ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

ALAIN PRIGNET

Conditions aux limites non homogènes pour des problèmes elliptiques avec second membre mesure

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 6, nº 2 (1997), p. 297-318

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1997_6_6_2_297_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VI, n° 2, 1997

Conditions aux limites non homogènes pour des problèmes elliptiques avec second membre mesure[*]

ALAIN PRIGNET[1]

RÉSUMÉ. — Pour Ω ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, on étudie le problème elliptique

$$-\operatorname{div}\bigl(A(x,u,\nabla u)\bigr) = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

où f est une mesure de Radon, et nous montrons l'existence d'une solution vérifiant des conditions aux limites non homogènes de Neumann, Fourier et Dirichlet.

ABSTRACT. — For Ω a smooth open bounded set of $\mathbb{R}^N$, we study the elliptic problem

$$-\operatorname{div}\bigl(A(x,u,\nabla u)\bigr) = f \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega)$$

where f is a Radon measure, and we show existence of a solution verifying non homogenous boundary conditions of Neumann, Fourier and Dirichlet.

1. Introduction

Pour Ω ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ avec $N \geq 2$, on étudie le problème elliptique

$$-\operatorname{div}\bigl(A(x,u,\nabla u)\bigr) = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

avec $f \in M(\overline{\Omega})$, l'espace des mesures de Radon ($M(\overline{\Omega}) = \bigl(C(\overline{\Omega})\bigr)'$ est le dual de l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ muni de sa norme habituelle) et avec des conditions aux limites non homogènes de Neumann, Fourier et Dirichlet.

(*) Reçu le 14 mars 1995

(1) UMPA ENS-Lyon, 46 allée d'Italie, F-69364 Lyon Cedex 07 (France)

Ce problème a été étudié dans le cas de conditions homogènes de Dirichlet par Boccardo et Gallouët dans [2] et [3], où il est montré l'existence d'une solution. Cependant il n'y a pas unicité comme le montre le contre-exemple de Serrin ([11], [10]). Pour y remédier des solutions *entropiques* [1] et *renormalisées* ([8], [9]) ont été introduites dans le cas où $f \in L^1(\Omega)$. Nous ne montrerons donc ici que l'existence d'une solution pour un second membre mesure.

Le principe de la démonstration consiste à construire les solutions de problèmes approchés puis à considérer la limite de ces solutions. Pour cela, on régularise le second membre et les conditions aux limites. Nous nous appuierons sur les démonstrations de [4] et [3] pour les étapes 1 et sur celle de [1], [6] et [5] pour les étapes 2.

Donnons les hypothèses sur A, opérateur de Leray-Lions, nous les appellerons (H) par la suite : A est une fonction de Carathéodory, c'est-à-dire que :

- $A(x,s,\xi) : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est mesurable en $x \in \Omega$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $\xi \in \mathbb{R}^N$ et continue en $\xi \in \mathbb{R}^N$ et $s \in \mathbb{R}$ pour presque tout $x \in \Omega$. Nous noterons

$$A(x,u,\nabla u) = A\big(x, u(x), \nabla u(x)\big) \ ;$$

A vérifie aussi des conditions de coercivité, monotonie et croissance : il existe p vérifiant $2 - 1/N < p \leq N$ et :

- il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout s et ξ et presque tout x, on ait

$$A(x,s,\xi)\xi \geq \alpha \left|\xi\right|^p \ ;$$

- pour tout s, ξ et η et presque tout x, on a

$$\big(A(x,s,\xi) - A(x,s,\eta)\big)(\xi - \eta) > 0 \quad \text{pour } \xi \neq \eta \ ;$$

- il existe $b(x) \in L^{p'}(\Omega)$, $p' = p/(p-1)$, et $\beta > 0$ tels que pour tout s et ξ et presque tout x, on ait

$$\left|A(x,s,\xi)\right| \leq \beta\Big(b(x) + \left|s\right|^{p-1} + \left|\xi\right|^{p-1}\Big) \ .$$

Ces hypothèses sont classiques pour l'étude des opérateurs non linéaires sous forme divergentielle (voir Leray–Lions [7]).

Pour $k > 0$, nous utiliserons la fonction "tronquante" $T_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $T_k(x) = \min\big(k, \max(x, -k)\big)$. Cette fonction étant lipschitzienne, si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on a $T_k(u) \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, cette dernière fonction pourra donc servir de fonction test.

Nous noterons C toute constante indépendante de n, indice des suites qui interviendront par la suite.

2. Conditions aux limites de Neumann

Le problème de Neumann consiste à chercher u telle que

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\big(A(x,u,\nabla u)\big) = f \quad &\text{dans } \Omega \\ A(x,u,\nabla u)\cdot n = g \quad &\text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.1}$$

avec $f \in M(\overline{\Omega})$ et $g \in M(\partial\Omega)$, où n désigne, ici, la normale à $\partial\Omega$. On résoudra (2.1) au sens faible suivant : on cherche

$$u \in \bigcap_{q<(p-1)N/(N-1)} W^{1,q}(\Omega)$$

tel que

$$\forall\, \varphi \in \bigcup_{r>N} W^{1,r}(\Omega)\,, \qquad \int_\Omega A(x,u,\nabla u)\,\nabla\varphi = \int_{\partial\Omega} \varphi\,\mathrm{d}g + \int_\Omega \varphi\,\mathrm{d}f\,.$$

où l'on note encore φ, la trace de φ sur $\partial\Omega$, ce que nous ferons désormais.

Bien entendu, si ce problème admet une solution, le choix $\varphi \equiv 1$ impose

$$\int_{\partial\Omega} \mathrm{d}g + \int_\Omega \mathrm{d}f = 0\,, \tag{2.2}$$

ce que nous allons supposer. Ce problème admet alors, en particulier, une infinité de solutions : plus précisément, il existe une solution de moyenne C, pour toute constante C. Aussi cherche-t-on les solutions à moyenne donnée.

THÉORÈME .— *Soient $f \in M(\overline{\Omega})$ (ne chargeant pas le bord), $g \in M(\partial\Omega)$, vérifiant (2.2), Ω un ouvert borné régulier, A vérifiant les hypothèses (H) et soit $\widetilde{u} \in \mathbb{R}$, alors le problème (2.1) admet une solution de moyenne $\widetilde{u}$.*

Démonstration. — Soient

$$(f_n) \in W^{-1,p'}(\Omega) \cap L^1(\Omega) \quad \text{et} \quad (g_n) \in \left(W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)\right)' \cap L^1(\partial\Omega)$$

tels que

$$\|f_n\|_{L^1} \leq \|f\|_{M(\overline{\Omega})}, \quad \|g_n\|_{L^1} \leq \|g\|_{M(\partial\Omega)}$$

et $f_n \rightharpoonup f$ dans $M(\overline{\Omega})$ $*$-faible et $g_n \rightharpoonup g$ dans $M(\partial\Omega)$ $*$-faible tels que

$$\int_{\partial\Omega} g_n + \int_\Omega f_n = 0\,.$$

Soit $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ une solution de (2.1), avec $f = f_n$ et $g = g_n$, telle que

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_n = \widetilde{u} \in \mathbb{R}$$

(son existence est donnée par Leray et Lions [7]) ; elle vérifie

$$\forall\ \varphi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)\,, \quad \int_\Omega A(x, u_n, \nabla u_n)\nabla\varphi = \int_{\partial\Omega} \varphi g_n + \int_\Omega \varphi f_n\,. \tag{2.3}$$

Étape 1

Montrons que u_n est borné dans $W^{1,q}(\Omega)$ pour $q < (p-1)N/(N-1)$, ce qui donnera l'existence de $u \in W^{1,q}(\Omega)$ tel qu'une sous-suite de u_n converge vers u dans $W^{1,q}(\Omega)$ faible.

Pour $m > 0$ donné, soit

$$\psi_m(x) = \begin{cases} m\displaystyle\int_0^x \mathrm{d}t/(t+1)^{m+1} & \text{pour } x \geq 0 \\ -\psi_m(-x) & \text{pour } x \leq 0, \end{cases}$$

on a $|\psi_m| \leq 1$, $|\psi'_m| \leq m$ et ψ_m continue. Alors $\psi_m(u_n) \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, il est donc possible de choisir $\varphi = \psi_m(u_n)$ dans (2.3) qui devient

$$\int_\Omega A(x, u_n, \nabla u_n)\nabla\psi_m(u_n) = \int_{\partial\Omega} \psi_m(u_n) g_n + \int_\Omega \psi_m(u_n) f_n\ ;$$

or $\nabla\psi_m(u_n) = \psi'_m(u_n)\nabla u_n$ donc par coercitivité

$$\alpha\int_\Omega |\nabla u_n|^p \psi'_m(u_n) \leq \|f_n\|_{L^1} + \|g_n\|_{L^1}$$

et $\psi'_m(x) = m/\big(|x|+1\big)^{m+1}$ donc

$$\alpha \int_\Omega m \frac{|\nabla u_n|^p}{\big(|u_n|+1\big)^{m+1}} \leq C \,;$$

grâce à l'inégalité de Hölder, nous obtenons pour $q < p$:

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^q \leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{\big(|u_n|+1\big)^{m+1}}\right)^{q/p} \left(\int_\Omega \big(|u_n|+1\big)^{(m+1)q/(p-q)}\right)^{(p-q)/p}.$$

Choisissons alors $m > 0$ tel que $(m+1)q/(p-q) < q^*$, $1/q^* = 1/q - 1/N$, ce qui est possible pour $q < (p-1)N/(N-1)$, alors

$$\big(|u_n|+1\big)^{(m+1)q/(p-q)} \leq \varepsilon |u_n|^{q^*} + C(\varepsilon)$$

pour $\varepsilon > 0$ petit, où $C(\varepsilon)$ dépend de ε, on obtient donc

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^q \leq C\varepsilon^{(p-q)/p} \left(\int_\Omega |u_n|^{q^*}\right)^{(p-q)/p} + C\,. \tag{2.4}$$

Or la moyenne de u_n est $\widetilde{u}$, donc l'inégalité de Poincaré–Sobolev nous donne

$$\|u_n - \widetilde{u}\|_{L^{q^*}} \leq C \|\nabla u_n\|_{L^q}$$

soit

$$\|u_n\|_{L^{q^*}} \leq C\|\nabla u_n\|_{L^q} + |\widetilde{u}|\big(\mathrm{mes}(\Omega)\big)^{1/q^*}$$

d'où grâce à (2.4)

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega |u_n|^{q^*}\right)^{1/q^*} &\leq C\varepsilon^{(p-q)/pq} \left(\int_\Omega |u_n|^{q^*}\right)^{(p-q)/pq} + C \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\int_\Omega |u_n|^{q^*}\right)^{(p-q)/pq} + C\end{aligned}$$

pour ε assez petit. Or $(p-q)/pq \leq 1/q^*$ pour $p \leq N$ donc $\|u_n\|_{L^{q^*}} \leq C$ et donc, grâce à (2.4), $\int_\Omega |\nabla u_n|^q \leq C$. Ainsi u_n est bornée dans $W^{1,q}(\Omega)$ pour tout $q < (p-1)N/(N-1)$; il est donc possible d'extraire de u_n une sous-suite convergeant faiblement dans $W^{1,q}(\Omega)$.

Étape 2

Afin de passer à la limite dans $A(x, u_n, \nabla u_n)$, la convergence presque partout de u_n et ∇u_n est nécessaire. Celle de u_n s'obtient par extraction d'une sous-suite car u_n converge dans $L^q(\Omega)$ (théorème de Rellich), mais il faut montrer le résultat pour ∇u_n.

Pour cela, montrons que ∇u_n tend vers ∇u en mesure, ce qui entraînera $\nabla u_n \to \nabla u$ presque partout, pour une sous-suite. Cela consiste à montrer que

$$\forall\, \delta\,,\ \forall\, \varepsilon\,,\ \exists\, n_0 \text{ tel que } \forall\, n \geq n_0\,, \quad \operatorname{mes}\bigl\{x,\ \bigl|(\nabla u_n - \nabla u)(x)\bigr| \geq \delta\bigr\} \leq \varepsilon\,;$$

remarquons que pour $k > 0$ et $\eta > 0$, on a

$$\begin{aligned}
&\bigl\{\bigl|(\nabla u_n - \nabla u)(x)\bigr| \geq \delta\bigr\} \subset \\
&\quad \subset \bigl\{|u_n| \geq k\bigr\} \cup \bigl\{|u| \geq k\bigr\} \cup \bigl\{|\nabla u_n| \geq k\bigr\} \cup \\
&\qquad \cup \bigl\{|\nabla u| \geq k\bigr\} \cup \cup \bigl\{|u_n - u| \geq \eta\bigr\} \cup \\
&\qquad \cup \bigl\{\bigl|(\nabla u_n - \nabla u)(x)\bigr| \geq \delta\,,\ |u_n| \leq k\,,\ |u| \leq k\,,\ |\nabla u_n| \leq k\,, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad |\nabla u| \leq k\,,\ |u_n - u| \leq \eta\bigr\}\ ;
\end{aligned}$$

nous appellerons A_1 à A_6 les six ensembles du membre de droite. On pourra remarquer, dans la suite de la démonstration, que seule la majoration de la mesure de A_6 fait intervenir (2.3), l'équation dont u_n est solution.

Majorons $\operatorname{mes}(A_1)$, nous avons

$$\int_\Omega |u_n| \geq \int_{A_1} |u_n| \geq k \operatorname{mes}(A_1)$$

donc

$$\operatorname{mes}(A_1) \leq \frac{1}{k} \int_\Omega |u_n| \leq \frac{C}{k} \leq \varepsilon$$

pour k assez grand, puisque u_n est borné dans $W^{1,q}(\Omega)$ pour $q < (p-1)N/(N-1)$ et donc dans $L^1(\Omega)$. De même, ∇u_n est borné dans $L^1(\Omega)$ et $u \in W^{1,q}(\Omega) \subset W^{1,1}(\Omega)$, donc les mesures de A_2, A_3 et A_4 sont majorées de la même façon. Fixons k tel que chacune des mesures soit plus petite que ε.

Majorons maintenant $\operatorname{mes}(A_5)$, nous avons

$$\int_\Omega \big|(u_n - u)\big| \geq \int_{A_5} \big|(u_n - u)\big| \geq \eta \operatorname{mes}(A_5)\ ;$$

or u_n converge vers u dans $L^1(\Omega)$ grâce au théorème de Rellich donc, pour η donné, il existe n_1 tel que pour $n \geq n_1$ on ait

$$\operatorname{mes}(A_5) \leq \varepsilon\,.$$

Il reste donc à majorer $\operatorname{mes}(A_6)$ et à choisir η. Grâce à la monotonie de A, nous avons

$$\big(A(x,s,\xi_1) - A(x,s,\xi_2)\big)(\xi_1 - \xi_2) > 0 \quad \text{pour } \xi_1 - \xi_2 \neq 0\ ;$$

or l'ensemble des (s,ξ_1,ξ_2) tels que $|s| \leq k$, $|\xi_1| \leq k$, $|\xi_2| \leq k$ et $|\xi_1 - \xi_2| \geq \delta$ est compact et A est continue en (s,ξ) pour presque tout x, donc $\big[A(x,s,\xi_1) - A(x,s,\xi_2)\big](\xi_1 - \xi_2)$ atteint sur ce compact son minimum que nous noterons $\gamma(x)$, qui vérifie $\gamma(x) > 0$ presque partout. De plus grâce à un résultat d'intégration, il existe $\varepsilon' > 0$ tel que

$$\int_{A_6} \gamma \leq \varepsilon' \Longrightarrow \operatorname{mes}(A_6) \leq \varepsilon\ ;$$

il suffit donc de montrer que $\int_{A_6} \gamma \leq \varepsilon'$. Par définition de γ, nous avons

$$\int_{A_6} \gamma \leq$$
$$\int_{A_6} \big(A(x,u_n,\nabla u_n) - A\big(x,u_n,\nabla T_k(u)\big)\big)\,\big(\nabla u_n - \nabla T_k(u)\big)\mathbf{1}_{\{|u_n - T_k(u)| \leq \eta\}}$$

car sur A_6, $\big|u_n - T_k(u)\big| = |u_n - u| \leq \eta$. De plus, le terme intégré est positif et

$$\nabla T_\eta\big(u_n - T_k(u)\big) = \big(\nabla u_n - \nabla T_k(u)\big)\mathbf{1}_{\{|u_n - T_k(u)| \leq \eta\}}\ ;$$

nous avons donc

$$\begin{aligned}
\int_{A_6} \gamma &\leq \int_\Omega \big(A(x,u_n,\nabla u_n) - A\big(x,u_n,\nabla T_k(u)\big)\big)\,\nabla T_\eta\big(u_n - T_k(u)\big)\\
&\leq \int_\Omega A(x,u_n,\nabla u_n)\nabla T_\eta\big(u_n - T_k(u)\big)\\
&\quad - \int_\Omega A\big(x,u_n,\nabla T_k(u)\big)\nabla T_\eta\big(u_n - T_k(u)\big)
\end{aligned}$$

et, si l'on choisit $\varphi = T_\eta\big(u_n - T_k(u)\big) \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ dans (2.3), on obtient

$$\left| \int_\Omega A(x, u_n, \nabla u_n) \nabla T_\eta\big(u_n - T_k(u)\big) \right| \leq \eta\big(\|f_n\|_{L^1} + \|g_n\|_{L^1}\big) \leq \eta C\,.$$

Il reste donc à majorer l'autre intégrale : pour $|u_n| \geq k + \eta$, on a $|u_n - T_k(u)| \geq \eta$ d'où $\nabla T_\eta\big(u_n - T_k(u)\big) = 0$ si bien que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega A\big(x, u_n, \nabla T_k(u)\big) \nabla T_\eta\big(u_n - T_k(u)\big) = \\ &\qquad = \int_\Omega A\big(x, T_{k+\eta}(u_n), \nabla T_k(u)\big) \nabla T_\eta\big(T_{k+\eta}(u_n) - T_k(u)\big)\,. \end{aligned}$$

Soit $h > 0$; choisissons maintenant $\varphi = T_h(u_n) \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ dans (2.3), alors

$$\left| \int_\Omega A(x, u_n, \nabla u_n) \nabla T_h(u_n) \right| \leq h\big(\|f_n\|_{L^1} + \|g_n\|_{L^1}\big) \leq hC$$

et par coercitivité

$$\begin{aligned} \int_\Omega A(x, u_n, \nabla u_n) \nabla T_h(u_n) &= \int_\Omega A(x, u_n, \nabla u_n) \nabla u_n \mathbf{1}_{|u_n| \leq h} \\ &\geq \alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^p \mathbf{1}_{|u_n| \leq h} = \alpha \int_\Omega |\nabla T_h(u_n)|^p\ ; \end{aligned}$$

l'inégalité de Poincaré avec moyenne, nous donne alors

$$\begin{aligned} \|T_h(u_n)\|^p_{W^{1,p}} &\leq C\Big(\int_\Omega |\nabla T_h(u_n)|^p + |\widetilde{u}|^p\Big) \\ &\leq C\Big(\frac{hC}{\alpha} + |\widetilde{u}|^p\Big)\ ; \end{aligned}$$

$T_h(u_n)$ est donc borné dans $W^{1,p}(\Omega)$ pour tout h. Aussi pour $h = k + \eta$, $T_{k+\eta}(u_n)$ tend, à une sous-suite près, vers $T_{k+\eta}(u)$ faiblement dans $W^{1,p}(\Omega)$ et donc fortement dans $L^p(\Omega)$ et presque partout quand $n \to +\infty$. Donc $A\big(x, T_{k+\eta}(u_n), \nabla T_k(u)\big)$ converge p.p. et $\big|A\big(x, T_{k+\eta}(u_n), \nabla T_k(u)\big)\big|^{p'}$ est équi-intégrable, aussi grâce au théorème de Vitali, $A\big(x, T_{k+\eta}(u_n), \nabla T_k(u)\big)$ converge fortement dans $L^{p'}(\Omega)$ vers $A\big(x, T_{k+\eta}(u), \nabla T_k(u)\big)$. Comme $\mathbf{1}_{\{|T_{k+\eta}(u_n) - T_k(u)| \leq \eta\}}$ tend presque partout vers $\mathbf{1}_{\{|T_{k+\eta}(u) - T_k(u)| \leq \eta\}}$ et est borné, le théorème de convergence dominée de Lebesgue donne la convergence forte de

$$A\big(x, T_{k+\eta}(u_n), \nabla T_k(u)\big)\mathbf{1}_{\{|T_{k+\eta}(u_n)-T_k(u)|\le\eta\}}$$

vers

$$A\big(x, T_{k+\eta}(u), \nabla T_k(u)\big)\mathbf{1}_{\{|T_{k+\eta}(u)-T_k(u)|\le\eta\}}$$

dans $L^{p'}(\Omega)$.

Comme $T_{k+\eta}(u_n)$ converge faiblement dans $W^{1,p}(\Omega)$, $\nabla\big(T_{k+\eta}(u_n) - T_k(u)\big)$ converge faiblement vers $\nabla\big(T_{k+\eta}(u) - T_k(u)\big)$ dans $L^p(\Omega)$ pour $n \to +\infty$ donc

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega A\big(x, T_{k+\eta}(u_n), \nabla T_k(u)\big)\nabla T_\eta\big(T_{k+\eta}(u_n) - T_k(u)\big) = \\ = \int_\Omega A\big(x, T_{k+\eta}(u), \nabla T_k(u)\big)\nabla T_\eta\big(T_{k+\eta}(u) - T_k(u)\big)\,.\end{aligned}$$

Or $\nabla T_\eta\big(T_{k+\eta}(u) - T_k(u)\big) \to 0$ p.p. quand $\eta \to 0$, et pour $\eta \le 1$

$$\big|\nabla T_\eta\big(T_{k+\eta}(u) - T_k(u)\big)\big| \le \big|\nabla T_1\big(T_{k+1}(u) - T_k(u)\big)\big| \in L^p(\Omega)$$

et

$$\begin{aligned}&\big|\nabla T_\eta\big(T_{k+\eta}(u) - T_k(u)\big)\big| \le \\ &\qquad \le \beta\Big(b(x) + \big|T_{k+1}(u)\big|^{p-1} + \big|\nabla T_k(u)\big|^{p-1}\Big) \in L^{p'}(\Omega)\,,\end{aligned}$$

donc par convergence dominée, l'intégrale du second membre tend vers 0 pour $\eta \to 0$.

Fixons $\eta < \varepsilon'/2C$ tel que

$$\left|\int_\Omega A\big(x, T_{k+\eta}(u), \nabla T_k(u)\big)\nabla T_\eta\big(T_{k+\eta}(u) - T_k(u)\big)\right| \le \frac{\varepsilon'}{4}\,,$$

soit alors n_2 tel que pour tout $n \ge n_2$

$$\begin{aligned}\bigg|\int_\Omega & A\big(x, T_{k+\eta}(u_n), \nabla T_k(u)\big)\nabla T_\eta\big(T_{k+\eta}(u_n) - T_k(u)\big) + \\ & - \int_\Omega A\big(x, T_{k+\eta}(u), \nabla T_k(u)\big)\nabla T_\eta\big(T_{k+\eta}(u) - T_k(u)\big)\bigg| \le \frac{\varepsilon'}{4}\,.\end{aligned}$$

Comme $\nabla T_\eta(T_{k+\eta}(u_n) - T_k(u)) = \nabla T_\eta(u_n - T_k(u))$, on obtient

$$\left| \int_\Omega A(x, u_n, \nabla T_k(u)) \nabla T_\eta(u_n - T_k(u)) \right| \le \frac{\varepsilon'}{4},$$

alors

$$\int_{A_6} \gamma \le C \frac{\varepsilon'}{2C} + \frac{\varepsilon'}{2} = \varepsilon' ;$$

le choix de ε' entraîne donc

$$\operatorname{mes}(A_6) \le \varepsilon .$$

Ainsi η étant fixé, les majorations de $\operatorname{mes}(A_5)$ et de $\operatorname{mes}(A_6)$ nous donnent n_1 et n_2 tels que pour $n \ge \max(n_1, n_2)$ on ait

$$\operatorname{mes}\big(\{ |\nabla u_n - \nabla u_m(x)| \ge \delta \}\big) \le 6\varepsilon .$$

La convergence en mesure est donc démontrée.

Étape 3

Montrons que u est solution de (2.1). Soit $\varphi \in W^{1,r}(\Omega)$ avec $r > N$, alors $\varphi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ donc, par définition de u_n,

$$\int_\Omega A(x, u_n, \nabla u_n) \nabla \varphi = \int_{\partial\Omega} \varphi g_n + \int_\Omega \varphi f_n .$$

Comme f_n et g_n convergent dans $M(\overline{\Omega})$ $*$-faible et $M(\partial\Omega)$ $*$-faible respectivement et que $\varphi \in W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, $\int_{\partial\Omega} \varphi g_n + \int_\Omega \varphi f_n$ converge vers $\int_{\partial\Omega} \varphi \,\mathrm{d}g + \int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}f$. Or nous avons vu que u_n et ∇u_n sont bornés dans $L^q(\Omega)$ pour $q < (p-1)N/(N-1)$; la condition de croissance sur A entraîne donc que $A(x, u_n, \nabla u_n)$ est borné dans $L^q(\Omega)$ pour $q < N/(N-1)$. Soit $s < q$; l'inégalité de Hölder nous donne alors pour E mesurable

$$\begin{aligned}
&\int_E |A(x, u_n, \nabla u_n) - A(x, u, \nabla u)|^s \le \\
&\le \left(\int_\Omega |A(x, u_n, \nabla u_n) - A(x, u, \nabla u)|^q \right)^{s/q} \left(\int_\Omega \mathbf{1}_E \right)^{1-s/q} \\
&\le C \operatorname{mes}(E) .
\end{aligned}$$

Ainsi $\left|A(x,u_n,\nabla u_n)-A(x,u,\nabla u)\right|^s$ est équi-intégrable et converge presque partout vers 0, donc converge dans $L^1(\Omega)$, grâce au théorème de Vitali, et donc $A(x,u_n,\nabla u_n)\to A(x,u,\nabla u)$ dans $L^s(\Omega)$ pour $s<N/(N-1)$; ainsi

$$\int_\Omega A(x,u_n,\nabla u_n)\nabla\varphi \longrightarrow \int_\Omega A(x,u,\nabla u)\nabla\varphi$$

et donc

$$\forall\ \varphi\in\bigcup_{r>N}W^{1,r}(\Omega)\,,\quad \int_\Omega A(x,u,\nabla u)\nabla\varphi=\int_{\partial\Omega}\varphi\,\mathrm{d}g+\int_\Omega\varphi\,\mathrm{d}f\,.$$

Remarquons que ∇u_n est borné dans $W^{1,q}(\Omega)$ pour $q<(p-1)N/(N-1)$. Aussi de la même façon que ci-dessus, nous pouvons montrer que $\left|\nabla(u_n-u)\right|^q$ est équi-intégrable et converge presque partout et donc, grâce au théorème de Vitali, que $\nabla u_n\to\nabla u$ dans $L^q(\Omega)$ pour $q<(p-1)N/(N-1)$.

3. Conditions aux limites de Fourier

Le problème de Fourier consiste à chercher u telle que

$$\begin{aligned}-\operatorname{div}\bigl(A(x,u,\nabla u)\bigr)&=f\quad\text{dans }\Omega\\ A(x,u,\nabla u)\cdot n+\lambda u&=g\quad\text{sur }\partial\Omega\end{aligned}\tag{3.1}$$

avec $f\in M(\overline{\Omega})$, $g\in M(\partial\Omega)$ et $\lambda>0$. On résoudra (3.1) au sens faible suivant : on cherche

$$u\in\bigcap_{q<(p-1)N/(N-1)}W^{1,q}(\Omega)$$

tel que

$$\forall\ \varphi\in\bigcup_{r>N}W^{1,r}(\Omega)\,,\quad \int_\Omega A(x,u,\nabla u)\nabla\varphi+\lambda\int_{\partial\Omega}u\varphi=\int_{\partial\Omega}\varphi\,\mathrm{d}g+\int_\Omega\varphi\,\mathrm{d}f\,.$$

THÉORÈME .— *Soient $f\in M(\overline{\Omega})$ (ne chargeant pas le bord), $g\in M(\partial\Omega)$, Ω un ouvert borné régulier, et soit A vérifiant les hypothèses (H), alors le problème (3.1) admet une solution.*

Avant de démontrer ce résultat rappelons une inégalité de type Poincaré et une inégalité de type Poincaré–Sobolev (que nous démontrerons par souci de clarté).

LEMME .— *Il existe $C_1 > 0$ tel que pour tout $u \in W^{1,1}(\Omega)$ on ait*

$$\int_\Omega |u| \leq C_1 \left(\int_\Omega |\nabla u| + \int_{\partial\Omega} |u| \right)$$

et il existe C_2 tel que pour tout $u \in W^{1,q}(\Omega)$, $1 < q < N$, on ait

$$\left(\int_\Omega |u|^{q^*} \right)^{q/q^*} \leq C_2 \left(\left(\int_{\partial\Omega} |u| \right)^q + \int_\Omega |\nabla u|^q \right) .$$

Démonstration du lemme.— Montrons la première inégalité par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite (u_n) telle que $\int_\Omega |u_n| = |\Omega|$ et $\int_\Omega |\nabla u_n| + \int_{\partial\Omega} |u_n| \to 0$; appliquons alors l'inégalité de Poincaré avec moyenne

$$\int_\Omega |u_n - 1| \leq C \int_\Omega |\nabla u_n| \longrightarrow 0$$

donc $u_n \to 1$ dans $L^1(\Omega)$ et dans $W^{1,1}(\Omega)$; or $\int_{\partial\Omega} 1 \neq 0$ et l'application trace est continue, il y a donc une contradiction.

Montrons maintenant la seconde inégalité. Soit $q \geq 1$; alors, d'après les inégalités de Poincaré avec moyenne et de Sobolev, il existe $C > 0$ tel que pour $u \in W^{1,q}(\Omega)$ avec $\int_\Omega u = \tilde{u}|\Omega|$, on ait

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^{q^*}} \leq C \|\nabla u\|_{L^q}$$

soit

$$\int_\Omega |u|^{q^*} \leq C \int_\Omega |\tilde{u}|^{q^*} + \left(\int_\Omega |\nabla u|^q \right)^{q^*/q} ;$$

or

$$\int_\Omega |\tilde{u}|^{q^*} = |\tilde{u}|^{q^*} |\Omega| \quad \text{et} \quad |\tilde{u}|^{q^*} |\Omega|^{q^*} \leq \left(\int_\Omega |u| \right)^{q^*}$$

donc

$$\int_\Omega |\tilde{u}|^{q^*} = C \left(\int_\Omega |u| \right)^{q^*}$$

d'où

$$\int_\Omega |u|^{q^*} \leq C \left(\int_\Omega |u| \right)^{q^*} + \left(\int_\Omega |\nabla u|^q \right)^{q^*/q} .$$

Appliquons alors le lemme puisque $u \in W^{1,1}$

$$\int_\Omega |u| \leq C \left(\int_\Omega |\nabla u| + \int_{\partial\Omega} |u| \right)$$

et

$$\int_\Omega |\nabla u| \leq C \left(\int_\Omega |\nabla u|^q \right)^{1/q} \quad \text{(inégalité de Hölder)}$$

donc

$$\int_\Omega |u|^{q^*} \leq C \left(\left(\int_{\partial\Omega} |u| \right)^{q^*} + \left(\int_\Omega |\nabla u|^q \right) \right)^{q^*/q} ;$$

ce résultat nous donne

$$\left(\int_\Omega |u|^{q^*} \right)^{q/q^*} \leq C \left(\left(\int_{\partial\Omega} |u| \right)^q + \int_\Omega |\nabla u|^q \right)$$

qui est bien l'inégalité demandée. □

Démonstration du théorème.— Soient $(f_n) \in W^{-1,p'}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ et $(g_n) \in \left(W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)\right)' \cap L^1(\partial\Omega)$ tels que

$$\|f_n\|_{L^1} \leq \|f\|_{M(\overline{\Omega})} \quad \text{et} \quad \|g_n\|_{L^1} \leq \|g\|_{M(\partial\Omega)} ,$$

$f_n \rightharpoonup f$ dans $M(\overline{\Omega})$ $*$-faible et $g_n \rightharpoonup g$ dans $M(\partial\Omega)$ $*$-faible. Soit $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ une solution de (3.1) avec $f = f_n$ et $g = g_n$ (Leray–Lions [7]). Elle vérifie

$$\begin{aligned} &\forall\, \varphi \in W^{1,p} \cap L^\infty(\Omega) , \\ &\int_\Omega A(x, u_n, \nabla u_n) \nabla \varphi + \lambda \int_{\partial\Omega} u_n \varphi = \int_{\partial\Omega} \varphi g_n + \int_\Omega \varphi f_n . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Étape 1

Montrons que u_n est borné dans $W^{1,q}(\Omega)$ pour $q < (p-1)N/(N-1)$. La méthode est la même que pour les conditions de Neumann, mais l'inégalité de Poincaré–Sobolev que nous venons de démontrer fait intervenir $\int_{\partial\Omega} |u_n|$.

Il nous faut donc une estimation de cette intégrale. Comme $T_k(u_n) \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, nous pouvons choisir $\varphi = T_k(u_n)$ dans (3.2), ce qui donne

$$\int_\Omega A(x, u_n, \nabla u_n)\nabla u_n T_k'(u_n) + \lambda \int_{\partial\Omega} u_n T_k(u_n) = \\ = \int_{\partial\Omega} T_k(u_n) g_n + \int_\Omega T_k(u_n) f_n \,.$$

Or $A(x, u_n, \nabla u_n)\nabla u_n \geq 0$, $T_k'(x) \geq 0$ et $|T_k| \leq k$. Donc

$$\lambda \int_{\partial\Omega} u_n T_k(u_n) \leq k \left(\|g_n\|_{L^1} + \|f_n\|_{L^1}\right)$$

soit

$$\lambda \int_{\partial\Omega} u_n \frac{1}{k} T_k(u_n) \leq C \,.$$

Or $\lim_{k\to 0} xT_k(x)/k = |x|$ pour $x \neq 0$. Donc en passant à la limite pour $k \to 0$ (par convergence dominée), on a

$$\int_{\partial\Omega} |u_n| \leq \frac{C}{\lambda} \,. \tag{3.3}$$

Comme pour les conditions de Neumann, choisissons $\varphi = \psi_m(u_n)$ dans (3.2). Or $\lambda > 0$ et $x\psi_m(x) \geq 0$ donc $\lambda \int_{\partial\Omega} u_n \psi_m(u_n) \geq 0$. Nous obtenons alors

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^p \psi_m'(u_n) \leq \|f_n\|_{L^1} + \|g_n\|_{L^1} \,.$$

Comme dans le cas de Neumann, on peut montrer que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^q \leq C\varepsilon^{(p-q)/p} \left(\int_\Omega |u_n|^{q^*}\right)^{(p-q)/p} + C \,;$$

donc, grâce au lemme, à (3.3) et pour ε petit, on a

$$\left(\int_\Omega |u_n|^{q^*}\right)^{1/q^*} \leq \frac{1}{2} \left(\int_\Omega |u_n|^{q^*}\right)^{(p-q)/pq} + C + \frac{C}{\lambda} \,;$$

on conclut de la même façon que pour les conditions de Neumann.

Étape 2

Il faut ici aussi montrer la convergence presque partout de ∇u_n. On procède comme précédemment : on construit de même A_1 à A_6 et seule la majoration de mes(A_6) fait intervenir (3.2), les autres majorations s'appliquent de façon identique. Pour celle de A_6, on peut remarquer que si l'on choisit $\varphi = T_\eta(u_n - T_k(u))$ dans (3.2) on obtient

$$\int_\Omega A(x,u_n,\nabla u_n)\nabla T_\eta(u_n - T_k(u)) + \lambda \int_\Omega u_n T_\eta(u_n - T_k(u)) =$$
$$= \int_\Omega f_n T_\eta(u_n - T_k(u)) + \int_{\partial\Omega} g_n T_\eta(u_n - T_k(u)) .$$

Notons le second membre $C_{\eta,n}$, nous obtenons alors

$$\int_\Omega \left(A(x,u_n,\nabla u_n) - A(x,u_n,\nabla T_k(u))\right) \nabla T_\eta(u_n - T_k(u)) +$$
$$+ \lambda \int_\Omega (u_n - T_k(u))\, T_\eta(u_n - T_k(u))$$
$$= C_{\eta,n} + \lambda \int_\Omega T_k(u)\, T_\eta(u_n - T_k(u)) +$$
$$- \int_\Omega A(x,u_n,\nabla T_k(u))\, \nabla T_\eta(u_n - T_k(u)) .$$

De plus, nous avons $(u_n - T_k(u))\, T_\eta(u_n - T_k(u)) \geq 0$, $|C_{\eta,n}| \leq \eta C$ et $\left|\int_\Omega T_k(u)\, T_\eta(u_n - T_k(u))\right| \leq k\eta C$, donc

$$\int_\Omega \left(A(x,u_n,\nabla u_n) - A(x,u_n,\nabla T_k(u))\right) \nabla T_\eta(u_n - T_k(u)) \leq$$
$$\leq \eta C(1+\lambda k) + \left|\int_\Omega A(x,u_n,\nabla T_k(u))\, \nabla T_\eta(u_n - T_k(u))\right|$$

où k a été fixé pour que les mesures de A_1 à A_4 soient inférieures à ε.

Si l'on choisit $\varphi = T_h(u_n)$ dans (3.2), comme $u_n T_h(u_n) \geq 0$, on obtient

$$\int_\Omega A(x,u_n,\nabla u_n)\, \nabla T_h(u_n) \leq hC .$$

Or nous avons vu que $\int_{\partial\Omega} |u_n|$ est borné, donc $\int_{\partial\Omega} T_k(u_n)$ l'est aussi. On peut donc, grâce au lemme, démontrer comme précédemment que $T_h(u_n)$ est borné dans $W^{1,p}(\Omega)$ et on peut choisir $\eta < \varepsilon'/2C(1+\lambda k)$ tel que

$$\left|\int_\Omega A(x,u_n,\nabla T_k(u))\, \nabla T_\eta(u_n - T_k(u))\right| \leq \frac{\varepsilon'}{2}$$

pour n assez grand, alors

$$\int_{A_6} \gamma \leq \int_\Omega \big(A(x,u_n,\nabla u_n) - A(x,u_n,\nabla T_k(u))\big)\,\nabla T_\eta\big(u_n - T_k(u)\big) \leq \varepsilon'\,,$$

ce qui permet d'achever cette étape de la même façon.

Étape 3

Comme pour les conditions aux limites de Neumann on a, pour $\varphi \in W^{1,r}(\Omega)$ avec $r > N$, les convergences de $\int_\Omega A(x,u_n,\nabla u_n)\nabla\varphi$, $\int_\Omega \varphi f_n$ et $\int_{\partial\Omega} \varphi g_n$; il reste donc à montrer celle de $\int_{\partial\Omega} u_n\varphi$. Comme $u_n \to u$ dans $W^{1,q}(\Omega)$ pour $q < (p-1)N/(N-1)$, la trace de u_n sur $\partial\Omega$ converge vers celle de u dans $W^{1-1/q,q}(\partial\Omega)$ et donc dans $L^q(\partial\Omega)$; comme $\varphi \in W^{1,r}(\Omega)$ pour $r > N$, $\varphi \in C(\overline{\Omega})$ donc $\varphi \in L^\infty(\partial\Omega)$ et on obtient

$$\int_{\partial\Omega} u_n\varphi \longrightarrow \int_{\partial\Omega} u\varphi\,,$$

ce qui permet de conclure que u est solution de (3.1). □

4. Conditions aux limites de Dirichlet

Le problème de Dirichlet consiste à chercher u tel que

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\big(A(x,u,\nabla u)\big) = f &\quad \text{dans } \Omega \\ u = g &\quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \tag{4.1}$$

avec $f \in M(\overline{\Omega})$ et $g \in W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$. On résoudra (4.1) au sens faible suivant : on cherche

$$u \in \bigcap_{q<(p-1)N/(N-1)} W^{1,q}(\Omega)$$

tel que, pour $\widetilde{g} \in W^{1,p}(\Omega)$, un relèvement de g, on ait

$$u - \widetilde{g} \in \bigcap_{q<(p-1)N/(N-1)} W_0^{1,q}(\Omega)$$

et

$$\forall\, \varphi \in \bigcup_{r>N} W_0^{1,r}(\Omega)\,, \quad \int_\Omega A(x,u,\nabla u)\,\nabla\varphi = \int_\Omega \varphi\,\mathrm{d}f\,.$$

THÉORÈME .— *Soient $f \in M(\overline{\Omega})$, $g \in W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$, Ω un ouvert borné régulier, et soit A vérifiant les hypothèses (H), alors le problème (4.1) admet une solution.*

Démonstration.— Soient $(f_n) \in W^{-1,p'}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ tel que $\|f_n\|_{L^1} \leq \|f\|_{M(\overline{\Omega})}$ et $f_n \rightharpoonup f$ dans $M(\overline{\Omega})$ $*$-faible. Soit $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ une solution de (4.1) avec $f = f_n$ (Leray–Lions [7]), elle vérifie

$$\forall\, \varphi \in W_0^{1,r} \cap L^\infty(\Omega)\,, \quad \int_\Omega A(x, u_n, \nabla u_n)\, \nabla\varphi = \int_\Omega \varphi f_n\,, \tag{4.2}$$

et $u_n - \widetilde{g} \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Étape 1

Nous montrons, là encore, que u_n est borné dans $W^{1,q}(\Omega)$ pour $q < (p-1)N/(N-1)$. La démonstration ne peut pas être faite ici avec $\varphi = \psi_m(u_n - \widetilde{g})$; aussi, nous allons adopter une variante de la démonstration correspondant aux conditions aux limites de Neumann.

Soit $k \in \mathbb{N}$; choisissons $\varphi = T_k(u_n - \widetilde{g}) \in W_0^{1,p} \cap L^\infty(\Omega)$, alors

$$\int_\Omega A(x, u_n, \nabla u_n)\, \nabla(u_n - \widetilde{g})\mathbf{1}_{\{|u_n - \widetilde{g}| \leq k\}} = \int_\Omega T_k(u_n - \widetilde{g}) f_n$$

donc

$$\int_\Omega A(x, u_n, \nabla u_n)\, \nabla u_n \mathbf{1}_{\{|u_n - \widetilde{g}| \leq k\}} =$$

$$= \int_\Omega T_k(u_n - \widetilde{g}) f_n + \int_\Omega A(x, u_n, \nabla u_n)\, \nabla\widetilde{g}\mathbf{1}_{\{|u_n - \widetilde{g}| \leq k\}}\,;$$

nous avons, par coercivité et avec la condition de croissance de A,

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^p \mathbf{1}_{\{|u_n - \widetilde{g}| \leq k\}} \leq$$

$$\leq k\|f_n\|_{L^1} + \beta \int_\Omega \left(b(x) + |u_n|^{p-1} + |\nabla(u_n)|^{p-1}\right) |\nabla\widetilde{g}|\mathbf{1}_{\{|u_n - \widetilde{g}| \leq k\}}$$

et, grâce à l'inégalité de Hölder,

$$\int_\Omega \left(b(x) + |u_n|^{p-1} + |\nabla u_n|^{p-1}\right) |\nabla\widetilde{g}|\mathbf{1}_{\{|u_n - \widetilde{g}| \leq k\}} \leq$$

$$\leq \|\widetilde{g}\|_{W^{1,p}} \left(\int_\Omega \left(b(x)^{p'} + |u_n|^p + |\nabla u_n|^p\right) \left(\mathbf{1}_{\{|u_n - \widetilde{g}| \leq k\}}\right)\right)^{(p-1)/p}$$

car

$$\left(\mathbf{1}_{\{|u_n-\widetilde{g}|\le k\}}\right)p/(p-1)=\mathbf{1}_{\{|u_n-\widetilde{g}|\le k\}}\,.$$

L'inégalité de Poincaré nous donne, appliquée à $T_k(u_n-\widetilde{g})\in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega |u_n-\widetilde{g}|^p\mathbf{1}_{\{|u_n-\widetilde{g}|\le k\}}\le\int_\Omega |T_k(u_n-\widetilde{g})|^p\le C\int_\Omega |\nabla(u_n-\widetilde{g})|^p\mathbf{1}_{\{|u_n-\widetilde{g}|\le k\}}$$

si bien que

$$\int_\Omega |u_n|^p\mathbf{1}_{\{|u_n-\widetilde{g}|\le k\}}\le C\int_\Omega\left(|\widetilde{g}|^p+|\nabla\widetilde{g}|^p\right)+C\int_\Omega|\nabla u_n|^p\mathbf{1}_{\{|u_n-\widetilde{g}|\le k\}}\ ;$$

alors on a

$$\begin{aligned}\alpha\int_\Omega|\nabla u_n|^p\mathbf{1}_{\{|u_n-\widetilde{g}|\le k\}}&\le\\ &\le k\|f\|_{M(\overline{\Omega})}+\beta C\|\widetilde{g}\|_{W^{1,p'}}\left(\|b\|_{L^{p'}}+(\|\widetilde{g}\|_{W^{1,p}})^{p-1}\right)+\\ &\qquad+2\beta C\|\widetilde{g}\|_{W^{1,p}}\left(\int_\Omega|\nabla u_n|^p\mathbf{1}_{\{|u_n-\widetilde{g}|\le k\}}\right)^{(p-1)/p}\end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{k}\int_\Omega|\nabla u_n|^p\mathbf{1}_{\{|u_n-\widetilde{g}|\le k\}}\le C+C\left(\frac{1}{k}\int_\Omega|\nabla u_n|^p\mathbf{1}_{\{|u_n-\widetilde{g}|\le k\}}\right)^{(p-1)/p}$$

où $(p-1)/p<1$. Donc, il existe C indépendant de n et de k tel que

$$\int_\Omega|\nabla u_n|^p\mathbf{1}_{\{|u_n-\widetilde{g}|\le k\}}\le Ck\,.$$

Or

$$\int_\Omega|\nabla\widetilde{g}|^p\mathbf{1}_{\{|u_n-\widetilde{g}|\le k\}}\le\left(\|\nabla\widetilde{g}\|_{L^p}\right)^p$$

donc

$$\int_\Omega|\nabla(u_n-\widetilde{g})|^p\mathbf{1}_{\{|u_n-\widetilde{g}|\le k\}}\le Ck \tag{4.3}$$

et donc

$$\sum_{\ell=0}^{k-1}\int_\Omega|\nabla(u_n-\widetilde{g})|^p\mathbf{1}_{\{\ell\le|u_n-\widetilde{g}|\le\ell+k\}}\le Ck\,. \tag{4.4}$$

Comme précédemment, il s'agit de majorer

$$\int_\Omega \frac{|\nabla(u_n - \widetilde{g})|^p}{(1+|u_n-\widetilde{g}|)^{m+1}} =$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_\Omega \frac{|\nabla(u_n - \widetilde{g})|^p}{(1+|u_n-\widetilde{g}|)^{m+1}} \mathbf{1}_{\{k\le|u_n-\widetilde{g}|\le k+1\}}$$
$$\le \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{(1+k)^{m+1}} \int_\Omega |\nabla(u_n - \widetilde{g})|^p \mathbf{1}_{\{k\le|u_n-\widetilde{g}|\le k+1\}}\,.$$

Posons

$$a^k = \frac{1}{(1+k)^{m+1}} \quad \text{et} \quad b_k = \int_\Omega |\nabla(u_n - \widetilde{g})|^p \mathbf{1}_{\{k\le|u_n-\widetilde{g}|\le k+1\}}\,,$$

ce qui nous amène à considérer $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k b_k$. Notons $B_k = \sum_{\ell=0}^{k-1} b_\ell$ pour $k \geq 1$ et $B_0 = 0$; alors pour $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k b_k = \sum_{k=0}^{N} a_k(B_{k+1} - B_k) = \sum_{k=0}^{N} a_k B_{k+1} - \sum_{k=0}^{N} a_k B_k$$
$$= \sum_{k=0}^{N} a_k B_{k+1} - \sum_{k=0}^{N} a_{k+1} B_{k+1} + a_{N+1} B_{N+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{N} (a_k - a_{k+1}) B_{k+1} + a_{N+1} B_{N+1}\,.$$

Or (4.4) nous donne $B_k \leq Ck$ donc $\lim_{N\to+\infty} a_{N+1} B_{N+1} = 0$ et

$$0 \le (a_k - a_{k+1}) B_{k+1} \le \frac{Ck}{(1+k)^{m+2}} + \mathrm{o}\left(\frac{k}{(1+k)^{m+2}}\right).$$

Comme $m > 0$, cette série est convergente donc la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k b_k$ est aussi convergente et il existe donc C tel que

$$\int_\Omega \frac{|\nabla(u_n - \widetilde{g})|^p}{(1+|u_n-\widetilde{g}|)^{m+1}} \le \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k b_k \le C\,.$$

Aussi, comme pour les conditions de Neumann, on peut montrer que

$$\int_\Omega |\nabla(u_n - \widetilde{g})|^q \le C\varepsilon^{(p-q)/p} \left(\int_\Omega |u_n - \widetilde{g}|^{q^*}\right)^{(p-q)/p} + C\,.$$

De plus, on a $u_n - \widetilde{g} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ donc l'inégalité de Poincaré–Sobolev nous donne

$$\left(\int_\Omega |u_n - \widetilde{g})|^{q^*}\right)^{q/q^*} \leq C \int_\Omega |\nabla(u_n - \widetilde{g})|^q .$$

Pour ε petit, nous obtenons

$$\left(\int_\Omega |u_n - \widetilde{g})|^{q^*}\right)^{1/q^*} \leq \frac{1}{2}\left(\int_\Omega |u_n - \widetilde{g})|^{q^*}\right)^{(p-q)/pq} + C$$

et, pour $q < (p-1)N/(N-1)$, on conclut de la même façon que précédemment que $u_n - \widetilde{g}$ est borné dans $W_0^{1,q}(\Omega)$; donc u_n est borné dans $W^{1,q}(\Omega)$.

Remarque.— Au cours de cette démonstration, nous avons montré le lemme suivant qui est plus fort que celui qui est utilisé dans [2].

LEMME .— *Soient (v_n) une suite de $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $C > 0$ tels que*

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^p \mathbf{1}_{\{|v_n \leq k\}} \leq Ck$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors $\int_\Omega |\nabla v_n|^q \leq C'$ donc (v_n) est bornée dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ pour tout $q < (p-1)N/(N-1)$.

Étape 2

Il s'agit de montrer la convergence de ∇u_n presque partout ; il suffit, ici encore, de majorer mes(A_6).

Il faut montrer que, pour $h > 0$, $T_h(u_n - \widetilde{g})$ est borné dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Ceci vient presque d'être fait ; en effet, pour $k = h$, (4.3) entraîne $\int_\Omega |\nabla T_h(u_n - \widetilde{g})|^p \leq Ch$ et, d'autre part, $|T_h(u_n - \widetilde{g})| \leq h$; donc, pour h fixé, $T_h(u_n - \widetilde{g})$ est borné dans $W_0^{1,q}(\Omega)$.

Pour majorer mes(A_6), choisissons

$$\varphi = T_\eta\big(u_n - \widetilde{g} - T_k(u - \widetilde{g})\big) \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

dans (4.2), alors

$$\left|\int_\Omega A(x, u_n, \nabla u_n)\, \nabla T_\eta\big(u_n - \widetilde{g} - T_k(u - \widetilde{g})\big)\right| \leq \eta C .$$

De plus, $u_n = u_n - \widetilde{g} + \widetilde{g}$ et $\nabla T_\eta(u_n - \widetilde{g} - T_k(u - \widetilde{g})) = 0$ si $|u_n - \widetilde{g}| \geq k + \eta$ donc

$$\int_\Omega A(x, u_n, \nabla T_k(u))\, \nabla T_\eta(u_n - \widetilde{g} - T_k(u - \widetilde{g})) =$$
$$= \int_\Omega A(x,\, T_{k+\eta}(u_n - \widetilde{g}) + \widetilde{g},\, \nabla T_k(u))\, \nabla T_\eta(T_{k+\eta}(u_n - \widetilde{g}) - T_k(u - \widetilde{g}))\,.$$

Or nous avons montré que $T_h(u_n - \widetilde{g})$ est borné dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ donc

$$\nabla(T_{k+\eta}(u_n - \widetilde{g}) - T_k(u - \widetilde{g}))$$

converge faiblement dans $L^p(\Omega)$ vers

$$\nabla(T_{k+\eta}(u - \widetilde{g}) - T_k(u - \widetilde{g}))\ ;$$

nous pouvons faire le même raisonnement, que celui qui a été fait pour les conditions de Neumann, avec $u_n - \widetilde{g}$:

$$\mathbf{1}_{|T_{k+\eta}(u_n - \widetilde{g}) - T_k(u - \widetilde{g})| \leq \eta} \quad \text{tend p.p. vers } \mathbf{1}_{|T_{k+\eta}(u - \widetilde{g}) - T_k(u - \widetilde{g})| \leq \eta}$$

et

$$A(x, T_{k+\eta}(u_n - \widetilde{g}) + \widetilde{g}\,,\ \nabla T_k(u)) \quad \text{converge fortement dans } L^{p'}(\Omega)$$

vers

$$A(x, T_{k+\eta}(u - \widetilde{g}) + \widetilde{g}\,,\ \nabla T_k(u)) \quad \text{pour } n \to +\infty\,,$$

enfin,

$$\nabla T_\eta(T_{k+\eta}(u - \widetilde{g}) - T_k(u - \widetilde{g})) \to 0 \quad \text{p.p. pour } \eta \to 0\,,$$

on peut donc choisir $\eta < \varepsilon'/2C$ tel que pour n assez grand

$$\left| \int_\Omega A(x, u_n, \nabla u_n)\, \nabla T_\eta(u_n - \widetilde{g} - T_k(u - \widetilde{g})) \right| \leq \frac{\varepsilon'}{2}$$

et

$$\left| \int_\Omega A(x, u_n, \nabla T_k(u)) \nabla T_\eta(u_n - \widetilde{g} - T_k(u - \widetilde{g})) \right| \leq \frac{\varepsilon'}{2}\,.$$

Donc, de même que pour le problème de Neumann, on a $\operatorname{mes}(A_6) \leq \varepsilon$ pour n assez grand, ce qui achève la preuve de la convergence.

Étape 3

Comme précédemment, on peut montrer que $A(x, u_n, \nabla u_n)$ converge vers $A(x, u, \nabla u)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $q < N/(N-1)$ et $\nabla\varphi \in L^r(\Omega)$ pour $r > N$, ce qui permet de montrer que

$$\int_\Omega A(x, u_n, \nabla u_n)\,\nabla\varphi \longrightarrow \int_\Omega A(x, u, \nabla u\,\nabla\varphi$$

et donc que u est solution de (4.1). □

Remerciements

L'auteur remercie Thierry Gallouët pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour ses remarques judicieuses.

Bibliographie

[1] BÉNILAN (P.), BOCCARDO (L.), GALLOUËT (T.), GARIEPY (R.), PIERRE (M.) et VASQUEZ (J.-L.) .— *An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations*, Ann. Scuola Norm. Pisa. Cl. Sci. **22** (1995), pp. 241-273.

[2] BOCCARDO (L.) et GALLOUËT (T.) .— *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data*, J. Funct. Anal. **87** (1989), pp. 149-169.

[3] BOCCARDO (L.) et GALLOUËT (T.) .— *Nonlinear equations with right hand side measures*, Comm. P. D. E. **17** (1992), pp. 641-655.

[4] BOCCARDO (L.) GALLOUËT (T.) et VASQUEZ (J.-L.) .— *Nonlinear equations in $\mathbb{R}^N$ without growth restrictions on the data*, J. Diff. Eqs. **105** (1993), pp. 334-363.

[5] DEL VECCHIO (T.) .— *Nonlinear elliptic equations with measure data*, Potential Analysis **4** (1995), pp. 185-204.

[6] FABRIE (P.) et GALLOUËT (T.) .— *Modelling wells in porous media flows*, en préparation.

[7] LERAY (J.) et LIONS (J.-L.) .— *Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder*, Bull. Soc. Math. France **93** (1965), pp. 97-107.

[8] LIONS (P.-L.) et MURAT (F.) .— *Sur les solutions renormalisées d'équations elliptiques non linéaires*, en préparation.

[9] MURAT (F.) .— *Soluciones renormalizadas de* EDP *elipticas non lineales*, Prépublication de l'Université de Paris VI, France, 1993.

[10] PRIGNET (A.) .— *Remarks on existence and uniqueness of solutions of elliptic problems with right-hand side measures*, Rendiconti di Matematica **15** (1995), pp. 321-337.

[11] SERRIN (J.) .— *Pathological solutions of elliptic differential equations*, Ann. Scuola Norm. Pisa (1964), pp. 385-387.