ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

FRANÇOISE VINCENT

Une note sur les fonctions invariantes

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 6, nº 2 (1997), p. 357-363

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1997_6_6_2_357_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VI, n° 2, 1997

Une note sur les fonctions invariantes(*)

FRANÇOISE VINCENT(1)

RÉSUMÉ. — Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ une décomposition de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple réelle $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{p}$ et W le groupe de Weyl associé à la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. G désignera un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et K, le sous-groupe de Lie connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$. On montre que l'opération de restriction à $\mathfrak{a}$ des fonctions réelles définies dans $\mathfrak{p}$ est une bijection de l'ensemble des fonctions $f : \mathfrak{p} \to \mathbb{R}$ convexes et K-invariantes sur celui des fonctions $f_0 : \mathfrak{a} \to \mathbb{R}$ convexes et W-invariantes. Ceci généralise de récents résultats de B. Dacorogna et H. Koshigoe sur les fonctions convexes invariantes par rotation.

ABSTRACT. — Let $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ a Cartan decomposition of a real semi-simple Lie algebra $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$ a Cartan subspace, W the Weyl group associated with the pair $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. G will describe a connex Lie group with Lie algebra $\mathfrak{g}$ and K , the connex Lie subgroup of G, with Lie algebra $\mathfrak{k}$. We show that the operation of restriction to $\mathfrak{a}$ of the real functions defined in $\mathfrak{p}$, is a one to one mapping of the set of functions $f : \mathfrak{p} \to \mathbb{R}$ convex and K-invariant onto this of the functions $f_0 : \mathfrak{a} \to \mathbb{R}$ convex and W-invariant. This generalises B. Dacorogna and H. Koshigoe's recent results on the convex rotationally invariant functions.

1. Introduction

Cette note propose une généralisation de résultats démontrés par B. Dacorogna et H. Koshigoe dans [1], concernant les fonctions convexes invariantes, particulièrement du théorème 1.1 de la référence citée , dont on rappelle l'énoncé avec les notations suivantes : $\mathcal{M}_n$ est l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients réels et $\mathrm{SO}(n)$ est le groupe des matrices orthogonales $n \times n$, de déterminant égal à 1.

(*) Reçu le 26 juin 1995

(1) Département de Mathématiques, Université de La Rochelle, F-17000 La Rochelle. URA CNRS, Groupes et Géométrie de l'Université de Poitiers
e-mail : fvincent@iniv-lr.fr

THÉORÈME 1.1 [1]. — *Soit f une application de $\mathcal{M}_2$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant l'hypothèse suivante :*

$$f(U\xi V) = f(\xi) \quad \textit{pour tous } \xi \in \mathcal{M}_2\,,\ U, V \in \mathrm{SO}(2)\,.$$

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est convexe;

(ii) la restriction de f au sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2$ constitué des matrices diagonales est convexe.

Les auteurs affirment que la plupart de leurs résultats s'étendent au cas des matrices $n \times n$ avec $n \geq 2$ et qu'ils se restreignent au cas $n = 2$ dans un but de simplicité.

Soit, plus généralement, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ une décomposition de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple réelle $\mathfrak{g}$. On désigne par G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et par K le sous-groupe de Lie connexe de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$. Le groupe K (qui est en fait un sous-groupe compact de G) opère naturellement (linéairement et continûment) dans l'espace vectoriel $\mathfrak{p}$, au moyen de la représentation adjointe que l'on notera Ad. Cette représentation linéaire de K dans $\mathfrak{p}$ est souvent appelée la représentation tangente de l'espace riemannien symétrique G/K. Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{p}$ (c'est un sous-espace de $\mathfrak{p}$ qui est transverse aux orbites de dimension maximale de K dans $\mathfrak{p}$) et soit W le groupe de Weyl de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, considéré comme un sous-groupe du groupe linéaire $\mathrm{GL}(\mathfrak{a})$ de l'espace vectoriel $\mathfrak{a}$ (W est en fait un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(\mathfrak{a})$ qui est engendré par les réflexions). On note $\mathcal{R}_{\mathfrak{a}}$ l'opération de restriction à $\mathfrak{a}$ des fonctions réelles définies dans $\mathfrak{p}$. On a alors :

THÉORÈME 1.2. — *$\mathcal{R}_{\mathfrak{a}}$ induit une bijection de l'ensemble des fonctions $f : \mathfrak{p} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont convexes et K-invariantes sur celui des fonctions $f_0 : \mathfrak{a} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont convexes et W-invariantes. En particulier, si $f : \mathfrak{p} \longrightarrow \mathbb{R}$ est K-invariante, alors f est convexe si et seulement si sa restriction à $\mathfrak{a}$ est convexe.*

Exemple 1. — On prend $G = \mathrm{SL}(n)$ (groupe des matrices $n \times n$ de déterminant 1, à coefficients réels). Dans cette situation, K s'identifie à $\mathrm{SO}(n)$, $\mathfrak{p}$ s'identifie à l'espace vectoriel des matrices réelles symétriques de trace nulle, l'opération de K dans $\mathfrak{p}$ est la suivante :

$$\mathrm{Ad}(x)(X) = xXx^{-1} \quad \text{pour tous } X \in \mathfrak{p}\,,\ x \in \mathrm{SO}(n)\,.$$

On peut prendre pour sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$, le sous-espace de $\mathfrak{p}$ constitué des matrices diagonales.

Exemple 2.— Soit G la composante neutre (composante connexe de l'unité) du groupe orthogonal de la forme quadratique (sur $\mathbb{R}^n$) :

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 , \quad 0 < p \leq q \text{ et } p+q = n .$$

Ici K s'identifie au groupe produit $\mathrm{SO}(p) \times \mathrm{SO}(q)$, $\mathfrak{p}$ s'identifie à l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{p,q}$ des matrices $p \times q$, à coefficients réels, et l'opération de K dans $\mathfrak{p}$ est la suivante :

$$\mathrm{Ad}(x,y)(X) = xXy^{-1} \quad \text{pour tous } (x,y) \in \mathrm{SO}(p) \times \mathrm{SO}(q) \text{ et } X \in \mathcal{M}_{p,q} .$$

On peut prendre pour sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$, le sous-espace de $\mathcal{M}_{p,q}$ constitué par les matrices de la forme :

$$X = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 & \vdots & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_p & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

$a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq p$. Lorsque $p = q = 2$, la dernière partie du théorème 1.2 est exactement le théorème 1.1 de Dacorogna et Koshigoe. On notera que dans ce cas, aprés identification de l'espace des matrices diagonales avec $\mathbb{R}^2$, le groupe de Weyl W est le groupe (à 4 éléments) engendré par les réflexions orthogonales par rapport aux deux bissectrices des axes de coordonnées et que ces transformations linéaires de $\mathbb{R}^2$ apparaissent explicitement dans les démonstrations de [1]. Toutefois la démonstration que l'on donne du théorème 1.2 n'est pas de même nature : elle découle presque immédiatement d'un théorème de convexité de Kostant [3, theorem 8.2] que l'on présente dans la section suivante.

On renvoit à [2] pour les notions de base concernant les espaces riemanniens symétriques irréductibles, chacun d'eux fournit un exemple où s'applique le théorème 1.2.

2. Le théorème de convexité de Kostant

On reprend la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ de l'introduction. La restriction à $\mathfrak{p}$ de la forme bilinéaire de Killing définit sur $\mathfrak{p}$ un produit scalaire qui est K-invariant. Les notions d'orthogonalité utilisées plus loin seront relatives à ce produit scalaire.

- Soit X un élément régulier de $\mathfrak{p}$ dont la K-orbite $K \cdot X$ est de dimension maximale, et soit T_X l'espace tangent en X à cette orbite. L'orthogonal $T_X^{\perp}$ de T_X est un sous-espace de Cartan, noté $\mathfrak{a}$.
- Le sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ étant choisi, on considère le sous-groupe M de K constitué par les éléments x de K tels que $\mathrm{Ad}(x)(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ (c'est le normalisateur de $\mathfrak{a}$ dans K). Par sa définition, le groupe M opère linéairement dans l'espace vectoriel $\mathfrak{a}$. On désigne par W l'image de M dans $\mathrm{GL}(\mathfrak{a})$ qui résulte de cette opération de M dans $\mathfrak{a}$. C'est le groupe de Weyl de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$.

On sait alors (voir [2]) que :

i) toute orbite Ω de K dans $\mathfrak{p}$ rencontre $\mathfrak{a}$: $\Omega \cap \mathfrak{a} \neq \emptyset$;

ii) Si Ω est une orbite de K dans $\mathfrak{p}$, alors $\Omega \cap \mathfrak{a}$ est une orbite de W dans $\mathfrak{a}$.

On peut maintenant énoncer le théorème de Kostant.

THÉORÈME 2.1 [3].— *Soit π l'opérateur de projection orthogonale de $\mathfrak{p}$ sur $\mathfrak{a}$. Soit Ω une orbite de K dans $\mathfrak{p}$. Alors la projection orthogonale $\pi(\Omega)$ de Ω dans $\mathfrak{a}$ est l'enveloppe convexe de $\Omega \cap \mathfrak{a}$.*

On en déduit le résultat suivant.

LEMME 2.1.— *Soit $f : \mathfrak{p} \to \mathbb{R}$ une fonction K-invariante. On suppose que sa restriction f_0 à $\mathfrak{a}$ est convexe. Alors, pour tout X dans $\mathfrak{p}$, pour tout Y dans $\pi(K \cdot X)$, on a :*

$$f_0(Y) \leq f(X) .$$

Démonstration.— Soient X dans $\mathfrak{p}$ et Y dans $\pi(K\cdot X)$. D'après le théorème de Kostant, il existe un nombre fini $Y_1, \ldots, Y_m$ d'éléments de $K\cdot X\cap\mathfrak{a}$ et des réels positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, de somme 1, tels que

$$Y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i Y_i .$$

La fonction f_0 étant convexe, il vient :

$$f_0(Y) \leq \sum_i \lambda_i f_0(Y_i),$$

mais $Y_i \in K\cdot X$ et f est K-invariante, donc $f_0(Y_i) = f(X)$ et $f_0(Y) \leq f(X)$.

3. Démonstration du théorème 1.2

• Soit $f_0 : \mathfrak{a} \to \mathbb{R}$ une fonction W-invariante. Alors f_0 se prolonge de manière unique, en une fonction K-invariante $f : \mathfrak{p} \to \mathbb{R}$. On remarque en effet que si X est un élément de $\mathfrak{p}$, $K\cdot X\cap\mathfrak{a}$ est une W-orbite, de sorte que f_0 prend une valeur constante sur $K\cdot X\cap\mathfrak{a}$, et que, si on pose $f(X) = f_0(K\cdot X\cap\mathfrak{a})$, on définit bien une fonction $f : \mathfrak{p} \to \mathbb{R}$. Il est immédiat que f est K-invariante : si $Y = \mathrm{Ad}(x)(X)$ avec $x \in K$, on a $K\cdot X = K\cdot Y$, d'où $K\cdot X\cap\mathfrak{a} = K\cdot Y\cap\mathfrak{a}$ et $f(X) = f(Y)$. Il est immédiat que $f\restriction_{\mathfrak{a}} = f_0$: si $X \in \mathfrak{a}$, $K\cdot X\cap\mathfrak{a}$ étant une W-orbite, ne peut être que $W\cdot X$, d'où $f(X) = f_0(W\cdot X) = f_0(X)$. Enfin, le prolongement K-invariant de f_0 est unique (ceci résulte du fait que toutes les K-orbites rencontrent $\mathfrak{a}$).

• Soit $f_0 : \mathfrak{a} \to \mathbb{R}$ une fonction W-invariante et convexe. Soit $f : \mathfrak{p} \to \mathbb{R}$ le prolongement K-invariant de f_0, construit ci-dessus. Montrons que f est convexe. Soient X_1 et X_2 dans $\mathfrak{p}$ et t dans $[0, 1]$. La K-orbite de $tX_1 + (1-t)X_2$ rencontre $\mathfrak{a}$. Il existe donc x dans K tel que $Z = \mathrm{Ad}(x)\big(tX_1 + (1-t)X_2\big)$ soit dans $\mathfrak{a}$. La fonction f étant K-invariante, on a :

$$f\big(tX_1 + (1-t)X_2\big) = f(Z) \quad \text{et} \quad f(Z) = f_0(Z)$$

car $Z \in \mathfrak{a}$. Puisque $Z \in \mathfrak{a}$,

$$Z = \pi(Z) = t\pi\big(\mathrm{Ad}(x)(X_1)\big) + (1-t)\pi\big(\mathrm{Ad}(x)(X_2)\big),$$

et par suite de la convexité de f_0 :

$$f_0(Z) \leq t f_0\left(\pi(\mathrm{Ad}(x)(X_1))\right) + (1-t) f_0\left(\pi(\mathrm{Ad}(x)(X_2))\right) .$$

D'après le lemme 2.1 :

$$f_0\left(\pi(\mathrm{Ad}(x)(X_1))\right) \leq f(X_1) \quad \text{et} \quad f_0\left(\pi(\mathrm{Ad}(x)(X_2))\right) \leq f(X_2),$$

on a bien $f(Z) \leq t f(X_1) + (1-t) f(X_2)$ ce qui prouve la convexité de f.

Ainsi, toute fonction $f_0 : \mathfrak{a} \longrightarrow \mathbb{R}$, convexe et W-invariante se prolonge, de manière unique, en une fonction $f : \mathfrak{p} \longrightarrow \mathbb{R}$, convexe et K-invariante.

• Dans l'autre sens, si $f : \mathfrak{p} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction K-invariante et convexe, il est immédiat que sa restriction f_0 à $\mathfrak{a}$ est W-invariante et convexe. Ceci termine la démonstration du théorème 1.2.

Remarque 3.1.— Il est immédiat que si f et g sont deux fonctions réelles K-invariantes sur $\mathfrak{p}$, f_0 et g_0 leurs restrictions respectives à $\mathfrak{a}$, on a : $f \leq g$ si et seulement si $f_0 \leq g_0$. Autrement dit, la bijection induite par $\mathcal{R}_\mathfrak{a}$ entre l'ensemble des fonctions convexes et K-invariantes sur $\mathfrak{p}$ d'une part et celui des fonctions convexes et W-invariantes sur $\mathfrak{a}$ d'autre part est un isomorphisme d'ensembles ordonnés. Ceci semble avoir des conséquences intéressantes dans la pratique pour la détermination de l'enveloppe convexe $\mathcal{C}f$ d'une fonction K-invariante f (on rappelle que $\mathcal{C}f$ est l'enveloppe supérieure de l'ensemble des fonctions convexes majorées par f, (voir [1, sect. 4]). Le lemme suivant généralise la partie A du théorème 4.2 de [1].

LEMME 3.1.— *Soit $f : \mathfrak{p} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction K-invariante. Alors $\mathcal{R}_\mathfrak{a}(\mathcal{C}f) = \mathcal{C}(\mathcal{R}_\mathfrak{a} f)$ ou encore $\mathcal{C}f\restriction_\mathfrak{a} = \mathcal{C}(f\restriction_\mathfrak{a})$.*

Démonstration.— Posons $f_0 = f\restriction_\mathfrak{a}$ et $g_0 = \mathcal{C}f_0$. La fonction f étant K-invariante, il vient que $\mathcal{C}f$ est elle-même K-invariante. De même g_0 est W-invariante. Il revient donc au même de montrer que $\mathcal{C}f$ coïncide avec l'unique prolongement K-invariant g de g_0. Pour cela, on remarque d'abord : $\mathcal{C}f$ est convexe et $\mathcal{C}f \leq f$; donc $\mathcal{C}f\restriction_\mathfrak{a} \leq f_0$, ainsi $\mathcal{C}f\restriction_\mathfrak{a} \leq \mathcal{C}f_0 = g_0$ et $\mathcal{C}f \leq g$. On remarque ensuite : $g_0 = \mathcal{C}f_0$ est convexe et $g_0 \leq f_0$, donc g est convexe et $g \leq f$, ainsi $g \leq \mathcal{C}f$. On a bien $g = \mathcal{C}f$.

La signification du lemme est la suivante : pour trouver l'enveloppe $\mathcal{C}f$ d'une fonction K-invariante, il suffit de restreindre f en f_0 sur $\mathfrak{a}$, de trouver l'enveloppe $\mathcal{C}f_0$ et enfin de prolonger $\mathcal{C}f_0$ en une fonction K-invariante sur $\mathfrak{p}$. L'intérêt réside en ce que la dimension de $\mathfrak{a}$ peut être considérablement plus petite que celle de $\mathfrak{p}$. On signale que la dimension de $\mathfrak{a}$ est ce qu'on appelle le rang de l'espace symétrique G/K et qu'elle est connue pour chacun des espaces symétriques de la classification figurant dans [2].

Références

[1] DACOROGNA (B.) et KOSHIGOE (H.) .— *On the different notions of convexity for rotationally invariant functions*, Ann. de la Faculté des Sciences de Toulouse, **II**, n° 2 (1993), pp. 163-184.

[2] HELGASON (S.) .— *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Academic Press, 1978.

[3] KOSTANT (B.) .— *On convexity, the Weyl group and the Iwasawa decomposition*, Ann. Sci. École Normale Sup. **6** (1973), pp. 413-455.