1}^{q-1} e_i \circ g \right) \cdot g' .$$

Or

$$\deg_\omega(e_i \circ g) \text{ est infiniment grand positif}$$

pour tout entier naturel i strictement positif. Et, en appliquant la proposition 5 à g, on obtient l'inégalité :

$$\begin{cases} \deg_\omega(g') > -1 , \\ \deg_\omega(g') \not\simeq -1 . \end{cases}$$

En conclusion, on trouve donc

$$\deg_\omega(f') - \deg_\omega(f) \not\simeq -1 . \ \square$$

Ces deux propositions sont complémentaires. En effet, l'enveloppe convexe des degrés des fonctions standard ayant un degré à un certain échelon appréciable est une galaxie [DVdB], tandis que l'enveloppe convexe des degrés des fonctions standard telles que la différence des degrés de sa fonction dérivée et d'elle-même soit infiniment proche de 1 est un halo. Par conséquent, il ne peut y avoir égalité entre ces deux ensembles. L'exemple 1 illustre la proposition 5; l'exemple 2, la proposition 6; et l'exemple 3 montre que l'inclusion du premier ensemble dans le second est stricte.

Exemple 1.— Soit

$$f(x) = e^{\ln^2(x)} ,$$

on a

$$\deg_{\omega,1}(f) = 2 \quad \text{et} \quad f'(x) = \frac{2e^{\ln^2(x)} \ln(x)}{x} .$$

Par conséquent

$$\deg_\omega(f') - \deg_\omega(f) = -1 + \frac{l_2(\omega) + l_1(2)}{l_1(\omega)} \simeq -1\,.$$

Exemple 2.— Soit

$$f(x) = x \cdot e^x\,,$$

on a

$$\deg_{\omega,0}(e_{-1} \circ f) \simeq 1 \quad \text{et} \quad f'(x) = (x+1)\,e^x\,.$$

Par conséquent

$$\deg_\omega(f') - \deg_\omega(f) = \frac{\ln(1 + 1/\omega)}{\ln(\omega)} \simeq 0\,.$$

Exemple 3.— Soit

$$f(x) = e^{e^{\ln^{1/2}(x)}}\,,$$

on a

$$\deg_{\omega,1}(e_{-1} \circ f) \simeq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\ln(x)}{x}\,e^{e^{\ln^{1/2}(x)}} e^{\ln^{1/2}(x)}\,.$$

Par conséquent

$$\deg_\omega(f') - \deg_\omega(f) = -1 + \frac{1}{\sqrt{\ln(\omega)}} + \frac{l_2(\omega)}{l_1(\omega)} - \frac{\ln(2)}{\ln(\omega)} \simeq -1\,.$$

2.4 Polygone de Newton

Je ne vais pas définir ici ce que sera le polygone de Newton d'une équation de la forme

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(y) g_i(x) = 0\,, \tag{3}$$

où n est un entier naturel, les f_i et les g_i sont des éléments de $\mathcal{F}$. En effet, le concept est simple, mais il nécessiterait une étude assez fine qui n'est pas faite pour le moment. Aussi, nous allons supposer cette analyse faite, ce qui nous ramène à trouver le comportement asymptotique d'une solution connaissant au moins deux points d'un côté principal du polygone. Plus exactement, soit l'équation :

$$f_1(y)g_1(x) + f_2(y)g_2(x) = 0\,,$$

où les fonctions f_i et g_i sont des fonctions de $\mathcal{F}$. Remarquons tout d'abord, qu'en effectuant quelques changements d'inconnues, nous sommes ramenés au problème suivant: trouver le comportement asymtotique de $y = y(x)$ à l'infini tel que

$$f(y) = x\,,$$

où f est un élément de $\mathcal{F}$, qui tend vers $+\infty$ quand la variable tend vers $+\infty$. Finalement, le problème est d'inverser une fonction de $\mathcal{F}$, alors que nous ne savons pas si la fonction réciproque est approximable par un élément de cet ensemble. Le propos de la section suivante est justement d'analyser ce problème.

3. Équivalent de la fonction réciproque d'un élément de $\mathcal{F}$

3.1 Étude d'un exemple

Nous allons étudier le cas de la fonction f définie par

$$f(x) = x \cdot \ln(x)\,.$$

Le problème est de déterminer un équivalent de la réciproque de f au voisinage de l'infini dans $\mathcal{F}$. Nous utiliserons tout d'abord une méthode classique qu'on peut trouver, entre autres, dans [Br]. Cela consiste à transformer l'équation

$$x \cdot \ln(x) = \omega$$

en l'équation

$$\ln(x) + \ln\big(\ln(x)\big) = \ln(\omega)\,,$$

où ω est un réel positif infiniment grand et x, l'inconnue, est par conséquent aussi un réel positif infiniment grand. La dernière équation peut s'écrire

$$\ln(x) = \ln(\omega) \cdot (1 + \oslash)\,.$$

Nous trouvons donc en première approximation

$$x = \omega \cdot e^{\oslash \ln(\omega)}.$$

Cependant, ce résultat n'est pas assez précis pour donner un équivalent de f^{-1} en $+\infty$. Il convient de poser

$$x = \omega / y,$$

où y est la nouvelle inconnue, qui est elle aussi infiniment grande (c'est pour cela qu'on a divisé par y plutôt que de multiplier). Cela donne en remplaçant dans l'équation initiale

$$\ln(\omega) = y + \ln(y).$$

Par conséquent

$$y = \ln(\omega) \cdot (1 + \oslash)$$

et finalement

$$x = \frac{\omega}{\ln(\omega)} (1 + \oslash).$$

Ainsi un équivalent de f^{-1} en $+\infty$ est la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{x}{\ln(x)}.$$

Cette méthode itérative présente deux inconvénients. Le premier est qu'il nécessite de connaître les différents ordres de grandeurs de certains termes considérés. Le second est qu'il n'y a aucune assurance que le processus va pouvoir nous donner un équivalent en un nombre fini d'itérations. La méthode que je suggère est inspirée de la méthode de la sécante, que nous allons appliquer ci-après.

Nous cherchons toujours à approximer $f^{-1}(\omega)$, où ω est un infiment grand positif. Prenons la condition initiale x_0 égale à ω, par exemple. Puis, on calcule son image par f, et on détermine l'équation de la droite passant par l'origine et le point $\big(x_0, f(x_0)\big)$. L'abscisse du point d'intersection de cette droite avec la droite horizontale d'équation $y = \omega$, nous donne la valeur de l'itération suivante : x_1. Ici, nous avons

$$x_1 = \frac{\omega}{\ln(\omega)}.$$

En faisant une seule itération, nous avons une aussi bonne approximation qu'en deux itérations avec la méthode précédente. De plus, il n'a pas été nécessaire de tenir compte des ordres de grandeur. Cependant, nous ne connaissons pas l'erreur commise. Les théorèmes qui suivront permettront de répondre à cette question. De même, nous pourrons donner une majoration du nombre d'itérations nécessaire pour obtenir un équivalent de la fonction réciproque de f. Cette méthode, nous le verrons, est bonne pour des fonctions ayant un comportement proche de celui d'une droite (i.e. le degré infiniment proche de 1). Pour les autres, il suffira en quelque sorte de transporter cette méthode à travers diverses fonctions.

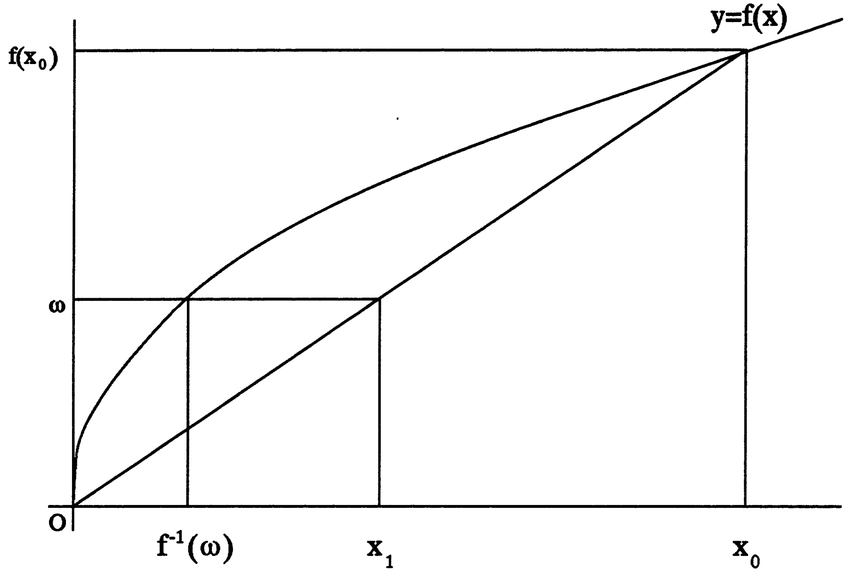

Fig. 2 Méthode de la sécante. La méthode de la sécante classique consisterait à prendre appui, pour déterminer x_2, sur le point $(x_0, f(x_0))$ et non pas constamment sur le point 0.

3.2 Degré infiniment proche de 1

Dans tout ce paragraphe, f est une fonction standard positive à l'infini de $\mathcal{F}$ de degré infiniment proche de 1. On comprend aisément le rôle central de cet ensemble de fonctions, puisque si une fonction est de degré inférieur à 1, sa fonction réciproque est de degré supérieur à 1. De plus, lorsque nous étudierons le cas général, cela consistera à se ramener aux cas où le degré n'est "pas trop loin" de 1.

Pour trouver un équivalent de f^{-1} dans $\mathcal{F}$, nous allons itérer une fonction de telle façon que tous ses itérés limités correspondent à des éléments de $\mathcal{F}$.

DÉFINITION 3.— *Soit f une fonction standard de $\mathcal{F}$ de degré infiniment proche de 1 et positive à l'infini. Soit ω, un infiniment grand positif. On définit la fonction réelle $I_{f,\omega}$ par*

$$I_{f,\omega}(x) = \frac{\omega}{f(x)} \cdot x ,$$

où x est un nombre réel.

Cette fonction est la fonction qu'on itère lorsqu'on applique la méthode de la sécante. Nous pouvons déjà remarquer que le seul point fixe de cette fonction est $f^{-1}(\omega)$. (De manière classique, cela revient à itérer une fonction de deux variables par rapport à la deuxième variable, en partant d'une condition initiale dépendant uniquement de la première variable. Le point fixe est alors une fonction de la première variable.)

De plus on a

$$I'_{f,\omega}(x) = \frac{I_{f,\omega}(x)}{x} \left(1 - \mathrm{Deg}_x(f)\right) .$$

La dérivée au point fixe est donc infiniment petite, par conséquent, le point fixe est attractant. Ainsi, si on prend ω comme point de départ des itérations on pourra se rapprocher aussi près que l'on veut de la valeur $f^{-1}(\omega)$ (le fait que ω soit dans le bassin d'attraction sera justifié lors de la preuve du prochain théorème). Cependant, si l'on veut que l'itéré n-ième de $I_{f,\omega}$ à partir de ω correspondent à un élément de $\mathcal{F}$, il vaudrait mieux avoir n limité. Plus précisément, si n est illimité, on ne peut pas savoir si l'itéré correspondant est un élément standard de $\mathcal{F}$. Le théorème qui va suivre nous donne justement une condition pour que cela soit vérifié. Cependant, précisons que nous noterons $\mathcal{G}_\omega$, l'ensemble défini par

$$\mathcal{G}_\omega = \bigcup_{n \text{ standard}} \left[-\ln^{-1/n}(\omega) , \ln^{-1/n}(\omega)\right] ,$$

où ω est un nombre infiniment grand positif. Il est bien évident que G_ω est une galaxie ([DD], [DR]). L'analogue classique sera noté $\mathcal{G}$, le sous-ensemble de $\mathcal{F}$ des fonctions f telle que $\omega \mapsto \left(l_2(\omega)/\ln|f(\omega)|\right)$ est bornée et négative sur un voisinage de l'infini. Ainsi formulée, nous avons pour toute fonction standard f de $\mathcal{F}$

$$\text{“}f \in G\text{”} \quad \Leftrightarrow \quad \text{“}f(\omega) \in \mathcal{G}_\omega\text{”} .$$

De plus, pour tout entier naturel n, la fonction $I_{f,\omega}$ itérée n fois sera notée $I^n_{f,\omega}$.

THÉORÈME 3.— *Soit f une fonction de $\mathcal{F}$ positive à l'infini et telle que* $\lim_{x\to\infty} \deg_x(f) = 1$. *Si*

$$\big(x \mapsto 1 - \mathrm{Deg}_x(f)\big) \in \mathcal{G}\,,$$

alors

$$\exists\, n \in \mathbb{N}\,, \quad I^n_{f,x}(x) \underset{\infty}{\sim} f^{-1}(x)\,.$$

Preuve.— Par transfert, il suffit de montrer que pour tout fonction standard f de $\mathcal{F}$ positive à l'infini et de degré infiniment proche de 1, si

$$1 - \mathrm{Deg}_\omega(f) \in \mathcal{G}_\omega\,,$$

alors

$$\exists^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N}\,, \quad I^n_{f,\omega}(\omega) = f^{-1}(\omega)(1 + \oslash)$$

où ω est un nombre réel infiniment grand positif. Soit f, une fonction vérifiant ces hypothèses. Remarquons tout d'abord que

$$f^{-1}(\omega) = \omega^{1+\oslash}\,.$$

Par conséquent, on peut ramener l'étude dans le halo de 0 en définissant

$$i_f(\varepsilon) = \frac{\ln\big(I_{f,\omega}(\omega^{1+\varepsilon})\big)}{\ln(\omega)} - 1\,.$$

Alors on a

$$i'_f(\varepsilon) = 1 - \mathrm{Deg}_{\omega^{1+\varepsilon}}\,.$$

Les itérations de cette nouvelle fonction se feront à partir de 0. De plus, on peut remarquer que

$$\frac{f^{-1}(\omega)}{\omega^{1+\varepsilon}} \simeq 1\,,$$

si et seulement si

$$|\alpha - \varepsilon| = \frac{\oslash}{\ln(\omega)}\,,$$

où α vérifie $\omega^{1+\alpha} = f^{-1}(\omega)$. Il est donc suffisant, pour qu'un des itérés limités de i_f à partir de 0 soit suffisamment près de α, que l'image d'un intervalle du halo de 0 par i'_f soit contenue dans la galaxie $\mathcal{G}_\omega$. Or ceci est vérifié si et seulement si

$$1 - \mathrm{Deg}_\omega(f) \in \mathcal{G}_\omega\,.$$

Ainsi, il existe un entier naturel standard tel que

$$i^n_f(0) - \alpha = \frac{\oslash}{\ln(\omega)}\,.$$

Le même entier satisfera à la conclusion du théorème. □

3.3 Exemples de degré infiniment proche de 1

Exemple 1.— Soit

$$f(x) = x + 1\,.$$

L'intérêt de cet exemple est qu'il permet de donner une formule générale pour l'application $I_{f,\omega}$ itérée n fois et aussi qu'on peut donner une expression explicite de l'application réciproque. Nous avons ici

$$I_{f,\omega}(x) = \frac{\omega}{x+1}\cdot x\,,$$

par conséquent, pour tout entier naturel n, nous trouvons

$$I^n_{f,\omega}(\omega) = \frac{\omega^{n+1}}{\omega^{n+1}-1}\cdot(\omega-1)\,.$$

Ce qui donne comme approximée de $f^{-1}(x)$ à l'étape n

$$\frac{x^{n+1}}{x^{n+1}-1}\cdot(x-1)\,,$$

alors que

$$f^{-1}(x) = x - 1\,.$$

Comme nous le voyons, l'écart entre $f^{-1}(x)$ et son approximée à l'étape n est égal à $\mathrm{o}(x^{-n})$.

Exemple 2.— Soit

$$f(x) = x\cdot e^{\sqrt{\ln(x)}}\,,$$

alors

$$\mathrm{Deg}_\omega(f) = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\ln(\omega)}}\,.$$

Par conséquent $\big(1-\mathrm{Deg}_\omega(f)\big)\in\mathcal{G}_\omega$, mais nous pouvons ajouter que

$$\big(1-\mathrm{Deg}_\omega(f)\big)^2 = \frac{\pounds}{\ln(\omega)}\,,$$

ainsi en deux itérations nous obtiendrons un équivalent de f^{-1}. Ici, nous avons

$$I^2_{f,\omega}(\omega) = \frac{\omega}{e^{\sqrt{\ln(\omega)+\sqrt{\ln(\omega)}}}} = \frac{\omega}{e^{1/2}e^{\sqrt{\ln(\omega)}}}(1+\oslash)\,.$$

Ce qui donne

$$f^{-1}(x) \underset{\infty}{\sim} \frac{x}{e^{1/2} e^{\sqrt{\ln(x)}}} .$$

Exemple 3.— Soit

$$f(x) = x \cdot \exp\left[\left(\ln(x)\right)^{1-1/l_3(x)}\right] .$$

Comme nous avons

$$\mathrm{Deg}_\omega(f) = 1 + \left(\ln(\omega)\right)^{-1/l_3(\omega)} \left(1 - \frac{1}{l_3(\omega)} + \frac{1}{(l_3(x))^2}\right) ,$$

il s'ensuit

$$\left(1 - \mathrm{Deg}_\omega(f)\right) \notin \mathcal{G}_\omega .$$

Par conséquent, la méthode suggérée ne nous donne pas d'équivalent de f^{-1} dans $\mathcal{F}$. Cependant, comme nous le verrons sur un exemple plus simple dans le dernier paragraphe, nous pourrions trouver quand même des renseignements utiles sur cette fonction réciproque.

3.4 Degré quelconque

Nous noterons $e_{p,a}$, les fonctions de $\mathcal{F}$ égales à $e_p \circ \left(l_p\right)^a$, où a est un réel et p un entier naturel. Lorsque a est strictement positif, ces fonctions ont la propriété remarquable d'être inversibles à l'infini et leur fonction réciproque est aussi élément de $\mathcal{F}$ et est égale à $e_{p,1/a}$.

Comme nous l'avons vu au théorème 1, nous pouvons nous ramener au cas où f est une fonction de degré appréciable à un certain échelon. Pour étudier le cas général, nous allons là aussi itérer une fonction. Par conséquent, nous allons tout d'abord généraliser la définition 3.

DÉFINITION 4.— *Soit f une fonction standard de $\mathcal{F}$ positive à l'infini et de degré infiniment proche d'un réel standard strictement positif a à l'échelon p. Supposons, de plus, que p est le plus petit entier naturel tel que cette propriété soit satisfaite. Soit ω, un infiniment grand positif. On définit la fonction réelle $I_{f,\omega}$ par*

$$I_{f,\omega}(x) = e_p\left[\left(\frac{l_p(\omega)}{l_p(f(x))}\right)^{1/a} l_p(x)\right] ,$$

où x est un nombre réel.

Remarque.— J'ai choisi la méthode géométrique pour introduire la fonction $I_{f,\omega}$. Cependant, pour $p = 1$ et $a = 1$, nous retrouvons cette fonction grâce au petit degré. En effet, posons dans ce cas $\Omega = f^{-1}(\omega)$, nous avons $\deg_\omega(f \circ f^{-1}) = 1$ mais aussi $\deg_\omega(f \circ f^{-1}) = \deg_\Omega(f) \deg_\omega(f^{-1})$. Nous en déduisons que $\Omega = I_{f,\omega}(\Omega)$.

C'est la méthode de la sécante qui vient d'être transportée à travers les différents échelons et degrés. En prenant p égal à 0 et a égal à 1, nous retrouvons la définition 3.

Le théorème qui suit généralise lui aussi le théorème 3.

THÉORÈME 4.— *Soit f une fonction de $\mathcal{F}$ positive à l'infini et telle qu'il existe un entier naturel p vérifiant $\lim_{x\to\infty} \deg_{x,p}(f) = a$ où a est un nombre réel fini non nul. Si*

$$\left(x \mapsto \frac{\operatorname{Deg}_x(e_{p,a}) - \operatorname{Deg}_x(f)}{\deg_x(f)}\right) \in \mathcal{G}\,,$$

alors

$$\exists\, n \in \mathbb{N}\,, \quad I^n_{f,x}(g(x)) \underset{\infty}{\sim} f^{-1}(x)\,,$$

où g est une fonction de $\mathcal{F}$ supérieure à f^{-1} sur un voisinage de l'infini et telle que $\lim_{x\to\infty} \deg_{x,q}(g)$ soit finie pour un certain entier naturel q.

La condition sur g est une condition technique. Cependant, lorsque p est égal à 0 ou 1, on peut prendre g égale à l'identité, ce qui permet de retrouver le théorème 3 . De plus, pour une fonction donnée f, pour que la condition sur celle-ci soit optimale (i.e. la plus large possible), il faut choisir p le plus petit possible. L'idée générale qu'il faut retenir de ce théorème, est que pour donner un équivalent dans $\mathcal{F}$ de la réciproque d'un élément de ce même ensemble, il faut que celui-ci ne soit pas trop éloigné d'un élément de $\mathcal{F}$ inversible dans ce même ensemble. Ici, ce sont les $e_{p,a}$ qui jouent ce rôle centralisateur.

Les grandes lignes de la preuve sont les mêmes que celles de la preuve du théorème 3. La complication vient du seul fait que nous nous autorisons un plus grand nombre d'emboîtement d'exponentielle et de logarithme.

Preuve.— Par transfert, il suffit de prouver que pour toute fonction standard f de F, positive à l'infini, de degré infiniment proche du nombre standard positif a à l'échelon p vérifiant

$$\left(\operatorname{Deg}_\omega(e_{p,a} - \operatorname{Deg}_\omega(f)\right) \in \left(\deg_\omega(f) \cdot \mathcal{G}_\omega\right),$$

alors

$$\exists^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N}\,, \quad \frac{I^n_{f,\omega}(\omega')}{f^{-1}(\omega)} \simeq 1\,,$$

où $\omega' = g(\omega)$, g vérifiant les conditions du théorème. Supposons ces hypothèses satisfaites, nous avons pour tout réel x :

$$I'_{f,\omega}(x) = \left(1 - \frac{1}{a}\,\frac{xf'(x)}{f(x)} \prod_{i=1}^{p} \frac{l_i(x)}{l_i(f(x))}\right)\left(\prod_{i=0}^{p} \frac{l_i\big(I_{f,\omega}(x)\big)}{l_i(x)}\right).$$

Remarquons que

$$f^{-1}(\omega) = e_p\left[\big(l_p(\omega)\big)^{1/a+\oslash}\right].$$

Par conséquent, nous pouvons nous ramener à une étude dans le halo de 0 en posant

$$i_f(\varepsilon) = \frac{l_{p+1}\big(I_{f,\omega}(x_\varepsilon)\big)}{l_{p+1}(\omega)} - \frac{1}{a}$$

où ε est un réel infiniment petit, et

$$x_\varepsilon = e_p\left[\big(l_p(\omega)\big)^{1/a+\varepsilon}\right].$$

Notons que ω', la condition initiale, n'est pas nécessairement de la forme de x_ε, avec ε infiniment petit. Cependant, $I_{f,\omega}(\omega')$ l'est. Aussi, itérer l'application $I_{f,\omega}$ à partir de ω' revient à itérer l'application i_f à partir de

$$\varepsilon_0 = \frac{l_{p+1}(I_{f,\omega}(\omega'))}{l_{p+1}(\omega)} - \frac{1}{a}.$$

De plus,

$$\text{“}\exists^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N}\,, \quad \frac{I^n_f(\omega')}{f^{-1}(\omega)} \simeq 1\text{”}$$

est équivalent à

$$\text{“}\exists^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N}\,, \quad i^n_f(\varepsilon_0) - \alpha = \frac{\oslash}{\prod_{i=1}^{p+1} l_i(x_\alpha)}\text{”}$$

où α vérifie $f^{-1}(\omega) = e_p\big[\big(l_p(\omega)\big)^{1/a+\alpha}\big]$. Pour que cela soit vérifié, il suffirait que, pour tout ε infiniment petit, nous ayons

$$i'_f(\varepsilon) \in \mathcal{G}_{x_\alpha}.$$

Or cela est en général faux pour p différent de 0 ou 1. Nous avons

$$\begin{aligned}
i'_f(\varepsilon) &= 1 - \frac{1}{a}\,\frac{x_\varepsilon f'(x_\varepsilon)}{f(x_\varepsilon)} \prod_{i=1}^{p} \frac{l_i(x_\varepsilon)}{l_i\big(f(x_\varepsilon)\big)} \\
&= \frac{1}{a}\left(\prod_{i=1}^{p} \frac{l_i(x_\varepsilon)}{l_i\big(f(x_\varepsilon)\big)}\right)\left(a\prod_{i=1}^{p} \frac{l_i\big(f(x_\varepsilon)\big)}{l_i(x_\varepsilon)} - \mathrm{Deg}_{x_\varepsilon}(f)\right) \\
&= \pounds\,\frac{\big(\ln(x_\varepsilon)\big)^{1+\oslash}}{\ln\big(f(x_\varepsilon)\big)}\left(\mathrm{Deg}_{x_\varepsilon}(e_{p,a}) - \mathrm{Deg}_{x_\varepsilon}(f)\right).
\end{aligned}$$

Comme x_ε est infiniment grand lorsque ε est infiment petit et comme

$$\mathrm{Deg}_{x_\varepsilon}(e_{p,a}) - \mathrm{Deg}_{x_\varepsilon}(f) \in \left(\deg_{x_\varepsilon}(f)\cdot \mathcal{G}_{x_\varepsilon}\right),$$

nous avons, pour tout ε infiniment petit,

$$i'_f(\varepsilon) \in \mathcal{G}_{x_\varepsilon}\,.$$

Remarquons que pour tout ε infiniment petit, $i'_f(\varepsilon)$ est toujours de même signe et que si ε est supérieur à α, alors

$$\mathcal{G}_{x_\varepsilon} \subset \mathcal{G}_{x_\alpha}\,.$$

Si le signe de cette dérivée est négatif, les valeurs des itérations de i_f oscillent autour de α. Ainsi, nous avons pour tout entier naturel n

$$i'_f\big(i^{2n}(\varepsilon_0)\big) \in \mathcal{G}_{x_\alpha} \quad \text{ou bien} \quad i'_f\big(i^{2n+1}(\varepsilon_0)\big) \in \mathcal{G}_{x_\alpha}\,.$$

On en déduit le résultat du théorème.

Si le signe de cette dérivée est positif, les valeurs des itérations de i_f sont toujours supérieures ou toujours inférieures à α. Puisque nous avons pris ω' supérieur à $f^{-1}(\omega)$, ε_0 est supérieur à α. Ainsi, pour tout entier naturel n, nous avons

$$i'_f\big(i^{n}(\varepsilon_0)\big) \in \mathcal{G}_{x_\alpha}\,.$$

On en déduit là aussi le résultat du théorème. □

Remarque 1. — Si la condition du théorème n'est pas satisfaite pour f (f est une fonction standard de $\mathcal{F}$ de degré appréciable à un certain échelon), nous ne pouvons pas a priori exhiber un équivalent de la réciproque de f dans $\mathcal{F}$. Cependant, il existe un entier naturel standard q tel que cette condition soit satisfaite pour

$$l_q \circ f \circ e_q \, .$$

Ainsi, pour toute fonction f de $\mathcal{F}$, nous pouvons trouver une fonction g de $\mathcal{F}$, et un entier naturel q telle que

$$f^{-1} = e_q \circ \big(g \cdot (1 + \mathrm{o}(1))\big) \ ,$$

lorsque f est inversible au voisinage de $+\infty$. Cela permet de retrouver un des résultats de [SaS].

Remarque 2. — Un autre intérêt de cette méthode est de pouvoir facilement majorer le nombre d'itération. En effet, ce nombre est inférieur à

$$2\left[1 - \left(\frac{l_2(\omega)}{\ln\left|\dfrac{\mathrm{Deg}_\omega(e_{p,a}) - \mathrm{Deg}_\omega(f)}{\deg_\omega(f)}\right|}\right)\right] .$$

Remarque 3. — Si p est égal à 0 ou 1, alors, pour tout ε infiniment petit, on a

$$\mathcal{G}_{x_\varepsilon} = \mathcal{G}_{x_\alpha} \, .$$

Ainsi cela justifie qu'on peut choisir ω' égal à ω. De plus, dans ce cas là, cela diminue la majoration du nombre d'itération nécessaire de moitié.

Remarque 4. — Pour pouvoir ensuite exhiber un équivalent de f^{-1} dans $\mathcal{F}$, il est nécessaire de choisir ω' comme image de ω par un élément standard de $\mathcal{F}$. Pour ce faire, on peut prendre

$$\omega' = e_p\left[\big(l_p(\omega)\big)^{2/a}\right] .$$

3.5 Exemples de degré quelconque

Exemple 1.— Soit

$$f(x) = x \cdot e^{(\ln(x))^2}.$$

Nous avons

$$\begin{cases} \deg_\omega(f) = 2\ln(\omega) + 1 \\ \deg_{\omega,1}(f) = 2 + \dfrac{\ln(1+1/\omega)}{\ln(\omega)} \end{cases}$$

et aussi

$$\mathrm{Deg}_\omega(f) - \mathrm{Deg}_\omega(e_{1,2}) = 1.$$

Par conséquent,

$$\frac{\mathrm{Deg}_\omega(f) - \mathrm{Deg}_\omega(e_{1,2})}{\deg_\omega(f)} \in \mathcal{G}_\omega.$$

Ainsi, en itérant la fonction $I_{f,\omega}$, nous trouverons un équivalent de f^{-1}. De plus, nous pouvons préciser qu'il suffira d'itérer deux fois selon la remarque 2. Ici

$$I_{f,\omega}(x) = \exp\left[\left(\frac{\ln(\omega)}{\ln^2(x) + \ln(x)}\right)^{1/2} \cdot \ln(x)\right].$$

Finalement, nous trouvons

$$f^{-1}(x) \underset{\infty}{\approx} e^{-1/2} \exp\left(\sqrt{\ln(x)}\right).$$

Exemple 2.— Soit

$$f(x) = x \cdot e^x.$$

Nous avons ici une fonction qui est de degré infiniment grand à tous les échelons. Aussi, nous allons appliquer la méthode d'itération à g définie par

$$g(x) = \ln[f(x)] = x + \ln(x).$$

Cette fonction est de degré infiniment proche de 1 à l'échelon 0. De plus, nous pouvons montrer qu'en une étape, nous trouverons un équivalent de $g^{-1}(x)$ qui est

$$\frac{x}{1 + \ln(x)/x}.$$

Puisque $f^{-1} = g^{-1} \circ \ln$, nous trouvons

$$f^{-1}(x) \underset{\infty}{\approx} \ln(x) - \ln(\ln(x)) \underset{\infty}{\approx} \ln(x) .$$

Nous aurions pu éviter d'itérer car g est équivalent à $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, et nous aurions obtenu directement le deuxième résultat. Cependant, le premier résultat n'est pas inutile, il est en fait plus précis. En effet, nous avons

$$f^{-1}(x) - \ln(x) \underset{\infty}{\approx} -\ln(\ln(x)) .$$

Exemple 3

$$f(x) = \ln(x) \cdot \ln(\ln(x)) .$$

La première étape consiste à se ramener à une fonction de degré appréciable à un certain échelon. Par conséquent, nous définissons g par $g = \exp \circ f$. Alors nous avons

$$\begin{cases} \deg_\omega(g) = l_2(\omega) \\ \deg_{\omega,1}(g) = 1 + \dfrac{l_2(\omega)}{l_1(\omega)} \end{cases}$$

et aussi

$$\frac{\mathrm{Deg}_\omega(g) - \mathrm{Deg}_\omega(e_{1,1})}{\deg_\omega(g)} = 1 .$$

Comme $1 \notin \mathcal{G}_\omega$, la méthode ne nous donnera pas d'équivalent de g_{-1} et en conséquence de f_{-1}. Cependant, comme il est suggéré dans la remarque 1, nous allons étudier la réciproque de h définie par $h = f \circ \exp$. Nous avons

$$\deg_\omega(h) = 1 + \frac{l_2(\omega)}{l_1(\omega)}$$

et ainsi

$$\left(1 - \mathrm{Deg}_\omega(h)\right) \in \mathcal{G}_\omega .$$

La méthode est donc applicable et nous donne

$$h^{-1}(x) \underset{\infty}{\approx} \frac{x}{\ln(x)} ,$$

et finalement, nous avons comme première approximation :

$$f^{-1}(x) = \exp\left[\frac{x}{\ln(x)}\left(1 + \mathrm{o}(1)\right)\right] .$$

Références

[B] BOREL (E.) .— *Leçons sur la théorie de la croissance*, Gauthier-Villars, Paris, 1910.

[Bo] BOURBAKI (N.) .— *Éléments de Mathématiques*, chap. V (Fonctions d'une variable réelle), Hermann, Paris, 1951, seconde édition 1961.

[Br] DE BRUIJN (N. G.) .— *Asymptotic method in analysis*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, London, Third edition (1970).

[DD] DELEDICK (A.) ET DIENER (M.) .— *Leçons de calcul infinitésimal*, Armand Colin, Paris, Collection U (1989).

[DR] DIENER (F.) et REEB (G.) .— *Analyse non standard*, Herman, Collection Enseignement des sciences, Paris, 1989.

[DVdB] DIENER (M.) et VAN DER BERG (I. P.) .— *Halos et galaxies, une extension du lemme de Robinson*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, **293** (1981), pp. 385-388.

[H1] HARDY (G. H.) .— *Orders of infinity*, Cambridge Tracts in Mathematics **12** (1910).

[H2] HARDY (G. H.) .— *Properties of logarithmo-exponential functions*, Proceedings of the London Mathematical Society **10**, n° 2 (1911), pp. 54-90.

[N] NELSON (E.) .— *Internal set theory: a new approach to non-standard analysis*, Bulletin American Society **83**, n° 6 (1977), pp. 1165-1198.

[R1] ROSENLICHT (M.) .— *Hardy fields*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **93** (1983), pp. 297-311.

[R2] ROSENLICHT (M.) .— *The rank of a Hardy field*, Transactions of the American Mathematical Society **280**, n° 2 (1983), pp. 659-671.

[R3] ROSENLICHT (M.) .— *Rank change on adjoining real powers to Hardy fields*, Transactions of the American Mathematical Society **284**, n° 2 (1984), pp. 829-836.

[R4] ROSENLICHT (M.) .— *Growth properties of functions in Hardy fields*, Transactions of the American Mathematical Society **299**, n° 1 (1987), pp. 261-272.

[Sa] SALVY (B.) .— *Asymptotique automatique et fonctions génératrices*, Thèse École Polytechnique, 1991.

[SaS] SALVY (B.) et SHACKELL (J.) .— *Asymptotic expansions of functional inverses*, Proceedings ISSAC'92, P. Wang éd., ACM Press, 1992.

[S1] SHACKELL (J.) .— *Extensions of asymptotics fields via meromorphic functions*, Journal of London Mathematical Society (2) **52**, n° 2 (1995), pp. 356-374.

[S2] SHACKELL (J.) .— *Limits of Liouvillian functions*, Proceedings of the London Mathematical Society (3) **72**, n° 1 (1996), pp. 124-156.