ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JEAN-MARIE LION
JEAN-PHILIPPE ROLIN

Volumes, feuilles de Rolle de feuilletages analytiques et théorème de Wilkie

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 7, nº 1 (1998), p. 93-112
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1998_6_7_1_93_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VII, n° 1, 1998

Volumes, feuilles de Rolle de feuilletages analytiques et théorème de Wilkie(*)

JEAN-MARIE LION(1) et JEAN-PHILIPPE ROLIN(1)

RÉSUMÉ. — Nous montrons que les feuilles non spiralantes de certains feuilletages analytiques réels (les feuilles de Rolle) appartiennent à une classe de sous-ensembles stratifiables des espaces $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, stable par intersection, réunion, différence, projection linéaire et fermeture topologique. Ce résultat est une version pour les feuilles de Rolle d'un théorème de Wilkie sur les structures O-minimales. Notre preuve reprend des arguments de Gabrielov et Wilkie et repose sur une estimation uniforme de volumes de tubes obtenue par la géométrie intégrale et les résultats de finitude de Moussu et Roche.

ABSTRACT. — Volumes, Rolle leaves of analytic foliations and Wilkie's Theorem. We prove that non-spiraling leaves of some real analytic foliations (Rolle leaves) belong to a class of stratifiable subsets of $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, which is stable under the following operations : intersection, union, set difference, linear projections and topological closure. This result is a version for Rolle leaves of a theorem of Wilkie on O-minimal structures. Our proof uses arguments from Gabrielov and Wilkie and it is based on an uniform estimation of volumes of tubes by mean of Integral Geometry and finiteness results of Moussu and Roche.

Introduction

Initiés par Khovanskii ([Kh], [Ri]), les travaux sur les *ensembles pfaffiens* ont pour objet d'étendre les propriétés des ensembles semi-analytiques aux solutions d'équations différentielles analytiques. Les définitions que nous adoptons sont celles de Moussu et Roche [MR], [To]. Une *feuille de Rolle*

(*) Reçu le 3 décembre 1997, accepté le 4 mars 1998

(1) C.N.R.S.-U.M.R. 5584, Laboratoire de Topologie, Université de Bourgogne, B.P. 400, F-21011 Dijon Cedex (France)
e-mail : lion@u-bourgogne.fr et rolin@u-bourgogne.fr

est une feuille non-spiralante d'un feuilletage analytique réel, singulier et de codimension 1 : toute courbe analytique transverse au feuilletage coupe la feuille en au plus un point. Puisque les feuilletages analytiques peuvent être singuliers, les feuilles de Rolle ne sont pas nécessairement des ensembles analytiques. Un *ensemble pfaffien* est l'intersection d'un semi-analytique et d'un nombre fini de feuilles de Rolle de différents feuilletages. En utilisant un résultat de Lojasiewicz [Lo] en géométrie analytique réelle, Moussu et Roche [MR] montrent que les ensembles pfaffiens relativement compacts vérifient une propriété de finitude uniforme à la Gabrielov ([Ga], [Ha], [Te]) : le nombre de leurs composantes connexes est uniformément majoré.

Lion et Roche [LR1] montrent que les ensembles pfaffiens relativement compacts de $\mathbb{R}^3$ admettent des stratifications de Whitney en sous-variétés différentiables. Lion et Rolin [LR2] montrent que les nombres de Betti des ensembles obtenus par intersections finies, réunions finies et différence d'ensembles pfaffiens relativement compacts sont finis.

Dans ce travail, nous adaptons aux ensembles pfaffiens la démarche élaborée par Wilkie [Wi] dans son étude des ensembles définis par une classe de fonctions différentiables vérifiant une propriété de finitude uniforme. Nous déterminons une nouvelle classe d'ensembles ayant un nombre fini de composantes connexes, stable par projection linéaire et différence, par produit, intersection et union finis, et contenant les feuilles de Rolle relativement compactes. Nous appelons T^∞*-pfaffiens* les éléments de cette classe. D'après [MS], [Pi] et [Dr], la construction de la classe des T^∞-pfaffiens par le procédé de "limite" que nous décrivons au paragraphe suivant implique que cette classe est minimale parmi celles qui vérifient les propriétés de notre théorème. Notre résultat et ceux de Van den Dries et Miller [DM] ont pour conséquence l'existence de stratifications de Whitney des pfaffiens relativement compacts en T^∞-pfaffiens de classe C^k où $k \in \mathbb{N}$ est un entier fixé arbitraire. Ceci généralise considérablement [LR1] et [LR2].

Un T^∞-pfaffien W est construit de la façon suivante. On se donne un semi-analytique relativement compact X et une famille finie $\mathcal{F}$ de feuilletages analytiques. L'ensemble W est l'union d'une famille croissante d'ensembles A_k, où chaque A_k est la limite de Hausdorff d'une suite de projections linéaires d'ensembles pfaffiens compacts associés à X et $\mathcal{F}$. D'après [MR], tout T^∞-pfaffien a donc un nombre fini de composantes connexes.

Nous prouvons en deux étapes les propriétés de la classe des T^∞-pfaffiens. Tout d'abord, des arguments élémentaires de topologie permettent de prouver la stabilité de la classe des T^∞-pfaffiens par union, intersection et produit finis, projection linéaire et passage à l'adhérence. Il reste ensuite à prouver le point essentiel qui est la stabilité de cette classe par différence. Nous utilisons pour cela des arguments voisins de ceux de Gabrielov [Ga]. Ce dernier déduit la stabilité par différence de la classe des sous-analytiques de la propriété suivante : si E est sous-analytique, alors $\overline{E}\setminus \mathrm{int}(E)$ est inclus dans un sous-analytique de dimension strictement inférieure à celle de E. Ne disposant pas de notion de dimension, nous utilisons comme Wilkie la mesure de Lebesgue et prouvons le résultat suivant : la différence $\overline{A}\setminus \mathrm{int}(A)$ entre la fermeture et l'intérieur d'un T^∞-pfaffien A est contenue dans un T^∞-pfaffien compact négligeable.

La géométrie intégrale nous fournit une démonstration rapide de ce dernier point. En effet, des arguments de [MR] que nous redémontrons montrent que la frontière de la projection linéaire $\pi(W)$ d'un ensemble pfaffien compact W est contenue dans la projection $\pi(Z \cap W)$, où Z est un semi-analytique. Pour montrer que $\pi(Z\cap W)$ est négligeable, nous majorons uniformément le volume des tubes $\mathrm{Tub}(\pi(Z \cap W), \varepsilon)$ des points situés à une distance de $\pi(Z \cap W)$ strictement inférieure à ε. Celui-ci s'obtient en intégrant par rapport à t le volume des bords des tubes $\mathrm{Tub}(\pi(Z \cap W), t)$ pour $t < \varepsilon$. Or, d'après la formule de Cauchy-Crofton, on calcule ce dernier en intégrant le nombre de points d'intersection de ces ensembles avec les droites affines, qui est uniformément majoré d'après le théorème de finitude de [MR].

Cet usage de la géométrie intégrale pour contrôler la topologie des objets est dans l'esprit des travaux de Yomdin sur les propriétés métriques des ensembles semi-algébriques [Yo]. L'emploi du théorème de finitude pour contrôler les volumes des bords des ensembles pfaffiens s'inspire des résultats de Roche [Ro] sur la densité des bords des feuilles de Rolle (voir également [Li1] pour un lien avec la géométrie intégrale).

Remarquons pour finir que pour aboutir à une théorie des ensembles pfaffiens totalement analogue à celle des sous-analytiques, il reste à répondre à la question suivante. Le complémentaire de la projection propre d'un ensemble pfaffien est-il la projection propre d'un ensemble pfaffien? Des exemples récents [Li2] montrent que la projection d'un ensemble pfaffien n'est pas, en général, un ensemble pfaffien. D'après [CLM], le bord d'une feuille de Rolle est une réunion de projections propres d'ensembles pfaffiens. Pour étendre ce résultat aux ensembles pfaffiens, il pourrait être intéressant de généraliser aux feuilletages de grande codimension les théorèmes d'équiréduction de Cano, Cerveau et Mattei ([Ca], [CC], [CM]).

1. Définitions et résultats

1.1. Feuilles de Rolle

Un *semi-analytique* de $\mathbb{R}^n$ est la réunion d'une famille localement finie d'ensembles bornés $X_i = \{f_{i,1}, \ldots, f_{i,k} = 0,\ g_{i,1}, \ldots, g_{i,\ell} > 0\}$ où les fonctions $f_{i,j}$ et $g_{i,j}$ sont analytiques au voisinage du compact $\overline{X}_i$ [Lo].

Considérons un ouvert semi-analytique M de $\mathbb{R}^n$ et une 1-forme différentielle $\omega = a_1\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + a_n\,\mathrm{d}x_n$ à coefficients analytiques au voisinage de $\overline{M}$. Supposons cette 1-forme intégrable ($\omega \wedge \mathrm{d}\omega \equiv 0$) et non singulière dans l'ouvert M ($S(\omega) \cap M = \emptyset$ où $S(\omega) = \{a_1 = \cdots = a_n = 0\}$). La 1-forme ω induit sur M un feuilletage analytique de codimension 1 : l'ouvert M est feuilleté par les hypersurfaces intégrales de l'équation de Pfaff $\omega = 0$, connexes et maximales [Go]. Une feuille V de ce feuilletage est une *feuille de Rolle* (associée au *couple de Pfaff* (M,ω)) si toute courbe analytique contenue dans M et transverse à ω rencontre V en au plus un point [MR]. Une telle feuille V est une sous-variété analytique de codimension 1 proprement plongée dans M. Si $m \in \mathbb{N}$, le produit $V \times \mathbb{R}^m$ est une feuille de Rolle associée au couple de Pfaff $(M \times \mathbb{R}^m, \omega)$. Si f est une fonction analytique au voisinage de $\overline{M}$ et sans singularité dans M les composantes connexes des hypersurfaces de niveau de la restriction de f à M sont des feuilles de Rolle associées au couple de Pfaff $(M, \mathrm{d}f)$.

Moussu et Roche montrent la propriété de finitude uniforme suivante.

THÉORÈME DE FINITUDE PFAFFIEN [MR].— *Soient $(M_i,\omega_i)_{i\leq q}$ des couples de Pfaff de $\mathbb{R}^n$, X un semi-analytique borné de $\mathbb{R}^n$ inclus dans l'intersection des M_i, Λ un semi-analytique borné de $\mathbb{R}^k$ et $(h_j(x,\lambda))_{j\leq s}$ des fonctions analytiques au voisinage du compact $\overline{X \times \Lambda}$. Il existe un entier N ne dépendant que de X, Λ, des ω_i et des h_j majorant le nombre de composantes connexes de tout ensemble*

$$X \cap \left(\bigcap_j \{h_j(x,\lambda) = 0\}\right) \cap \left(\bigcap_i V_i\right)$$

où λ appartient à Λ et les V_i sont des feuilles de Rolle associées aux couples de Pfaff (M_i,ω_i).

Énonçons le théorème principal de notre travail.

THÉORÈME 1.— *Il existe une classe de sous-ensembles des espaces* $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, *contenant les semi-analytiques et les feuilles de Rolle relativement compacts, stable par projection linéaire et différence, par produit, intersection et union finis, et dont les éléments ont un nombre fini de composantes connexes.*

1.2. Ensembles T^∞-pfaffiens

Un T^∞*-système* $\mathcal{H} = \left(n,\, m,\, (M_i, \omega_i)_{i \leq q},\, X\right)$ de $\mathbb{R}^n$ est la donnée d'une famille finie de couples de Pfaff (M_i, ω_i) de $\mathbb{R}^{n+m}$, d'un semi-analytique X borné inclus dans l'intersection des M_i et de la projection canonique π de $\mathbb{R}^{n+m}$ sur $\mathbb{R}^n$.

Un *pfaffien* associé à $\mathcal{H}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+m}$ de la forme $X \cap (\bigcap_i V_i)$ où les V_i sont des feuilles de Rolle associées aux couples de Pfaff (M_i, ω_i).

On appelle $\mathcal{H}$*-ensemble* un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^n$ de la forme suivante. Il existe une famille $\left(W_{i,j}\right)_{i,j \in \mathbb{N}}$ de pfaffiens compacts associés à $\mathcal{H}$ tels que :

- à j fixé, la suite de compacts $\left(\pi(W_{i,j})\right)_{i \in \mathbb{N}}$ converge dans la topologie de Hausdorff de l'ensemble des parties compactes de $\mathbb{R}^n$ vers une limite A_j,
- les ensembles A_j, $j \in \mathbb{N}$, forment une suite croissante de réunion A.

On appelle T^∞*-pfaffien* tout ensemble A pour lequel il existe un T^∞-système $\mathcal{H}$ tel que A soit un $\mathcal{H}$-ensemble. On dira que A est un T^∞*-pfaffien associé à* $\mathcal{H}$.

Dans l'appellation T^∞-pfaffien la lettre "T" correspond à l'opération topologique de limite de Haussdorff et le symbole "∞" à l'opération ensembliste d'union infinie croissante. Par définition un T^∞-pfaffien est borné. De plus c'est la réunion d'une famille croissante de compacts. Il est donc mesurable au sens de Lebesgue. Un T^∞-pfaffien inclus dans $\mathbb{R}^n$ est dit négligeable s'il est de mesure de Lebesgue n-dimensionnelle nulle.

Les pfaffiens associés à un T^∞-système $\mathcal{H}$ et les $\mathcal{H}$-ensembles vérifient les propriétés fondamentales suivantes.

PROPOSITION 1.— *Soient* $\mathcal{H} = \left(n, m, (M_i, \omega_i)_{i \le q}, X\right)$ *un* T^∞*-système,* π *la projection canonique de* $\mathbb{R}^{n+m}$ *sur* $\mathbb{R}^n$*,* $n' \le n$ *et* p *la projection canonique de* $\mathbb{R}^n$ *sur* $\mathbb{R}^{n'}$*.*

i) La limite de Haussdorff d'une suite convergente de $\mathcal{H}$*-ensembles compacts est un* $\mathcal{H}$*-ensemble. Ainsi, l'adhérence de tout* $\mathcal{H}$*-ensemble est un* $\mathcal{H}$*-ensemble compact.*

ii) Il existe un T^∞*-système* $\mathcal{H}^\infty$ *tel que si* W *est un pfaffien associé à* $\mathcal{H}$*, alors* $\pi(W)$ *est un* $\mathcal{H}^\infty$*-ensemble.*

iii) Il existe un T^∞*-système* $\mathcal{H}_p$ *tel que l'image par* p *d'un* $\mathcal{H}$*-ensemble est un* $\mathcal{H}_p$*-ensemble.*

iv) Il existe un entier N *majorant le nombre de composantes connexes des* $\mathcal{H}$*-ensembles.*

Un semi-analytique relativement compact est la projection d'un pfaffien relativement compact. C'est donc un T^∞-pfaffien d'après les points ii) et iii) de la proposition. Une feuille de Rolle relativement compacte est un ensemble pfaffien associé un T^∞-système. C'est donc d'après le point ii) un T^∞-pfaffien. De plus, d'après les points iii) et iv) de la proposition, la classe des T^∞-pfaffiens est stable par projection et ses éléments ont un nombre fini de composantes connexes. Elle est clairement invariante par l'action des groupes affines des espaces $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

PROPOSITION 2.— *Soient* $\mathcal{H}$ *et* $\mathcal{H}'$ *des* T^∞*-systèmes de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{R}^{n'}$*.*

i) Il existe un T^∞*-système* $\mathcal{H}_\times$ *tel que le produit d'un* $\mathcal{H}$*-ensemble et d'un* $\mathcal{H}'$*-ensemble est un* $\mathcal{H}_\times$*-ensemble.*

ii) Si $n = n'$*, il existe des* T^∞*-systèmes* $\mathcal{H}_\cap$ *et* $\mathcal{H}_\cup$ *tels que l'intersection et la réunion d'un* $\mathcal{H}$*-ensemble et d'un* $\mathcal{H}'$*-ensemble sont respectivement un* $\mathcal{H}_\cap$*-ensemble et un* $\mathcal{H}_\cup$*-ensemble.*

D'après la proposition 1, la classe des T^∞-pfaffiens contient les semi-analytiques et les feuilles de Rolle relativement compactes, elle est stable par projection et ses éléments ont un nombre fini de composantes connexes. D'après la proposition 2, elle est stable par produit, intersection et union finis. Pour prouver le théorème 1, il reste donc à montrer que la différence de deux T^∞-pfaffiens est un T^∞-pfaffien.

THÉORÈME 2. — *La classe des* T^∞*-pfaffiens est stable par différence.*

Chez Gabrielov [Ga], la propriété suivante est un des arguments de la démonstration de la stabilité par différence de la classe des sous-analytiques : si E est un sous-analytique, alors $\overline{E} \setminus \mathrm{int}(E)$ est inclus dans un sous-analytique de dimension strictement inférieure à celle de E. Comme Wilkie [Wi], nous remplaçons la notion de dimension par celle de mesure et nous utilisons des arguments voisins de ceux de Gabrielov [Ga] pour déduire le théorème 2 de la proposition suivante.

PROPOSITION 3. — *La différence* $\overline{A} \setminus \mathrm{int}(A)$ *entre la fermeture et l'intérieur d'un* T^∞*-pfaffien de* $\mathbb{R}^n$ *est contenue dans un* T^∞*-pfaffien compact négligeable.*

Cette proposition est un corollaire du lemme suivant.

LEMME DE SARD-WILKIE PFAFFIEN. — *Soient* $\mathcal{H}$ *un* T^∞*-système et* π *la projection canonique de* $\mathbb{R}^{n+m}$ *sur* $\mathbb{R}^n$ *associée. Il existe un semi-analytique borné* Z *de* $\mathbb{R}^{n+m}$ *et* $K > 0$ *tels que pour tout pfaffien compact* W *associé à* $\mathcal{H}$ *:*

i) la frontière $\pi(W) \setminus \mathrm{int}\big(\pi(W)\big)$ *est contenue dans l'ensemble* $\pi(Z \cap W)$

ii) si $\varepsilon \in \,]0\,,1\,[$*, le volume du tube* $\mathrm{Tub}\big(\pi(Z \cap W), \varepsilon\big)$ *des points de* $\mathbb{R}^n$ *situés à une distance de* $\pi(Z \cap W)$ *strictement inférieure à* ε *est majoré par* $K\varepsilon$*.*

1.3 Plan de l'article

Nous consacrons la section 2 à l'étude des propriétés des ensembles pfaffiens. Nous rappelons l'argument essentiel de la preuve du théorème de finitude pfaffien de [MR] : le lemme de section pfaffien. C'est un lemme de calcul différentiel et de géométrie analytique. Nous en déduisons ensuite le lemme de Sard-Wilkie pfaffien. Les preuves des propositions 1, 2 et 3 reposent sur des arguments élémentaires de théorie des ensembles, de topologie générale et de théorie de la mesure. Elles font l'objet de la section 3. Nous démontrons le théorème 2 dans la section 4. Le théorème 1 résulte des propositions 1 et 2 et du théorème 2 comme signalé ci-dessus.

2. Lemme de Sard–Wilkie pfaffien

2.1 Feuillets normaux et lemme de section pfaffien [MR]

Pour une meilleure compréhension de la preuve du lemme de Sard-Wilkie pfaffien nous rappelons la preuve du lemme de section pfaffien [MR]. C'est une clef de la démonstration du théorème de finitude pfaffien de [MR] et il est essentiel dans la preuve de notre lemme de Sard–Wilkie pfaffien.

Soit $d = 0, \dots, n$. Un semi-analytique Γ de $\mathbb{R}^n$, borné, connexe et lisse est un *feuillet normal* de dimension d s'il existe des fonctions $f_1, \dots, f_{n-d}$ et g analytiques au voisinage de $\overline{\Gamma}$ telles que

$$\Gamma = \{f_1, \dots, f_{n-d} = 0\,,\ g > 0\}\,, \quad \Gamma \subset \left\{\left(\bigwedge_j \mathrm{d}f_j\right) \neq 0\right\}.$$

Soient $X_1, \dots, X_r$ des semi-analytiques bornés de $\mathbb{R}^n$. Lojasiewicz montre qu'il existe une partition finie $\mathcal{S}$ de la réunion des X_i en feuillets normaux adaptés à ces semi-analytiques [Lo] : si $\Gamma \in \mathcal{S}$ et $i = 1, \dots, r$, le feuillet Γ est inclus dans X_i ou dans son complémentaire.

En utilisant ce résultat, Moussu et Roche montrent le lemme suivant.

LEMME DE SECTION PFAFFIEN [MR].— *Soient $(M_i, \omega_i)_{i \leq q}$ des couples de Pfaff de $\mathbb{R}^n$ et X un semi-analytique borné inclus dans l'intersection des M_i. Il existe une famille finie $\mathcal{P}$ de feuillets normaux inclus dans X vérifiant les conditions suivantes. Soient V_i, $i \leq q$ des feuilles de Rolle associées aux couples $(M_i, \omega_i)_{i \leq q}$.*

1) *Toute composante connexe de l'ensemble $X \cap (\bigcap_i V_i)$ rencontre l'un des feuillets de $\mathcal{P}$.*
2) *Soit*

$$\Gamma = \{f_1, \dots, f_{n-d} = 0\,,\ g > 0\} \quad \textit{un feuillet de } \mathcal{P}\,.$$

Si $I \subset \{1, \dots, q\}$, le feuillet Γ est adapté à

$$R_{\Gamma,I} = \left\{\left(\bigwedge_j \mathrm{d}f_j\right) \wedge \left(\bigwedge_{i \in I} \omega_i\right) \neq 0\right\}.$$

3) *Il existe $I \subset \{1, \dots, q\}$ de cardinal $\#I$ égal à $\dim \Gamma$ tel que $\Gamma \subset R_{\Gamma,I}$: l'ensemble $\Gamma \cap (\bigcap_{i \in I} V_i)$ est discret.*

La condition 2) est une condition de transversalité dont voici l'interprétation. Soient $I \subset \{1, \ldots, q\}$ et $I' \subset I$ de cardinal maximal vérifiant $\Gamma \subset R_{\Gamma,I'}$. L'ensemble $\Gamma \cap (\bigcap_{i \in I} V_i)$ est une sous-variété de dimension $\dim \Gamma - \#I'$. Son espace tangent en un point x est égal à $\left(\bigcap_j \ker \mathrm{d}f_j(x)\right) \cap \left(\bigcap_{i \in I'} \ker \omega_i(x)\right)$.

Avant de rappeler la preuve de ce lemme, montrons comment Moussu et Roche en déduisent le théorème de finitude pfaffien.

Démonstration du théorème de finitude pfaffien [MR]

L'énoncé avec les paramètres λ donné dans la section 1 est équivalent à un énoncé sans paramètre. Les paramètres deviennent des variables en ajoutant les couples de Pfaff $(\mathbb{R}^{n+k}, \mathrm{d}\lambda_j)$, en remplaçant les ensembles M_i et V_i par les produits $M_i \times \mathbb{R}^k$ et $V_i \times \mathbb{R}^k$ et X par $\{(x, \lambda) \in X \times \Lambda \mid h_1, \ldots, h_s = 0\}$.

Prouvons un énoncé sans paramètre. D'après la condition 1) du lemme de section, on peut supposer que X est un feuillet $\{f_1, \ldots, f_{n-d} = 0\,,\ g > 0\}$ de $\mathcal{P}$. D'après la condition 3), il existe $I \subset \{1, \ldots, q\}$ de cardinal $\#I$ égal à $d = \dim X$ tel que $X \subset R_{X,I}$: l'ensemble $X \cap (\bigcap_{i \in I} V_i)$ est discret et contient $X \cap (\bigcap_i V_i)$. Les composantes connexes de ces ensembles sont des points. Si d n'est pas nul, il existe I' inclus dans I de cardinal $d - 1$. L'ensemble $X \cap (\bigcap_{i \in I'} V_i)$ est une union de courbes lisses et connexes : la tangente en un point x est égale à $\left(\bigcap_j \ker \mathrm{d}f_j(x)\right) \cap \left(\bigcap_{i \in I'} \ker \omega_i(x)\right)$. D'après l'hypothèse de Rolle et puisque $\left(\bigwedge_j \mathrm{d}f_j\right) \wedge \left(\bigwedge_{i \in I} \omega_i\right) \neq 0$ en tout point de X, chacune de ces courbes ne rencontre l'ensemble $X \cap (\bigcap_i V_i)$ qu'en un point au plus. On peut, par ce procédé récurrent, éliminer toutes les équations de Pfaff. Le théorème de finitude résulte donc de la finitude du nombre de composantes connexes d'un semi-analytique borné.

Démonstration du lemme de section pfaffien [MR]

On raisonne par récurrence sur la dimension de X. D'après le résultat de Lojasiewicz, on peut supposer que X est un feuillet normal $\{f_1, \ldots, f_{n-d} = 0\,,\ g > 0\}$. Si X est de dimension nulle, c'est trivial. Supposons avoir prouvé le lemme pour tout semi-analytique de dimension strictement inférieure à celle de X. Appliquons le résultat de Lojasiewicz à X et aux semi-analytiques $R_{X,I}$ pour $I \subset \{1, \ldots, q\}$. Les feuillets obtenus qui sont de même dimension que X vérifient la condition 2). D'après l'hypothèse de récurrence, on peut remplacer X par l'un d'eux. Soit $I \subset \{1, \ldots, q\}$ de cardinal maximal vérifiant $X \subset R_{X,I}$. Si le cardinal de I est égal à la dimension de X, alors X vérifie la condition 3). Sinon, considérons $b \in X$

et $R > 0$ tels que la sphère euclidienne $S_R(b)$ de centre b et de rayon R ne rencontre pas X. Puisque $g(b) \neq 0$, lorsque a décrit la sphère $S_R(b)$, la forme $\mathrm{d}(\|x-a\|^2 g)(b)$ décrit une sphère non triviale de l'espace des formes linéaires. L'espace engendré par les formes $\mathrm{d}f_j(b)$, $j \in \{1, \ldots, n-d\}$ et $\omega_i(b)$, $i \in I$ étant de dimension au plus $n-1$, on peut choisir un point a de $S_R(b)$ tel que

$$\left(\mathrm{d}\left(\|x-a\|^2 g\right) \wedge \left(\bigwedge_j \mathrm{d}f_j\right) \wedge \left(\bigwedge_{i\in I} \omega_i\right)\right)(b) \neq 0\,.$$

Puisque X est connexe, le semi-analytique

$$X' = X \cap \left\{\mathrm{d}\left(\|x-a\|^2 g\right) \wedge \left(\bigwedge_j \mathrm{d}f_j\right) \wedge \left(\bigwedge_{i\in I} \omega_i\right) = 0\right\}$$

est de dimension strictement inférieure à celle de X. Si les V_i sont des feuilles de Rolle associées aux couples (M_i, ω_i), l'ensemble $W = X \cap (\bigcap_i V_i)$ est une sous-variété fermée de X. L'espace tangent à W en tout point x est égal à $\left(\bigcap_j \ker \mathrm{d}f_j(x)\right) \cap \left(\bigcap_{i\in I} \ker \omega_i(x)\right)$. Par conséquent toute composante connexe C de W rencontre X'. En effet, la restriction à C de la fonction $1/\left(\|x-a\|^2 g\right)$ est propre. Elle atteint un maximum en un point qui appartient à X'. On conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à X'.

2.2 Démonstration du lemme de Sard-Wilkie pfaffien

Considérons un T^∞-système $\mathcal{H} = \left(n,\, m,\, (M_i, \omega_i)_{i\leq q},\, X\right)$ et un pfaffien compact W associé à $\mathcal{H}$. En appliquant le lemme de section pfaffien au semi-analytique X, aux couples de Pfaff $(M_i, \omega_i)_{i\leq q}$ et $(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}x_i)_{i\leq n}$, on obtient une famille $\mathcal{P}$ de feuillets normaux inclus dans X indépendante de W et vérifiant :

1) $\pi(W) = \pi(Y \cap W)$ où Y est la réunion des feuillets de $\mathcal{P}$;
2) soit

$$\Gamma = \{f_1, \ldots, f_{n-d} = 0\,,\, g > 0\} \quad \text{un feuillet de } \mathcal{P}\ ;$$

l'ensemble $\Gamma \cap W$ est une sous-variété lisse, sa dimension d_Γ ne dépend que de Γ et $\mathcal{H}$: il existe $I_\Gamma \subset \{1, \ldots, q\}$ de cardinal minimal tel que l'espace tangent à $\Gamma \cap W$ en tout point x est $\left(\bigcap_j \ker \mathrm{d}f_j(x)\right) \cap \left(\bigcap_{i\in I_\Gamma} \ker \omega_i(x)\right)$;
3) la restriction de π à la sous-variété $\Gamma \cap W$ est une immersion.

Notons Z la réunion des feuillets Γ pour lesquels d_Γ est strictement inférieur à n. D'après le théorème du rang, la frontière de $\pi(W)$ est contenue dans l'ensemble $\pi(Z \cap W)$.

Pour prouver le lemme de Sard–Wilkie il reste à prouver l'existence de la constante K. Il suffit de raisonner sur un feuillet $\Gamma = \{f_1, \dots, f_\ell = 0, g > 0\}$ de $\mathcal{P}$ pour lequel d_Γ est strictement inférieur à n. Contrairement à la frontière de $\pi(W)$, les ensembles $\pi(Z \cap W)$ et $\pi(\Gamma \cap W)$ ne sont pas nécessairement compacts. En particulier si $y \in \mathbb{R}^n$, il n'existe pas toujours $x \in \pi(Z \cap W)$ qui réalise la distance de y à $\pi(\Gamma \cap W)$. C'est pourquoi nous recouvrons les tubes $\mathrm{Tub}\big(\pi(\Gamma \cap W), \varepsilon\big)$ par des ensembles dont nous estimons les volumes.

D'après le théorème de Sard, l'ensemble D des $\eta \in \,]0\,,1[$ pour lesquels $\{g = \eta\} \cap \Gamma \cap W$ est une sous-variété compacte est dense. Soient $\eta \in D$ et $\varepsilon \in \,]0\,,1[$. On note T^ε (resp. T^ε_η) le fibré des couples (x, u) où x est dans $\Gamma \cap W$ (resp. $\{g = \eta\} \cap \Gamma \cap W$) et $u \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur de norme strictement inférieure à ε et orthogonal à l'espace tangent $T_x(\Gamma \cap W)$ (resp. $T_x\big(\{g = \eta\} \cap \Gamma \cap W\big)$). Ce sont des variétés de dimension n. Soit p l'application de $\mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui au couple (x, u) associe $\pi(x) + u$. Pour $\delta > 0$, si $\eta \in D$ est petit, le tube $\mathrm{Tub}\big(\pi(\Gamma \cap W), \varepsilon\big)$ est contenu dans la réunion des ensembles $p(T^\varepsilon)$ et $p(T^{\varepsilon+\delta}_\eta)$.

Il suffit donc de montrer qu'il existe une constante K indépendante de $\eta \in D$, $\varepsilon \in \,]0\,,1[$ et W telle que les volumes des ensembles $p(T^\varepsilon)$ et $p(T^\varepsilon_\eta)$ sont majorés par $K\varepsilon/2$. On note S et S_η les lieux singuliers des restrictions de p à T^1 et T^1_η. Les restrictions de p à $T^\varepsilon \setminus S$ et à $T^\varepsilon_\eta \setminus S_\eta$ sont des immersions. On munit les ensembles $T^\varepsilon \setminus S$ et $T^\varepsilon_\eta \setminus S_\eta$ des métriques images réciproques de la métrique euclidienne par p. Notons ∂T^t et ∂T^t_η les variétés

$$T^1 \cap \big\{\|u\| = t\big\} \quad \text{et} \quad T^1_\eta \cap \big\{\|u\| = t\big\}\,.$$

D'après le théorème de Sard, les volumes des ensembles $p(T^\varepsilon)$ et $p(T^\varepsilon_\eta)$ sont égaux à ceux des ensembles $p(T^\varepsilon \setminus S)$ et $p(T^\varepsilon_\eta \setminus S_\eta)$. Ils sont donc majorés par ceux des ensembles $T^\varepsilon \setminus S$ et $T^\varepsilon_\eta \setminus S_\eta$. D'après le théorème de Fubini, les volumes de ces derniers sont égaux aux intégrales $\int_0^\varepsilon v(t)\,dt$ et $\int_0^\varepsilon v(\eta, t)\,dt$ où $v(t)$ et $v(\eta, t)$ sont les volumes $(n-1)$-dimensionnels des variétés $\partial T^t \setminus S$ et $\partial T^t_\eta \setminus S_\eta$.

Pour conclure, nous majorons uniformément les volumes $v(t)$ et $v(\eta, t)$. Fixons une boule fermée B de $\mathbb{R}^n$ qui contient les points situés à une distance inférieure à 1 de $\pi(\Gamma)$ et notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des droites affines de $\mathbb{R}^n$ qui rencontrent B. Puisque les restrictions de p aux variétés de dimension $(n-1)$ $\partial T^t \setminus S$ et $\partial T^t_\eta \setminus S_\eta$ sont des immersions, d'après la formule de Cauchy–Crofton ([Sa], [La]), il existe une mesure sur $\mathcal{B}$ canoniquement obtenue à partir de la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$v(t) = \int_{\ell\in\mathcal{B}} \#(p^{-1}(\ell)\cap(\partial T^t\setminus S)) \quad \text{et} \quad v(\eta,t) = \int_{\ell\in\mathcal{B}} \#(p^{-1}(\ell)\cap(\partial T^t_\eta\setminus S_\eta))\,.$$

Si $\ell \in \mathcal{B}$, les ensembles $p^{-1}(\ell) \cap \partial T^t$ et $p^{-1}(\ell) \cap \partial T^t_\eta$ sont des ensembles pfaffiens. Par exemple il existe une matrice L à coefficients bornés par 1 et un point $b \in B$ tels que l'ensemble $p^{-1}(\ell)\cap\partial T^t_\eta$ est défini par les conditions suivantes : $(x,u) \in (\Gamma \cap W) \times \mathbb{R}^n$, $||u|| = t$, $L(x-b) = 0$, $g = \eta$ et

$$\mathrm{d}g \wedge \Big(\bigwedge_j \mathrm{d}f_j\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{i\in I_\Gamma} \omega_i\Big) \wedge \Big(\sum_k u_k\,\mathrm{d}u_k\Big) = 0$$

D'après le théorème de finitude pfaffien de [MR], il existe un entier N indépendant du choix de W, des réels $\eta \in D$, $t \in \,]\,0\,,1\,[$ et de la droite $\ell \in \mathcal{B}$ qui majore le nombre de composantes connexes de ces ensembles : ici les paramètres sont η, t, L et b. Par conséquent, d'après le théorème de Sard, à t fixé, pour presque toute droite ℓ, les cardinaux des ensembles $p^{-1}(\ell) \cap (\partial T^t \setminus S)$ et $p^{-1}(\ell) \cap (\partial T^t_\eta \setminus S_\eta)$ sont majorés par N. Le nombre $2\int_{\mathcal{B}} N$ est la constante K recherchée.

3. Propriétés des T^∞-pfaffiens

3.1 Démonstration de la proposition 1

Preuve de i).— La stabilité de la classe des $\mathcal{H}$-ensembles compacts par limite de Haussdorff résulte du procédé d'extraction diagonale de Cantor. En effet, soit K^ℓ, $\ell \in \mathbb{N}$, une suite de $\mathcal{H}$-ensembles compacts de limite de Haussdorff K. Chaque K^ℓ s'écrit

$$K^\ell = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \lim_{i\to\infty} \pi(W^\ell_{i,j})\,.$$

Puisque K^ℓ est compact et que l'union est croissante, K^ℓ est la limite de Haussdorff

$$\lim_{j\to\infty}\lim_{i\to\infty} \pi(W^\ell_{i,j})\,.$$

En utilisant deux fois le procédé d'extraction diagonale de Cantor, on obtient

$$K = \lim_{\ell \to \infty} \pi(W^{\ell}_{i(\ell),j(\ell)})$$

où $i(\ell)$ et $j(\ell)$ sont des suites strictement croissantes d'entiers. Le compact K est donc un $\mathcal{H}$-ensemble.

Preuve de ii).— Le semi-analytique X est la réunion de semi-analytiques bornés

$$X_i = \{f_{i,1}, \ldots, f_{i,k} = 0\,,\ g_{i,1}, \ldots, g_{i,\ell} > 0\}\,, \quad i \leq s$$

où les $f_{i,j}$ et les $g_{i,j}$ sont analytiques au voisinage de $\overline{X}_i$. Soit Z le semi-analytique

$$Z = \bigcup_{i \leq s} \{(x,t) \in X_i \times \,]0\,,1[\ \mid g_{i,1}(x), \ldots, g_{i,\ell}(x) \geq t\}\,.$$

Le T^{∞}-système

$$\mathcal{H}^{\infty} = \Big(n,\ m+1,\ \big(M_i \times \mathbb{R}, \omega_i\big)_{i \leq q},\ (\mathbb{R}^{n+m+1}, \mathrm{d}t),\ Z\Big)$$

convient. En effet, si W est un pfaffien associé à $\mathcal{H}$, les ensembles

$$W_j = \left\{ \left(x, \frac{1}{j}\right) \in Z \;\middle|\; x \in W \right\}, \quad j \in \mathbb{N}$$

sont des pfaffiens compacts associés à $\mathcal{H}^{\infty}$. L'ensemble $\pi(W)$ est un $\mathcal{H}^{\infty}$-ensemble : c'est la réunion de la famille croissante $\big(p(W_j)\big)_{j \in \mathbb{N}}$ où p désigne la projection canonique associée à $\mathcal{H}^{\infty}$.

Preuve de iii).— L'existence de $\mathcal{H}_p$ résulte des propriétés suivantes.

Soient $A \subset \mathbb{R}^n$ et $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de compacts de $\mathbb{R}^n$. Si A est compact et si cette suite converge vers A, alors la suite $\big(p(A_i)\big)_{i \in \mathbb{N}}$ converge vers $p(A)$. Si la suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'union A, alors la suite $\big(p(A_i)\big)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'union $p(A)$.

Preuve de iv).— Soit

$$A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \lim_{i\to\infty} \pi(W_{i,j})$$

un $\mathcal{H}$-ensemble. D'après le théorème de finitude pfaffien, il existe un entier N majorant le nombre de composantes connexes de tout ensemble pfaffien associé à $\mathcal{H}$. Cet entier majore donc le nombre de composantes connexes des ensembles $W_{i,j}$, de leurs images $\pi(W_{i,j})$ par π, des limites de Haussdorff $\lim_{i\to\infty} \pi(W_{i,j})$ et enfin de A qui est la réunion de la famille croissante de compacts $\lim_{i\to\infty} \pi(W_{i,j})$. □

3.2 Démonstration de la proposition 2

Preuve de i).— L'existence de $\mathcal{H}_X$ résulte des propriétés suivantes.

- Si V est une feuille de Rolle associée au couple de Pfaff (M,ω), le produit $V \times \mathbb{R}^m$ est une feuille de Rolle associée au couple de Pfaff $(M \times \mathbb{R}^m, \omega)$.
- Soient $A \in \mathbb{R}^n$, $A' \in \mathbb{R}^{n'}$ et $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(A'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des suites de compacts des espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{n'}$. Si ces suites convergent vers A et A', alors la suite produit converge vers $A \times A'$. Si ce sont des suites croissantes d'unions A et A', alors la suite produit est une suite croissante d'union $A \times A'$.

Preuve de ii).— Soient

$$A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \lim_{i\to\infty} \pi(W_{i,j}) \quad \text{et} \quad A' = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \lim_{i\to\infty} \pi'(W'_{i,j})$$

des T^∞-pfaffiens associés aux systèmes

$$\mathcal{H} = \left(n,\, m,\, (M_i,\omega_i)_{i\leq q},\, X\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}' = \left(n,\, m',\, (M'_i,\omega'_i)_{i\leq q'},\, X'\right).$$

On note Z le semi-analytique

$$Z = \left\{(x,z,z',t) \in \mathbb{R}^n \times X \times X' \times [\,0\,,\,1\,] \,\middle|\, \|x-\pi(z)\|^2 + \|x-\pi'(z')\|^2 \leq t\right\}$$

où π et π' sont les projections canoniques associées à $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$. On pose $d = 2n + m + m' + 1$. Montrons que le T^∞-système $\mathcal{H}_\cap$ égal à

$$\Big(n,\ d,\ \big(\mathbb{R}^n \times M_i \times \mathbb{R}^{n+m'+1}, \omega_i\big)_{i\leq q},\\ \big(\mathbb{R}^{2n+m} \times M_i' \times \mathbb{R}, \omega_i'\big)_{i\leq q'},\ (\mathbb{R}^{n+d}, \mathrm{d}t),\ Z\Big)$$

convient. Si $j \in \mathbb{N}$ on note

$$A_j = \lim_{i\to\infty} \pi(W_{i,j}) \quad \text{et} \quad A_j' = \lim_{i\to\infty} \pi'(W_{i,j}')$$

et si $i \in \mathbb{N}$, on note $\varepsilon_{i,j}$ et $\varepsilon_{i,j}'$ les distances de Haussdorff entre $\pi(W_{i,j})$ et A_j et entre $\pi'(W_{i,j}')$ et A_j'. Alors les ensembles

$$B_{i,j} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \exists\, y \in \pi(W_{i,j}),\ \exists\, y' \in \pi'(W_{i,j}'),\\ \|x-y\|^2 + \|x-y'\|^2 \leq \varepsilon_{i,j}^2 + \varepsilon_{i,j}'^2\Big\}$$

sont des projections de pfaffiens compacts associés à $\mathcal{H}_\cap$. De plus à $j \in \mathbb{N}$ fixé, la suite $B_{i,j}$ converge vers l'intersection $A_j \cap A_j'$. L'ensemble $A \cap A'$ est donc un $\mathcal{H}_\cap$-ensemble.

L'existence de $\mathcal{H}_\cup$ résulte de la proposition 1 et de l'existence de $\mathcal{H}_\times$ et de $\mathcal{H}_\cap$. En effet, il existe une boule euclidienne B contenant A et A'; la réunion $A \cup A'$ est l'image par la projection canonique de $B \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sur B de l'ensemble $(B \times A \times A') \cap \big\{(x, y, y') \in B^3 \mid x = y \text{ ou } x = y'\big\}$.

3.3 Démonstration de la proposition 3

On note Z le semi-analytique et K la constante obtenus en appliquant le lemme de Sard–Wilkie pfaffien au T^∞-système $\mathcal{H}$. On note $\mathcal{H}_Z$ le T^∞-système obtenu en remplaçant X par Z dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_Z^\infty$ le T^∞-système obtenu en appliquant la proposition 1 à $\mathcal{H}_Z$. Soit

$$A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \lim_{i\to\infty} \pi(W_{i,j})$$

un $\mathcal{H}$-ensemble. Si i, $j \in \mathbb{N}$, d'après le lemme de Sard–Wilkie pfaffien appliqué au pfaffien compact $W_{i,j}$ associé à $\mathcal{H}$, la frontière de $\pi(W_{i,j})$ est contenue dans le $\mathcal{H}_Z^\infty$-ensemble compact $\overline{\pi(W_{i,j} \cap Z)}$. Or, si $\varepsilon \in \,]\,0\,,\,1\,[$, le tube $\mathrm{Tub}\big(\overline{\pi(W_{i,j} \cap Z)}, \varepsilon\big)$ est égal à $\mathrm{Tub}\big(\pi(W_{i,j} \cap Z), \varepsilon\big)$. Son volume est donc majoré par $K\varepsilon$. Quitte à extraire on peut supposer que les suites $\left(\overline{\pi(W_{i,j} \cap Z)}\right)_{i \in \mathbb{N}}$ convergent vers des $\mathcal{H}_Z^\infty$-ensembles compacts B_j et que la suite $\left(B_j\right)_{j \in \mathbb{N}}$ ainsi obtenue converge vers un $\mathcal{H}_Z^\infty$-ensemble compact B associé à $\mathcal{H}_Z^\infty$. D'après le lemme suivant, le T^∞-pfaffien compact B est négligeable et contient la frontière $\overline{A} \setminus \mathrm{int}(A)$ de A.

LEMME. — *Soient A et B deux compacts, $\left(A_i\right)_{i \in \mathbb{N}}$ et $\left(B_i\right)_{i \in \mathbb{N}}$ deux suites de compacts de $\mathbb{R}^n$ convergeant vers A et B.*

i) Si, pour $i \in \mathbb{N}$, le compact B_i contient la frontière $A_i \setminus \mathrm{int}(A_i)$ de A_i, alors le compact B contient la frontière $A \setminus \mathrm{int}(A)$ de A. Si de plus la suite $\left(A_i\right)_{i \in \mathbb{N}}$ est croissante, alors le compact B contient la frontière $\overline{A'} \setminus \mathrm{int}(A')$ de la réunion A' des A_i.

ii) Supposons qu'il existe $K > 0$ tel que pour $i \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in \,]0\,,1\,[$, le volume du tube $\mathrm{Tub}(B_i, \varepsilon)$ des points situés à une distance de B_i strictement inférieure à ε est majoré par $K\varepsilon$. Alors, si $\varepsilon \in \,]0\,,1\,[$, le volume du tube $\mathrm{Tub}(B, \varepsilon)$ est majoré par $K\varepsilon$.

Preuve. — Pour prouver i) il suffit de remarquer que si a est un point de $A \setminus \mathrm{int}(A)$ (ou de $\overline{A'} \setminus \mathrm{int}(A')$) et si $\varepsilon > 0$, alors pour $i \in \mathbb{N}$ assez grand, la boule $\{\|x - a\| < \varepsilon\}$ contient un point a_i de A_i et un point c_i hors de A_i : elle contient donc un point b_i de $A_i \setminus \mathrm{int}(A_i)$ (convexité des boules euclidiennes!).

Pour prouver ii), il suffit de remarquer que si $\varepsilon \in \,]0\,,1\,[$ et $\delta > 0$, alors pour $i \in \mathbb{N}$ assez grand le tube $\mathrm{Tub}(B, \varepsilon)$ est inclus dans le tube $\mathrm{Tub}(B_i, \varepsilon + \delta)$.

4. Démonstration du théorème 2

En adaptant au cadre T^∞-pfaffien des arguments de [Wi], nous indiquons comment conclure la preuve du théorème 2 à partir des trois propositions. Certaines idées sont présentes dans l'étude des semi-analytiques [Lo] et des sous-analytiques [Ga] mais, comme chez Wilkie [Wi], la mesure de Lebesgue remplace ici la dimension. D'après les propositions 1 et 2, il suffit de prouver par récurrence les affirmations suivantes.

AFFIRMATION $\mathbf{A}_n$

Soit A un T^∞-pfaffien relativement compact dans $]0\,,1\,[^n$. La différence $]0\,,1\,[^n \setminus A$ et ses composantes connexes sont des T^∞-pfaffiens.

AFFIRMATION $\mathbf{B}_n$

Soit B un T^∞-pfaffien négligeable de $\mathbb{R}^n$. Il existe une partition finie de B en T^∞-pfaffiens $(F_i)_{i\le r}$ et des hyperplans $(H_i)_{i\le r}$ engendrés par des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété suivante. Si $i = 1, \ldots, r$, F_i est le graphe d'une fonction continue définie sur le projeté orthogonal de F_i sur H_i et à valeurs dans la droite orthogonale à H_i.

Preuve de $\mathbf{A}_n$ et de $\mathbf{B}_n$

D'après la proposition 1, les affirmations $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{B}_1$ sont vraies. Supposons $\mathbf{A}_{n-1}$ et $\mathbf{B}_{n-1}$ vraies. La propriété $\mathbf{C}$ suivante résulte de $\mathbf{A}_{n-1}$ et des propositions 1 et 2.

PROPOSITION $\mathbf{C}$. — . *Soit B un T^∞-pfaffien négligeable de $\mathbb{R}^n$ et vérifiant $\mathbf{B}_n$. Si A est un T^∞-pfaffien, alors les composantes connexes de $B\cap A$ et $B \setminus A$ forment une famille finie de T^∞-pfaffiens qui vérifient $\mathbf{B}_n$.*

Montrons qu'il suffit de prouver $\mathbf{A}_n$ et $\mathbf{B}_n$ pour les T^∞-pfaffiens compacts et négligeables. Soit A un T^∞-pfaffien relativement compact dans $]\,0\,,\,1\,[^n$. D'après la proposition 3, il existe un T^∞-pfaffien compact négligeable B inclus dans $]\,0\,,\,1\,[^n$ et contenant la différence $\overline{A} \setminus \mathrm{int}(A)$. Certaines composantes connexes de $]\,0\,,\,1\,[^n \setminus B$ sont contenues dans $\mathrm{int}(A)$ et les autres sont disjointes de A. Supposons que B vérifie $\mathbf{A}_n$ et $\mathbf{B}_n$. D'après $\mathbf{A}_n$ et $\mathbf{C}$, les composantes connexes des ensembles $]\,0\,,\,1\,[^n \setminus B$, $B \cap A$ et $B \setminus A$ forment une partition finie de $]\,0\,,\,1\,[^n$ en T^∞-pfaffiens. L'ensemble A est la réunion de certains éléments de cette partition : il vérifie $\mathbf{A}_n$. S'il est négligeable, il est inclus dans B et, d'après $\mathbf{C}$, il vérifie $\mathbf{B}_n$.

Soit A un T^∞-pfaffien compact et négligeable inclus dans $]\,0\,,\,1\,[^n$. On note π_A la restriction à A de la projection canonique de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^{n-1}$. Nous cherchons une décomposition cylindrique de $]\,0\,,\,1\,[^n$ (voir [BCR], [BM] ou [BR]) en T^∞-pfaffiens connexes adaptés à A. Pour cela, nous montrons qu'il existe un T^∞-pfaffien S inclus dans $]\,0\,,\,1\,[^{n-1}$ et négligeable, une partition finie de $]\,0\,,\,1\,[^{n-1} \setminus S$ en T^∞-pfaffiens $R_0, \ldots, R_N$ tels que les $\pi_A^{-1}(R_i)$ sont les réunions de graphes de fonctions continues strictement ordonnées $f_{i,1} < \ldots < f_{i,i}$. Nous concluons alors en utilisant $\mathbf{A}_{n-1}$, $\mathbf{B}_{n-1}$ et $\mathbf{C}$.

Les ensembles

$$C^i = \{c \in\,]\,0\,,\,1\,[^{n-1} \mid \#\pi_A^{-1}(c) \ge i\}\,, \quad i \in \mathbb{N}\,,$$

sont des T^∞-pfaffiens. En effet, soit Z le semi-algébrique de $\mathbb{R}^{ni}$ défini par

$$Z = \Big\{\big((x_1,y_1), \ldots, (x_i,y_i)\big) \;\Big|\; x_1 = \cdots = x_i \in \mathbb{R}^{n-1}\,,\; y_1 < \ldots < y_i\Big\}$$

et soit p la projection de $\mathbb{R}^{ni}$ sur $\mathbb{R}^{n-1}$ qui à $\big((x_1, y_1), \dots, (x_i, y_i)\big)$ associe x_1. L'ensemble $Z \cap (A \times \cdots \times A)$ est un T^∞-pfaffien d'après la proposition 2 et l'ensemble C^i qui est égal à $p\big(Z \cap (A \times \cdots \times A)\big)$ est aussi un T^∞-pfaffien d'après la proposition 1.

D'après la proposition 2, il existe un T^∞-système $\mathcal{H}$ tel que les ensembles $\pi_A^{-1}(c)$ sont des $\mathcal{H}$-ensembles si $c \in \,]0\,,1[^{n-1}$. D'après la proposition 1, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que ces ensembles ont au plus N composantes connexes. Ainsi $C^{N+1} = C^{N+1+k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On pose $S^\infty = C^{N+1}$. Si $c \in S^\infty$, l'ensemble $\pi_A^{-1}(c)$ a au plus N composantes connexes et l'une d'elles est un intervalle non trivial.

D'après $\mathbf{A}_{n-1}$, les différences $C_i = \{c \in \,]0\,,1[^{n-1} \mid \#\pi_A^{-1}(c) = i\}$ sont des T^∞-pfaffiens. Pour $1 \leq j \leq i \leq N$, les ensembles

$$A_{i,j} = \big\{(c,t) \mid c \in C_i\,,\ \exists t_1 < \ldots < t_i\,,\ t = t_j \text{ et } (c,t_1), \ldots, (c,t_i) \in A\big\}$$

sont des graphes d'applications $f_{i,j}$ de C_i strictement ordonnées et, d'après les propositions 1 et 2, ce sont des T^∞-pfaffiens. Fixons i. Les lieux de discontinuité $\big\{c \in C_i \mid \#\big(\pi_A^{-1}(c) \cap \overline{A_{i,j}}\big) \geq 2\big\}$ des fonctions $f_{i,j}$ et leur réunion S_i sont aussi des T^∞-pfaffiens. D'après $\mathbf{A}_{n-1}$, l'ensemble $R_i = C_i \setminus S_i$ est un T^∞-pfaffien qui vérifie $\mathbf{A}_{n-1}$. De plus, les restrictions à R_i des fonctions $f_{i,j}$ sont continues, strictement ordonnées et la réunion de leurs graphes est l'ensemble $\pi_A^{-1}(R_i)$ qui est un T^∞-pfaffien (prop. 2). Soit C une composante connexe de R_i. On pose $f_{i,0} = 0$ et $f_{i,i+1} = 1$. Si $j = 0, \ldots, i$, l'ensemble $\big\{(c,t) \mid c \in C\,,\ f_{i,j} < t < f_{i,j+1}\big\}$ est connexe et d'après les propositions 1 et 2 c'est un T^∞-pfaffien. Par conséquent, le T^∞-pfaffien $\pi_A^{-1}(R_i)$ vérifie $\mathbf{B}_n$ et les composantes connexes de $\pi_A^{-1}(R_i)$ et de $\big(R_i \times \,]0\,,1[\,\big) \setminus \pi_A^{-1}(R_i)$ forment une partition finie de $R_i \times \,]0\,,1[$ en T^∞-pfaffiens.

Il reste à montrer que les ensembles $S^\infty, S_1, \ldots, S_N$ sont négligeables. Leur réunion S vérifie alors $\mathbf{B}_{n-1}$, le produit $S \times \,]0\,,1[$ vérifie $\mathbf{B}_n$ et, d'après $\mathbf{C}$, les composantes connexes de $\pi_A^{-1}(S)$ et de $\big(S \times \,]0\,,1[\,\big) \setminus \pi_A^{-1}(S)$ forment une partition finie de $S \times \,]0\,,1[$ en T^∞-pfaffiens qui vérifient $\mathbf{B}_n$.

Si $\varepsilon > 0$,

$$S^\infty(\varepsilon) = \big\{c \in S^\infty \mid \exists\,(c,t_0), \ldots, (c,t_N) \in A\,,\ \varepsilon < |t_i - t_j| \text{ si } i \neq j\big\}$$

est un T^∞-pfaffien (props 1 et 2). Par construction si $c \in S^\infty(\varepsilon)$ l'ensemble $\pi_A^{-1}(c)$ contient un intervalle de longueur supérieure à ε. Puisque A est négligeable, le théorème de Fubini implique que $S^\infty(\varepsilon)$ est négligeable. La réunion S^∞ de la famille croissante des $S^\infty(\varepsilon)$ est négligeable.

Soit $i = 1, \ldots, N$ et $\varepsilon > 0$. L'ensemble A étant fermé, par construction, l'ensemble S_i est inclus dans l'adhérence de

$$S_i(\varepsilon) = \{c \in C_i \mid \exists (c, t_1), (c, t_2) \in A\,,\ 0 < t_1 - t_2 < \varepsilon\}$$

qui est un T^∞-pfaffien (props 1 et 2). D'après la proposition 3 les ensembles $S_i(\varepsilon)$ et leurs fermetures $\overline{S_i(\varepsilon)}$ ont même mesure. Or la famille $S_i(\varepsilon)$ est une famille décroissante d'intersection vide. Les mesures des ensembles $S_i(\varepsilon)$ et $\overline{S_i(\varepsilon)}$ tendent donc vers 0 avec ε et S_i est négligeable.

Bibliographie

[BCR] BOCHNAK (J.), COSTE (M.) et ROY (F.) .— *Géométrie algébrique réelle*, Springer-Verlag, Grundlehren **87** (1986).

[BM] BIERSTONE (E.) et MILMAN (P.) .— *The local geometry of analytic mappings*, Universita di Pisa, TES Editrice Pisa (1988).

[BR] BENEDETTI (R.) et RISLER (J.-J.) .— *Real algebraic and semi-algebraic sets*, Hermann (1990).

[Ca] CANO (F.) .— *Reduction of the singularities of the non-dicritical singular foliations. Dimension three*, Am. J. of Math. **115** (1993), pp. 509-588.

[CC] CANO (F.) et CERVEAU (D.) .— *Desingularization of non-dicritical holomorphic foliations and existence of separatrices*, Acta Mathematica **169** (1992), pp. 1-103.

[CM] CANO (F.) et MATTEI (F.) .— *Hypersurfaces intégrales des feuilletages holomorphes*, Ann. de l'Inst. Fourier **42** (1992), pp. 49-72.

[CLM] CANO (F.), LION (J.-M.) et MOUSSU (R.) .— *Frontière d'une hypersurface pfaffienne*, Ann. Sci. de l'E.N.S., 4ème série, **28** (1995), pp. 591-646.

[Dr] VAN DEN DRIES (L.) .— *O-minimal structures*, preprint (1993).

[DM] VAN DEN DRIES (L.), MILLER (C.) .— *Geometric categories and O-minimal structures*, Duke Mathematical Journal **84**, n° 2 (1996), pp. 497-540.

[Ga] GABRIELOV (A. M.) .— *Projections of semi-analytic sets*, Funct. Anal. and Appl. **2** (1968), pp. 282-291.

[Go] GODBILLON (C.) .— *Géométrie différentielle et mécanique analytique*, Hermann (1969).

[Ha] HARDT (R. M.) .— *Topological properties of subanalytic sets*, Trans. A.M.S. **211** (1975), pp. 150-208.

[Kh] KHOVANSKII (A. G.) .— *Real analytic varieties with the finiteness property and complex abelian integrals*, Funct. Anal. and Appl. **18** (1984), pp. 119-127.

[La] LANGEVIN (R.) .— *Un peu de géométrie intégrale*, *Images des Mathématiques*, C.N.R.S. (1995), pp. 58-67.

[Li1] LION (J.-M.) .— *Densité des ensembles semi- pfaffiens*, Ann. Fac. Sci. de Toulouse série 6, **VII**, n° 1, 1998.

[Li2] LION (J.-M.) .— *Exemples de sous-ensembles sous-pfaffiens et contact entre sous-ensembles sous-pfaffiens*, preprint (1997).

[LR1] LION (J.-M.) et ROCHE (C. A.), .— *Topologie des hypersurfaces pfaffiennes*, Bulletin de la S.M.F. **124** (1996), pp. 35-59.

[LR2] LION (J.-M.) et ROLIN (J.-P.) .— *Homologie des ensembles semi-pfaffiens*, Ann. de l'Inst. Fourier **46** (1996), pp. 723-741.

[Lo] LOJASIEWICZ (S.) .— *Ensembles semi-analytiques*, I.H.E.S. (1965).

[MR] MOUSSU (R.) et ROCHE (C. A.) .— *Théorèmes de finitude uniforme pour les variétés pfaffiennes de Rolle*, Ann. de l'Inst. Fourier **42** (1992), pp. 393-420.

[MS] MARKER (D.) et STEINHORN (C.) .— *Definable types in* O-*minimal theories*, Journal of Symbolic Logic **59** (1994), pp. 185-198.

[Pi] PILLAY (A.) .— *Definability of types, and pairs of* O-*minimal structures*, Journal of Symbolic Logic **59** (1994), pp. 1400-1409.

[Ri] RISLER (J.-J.) .— *Complexité et géométrie réelle (d'après Khovanskii)*, Séminaire Bourbaki, 37ème année, vol. 1984/85, exp. 637, Astérisque **133/134** (1986), pp. 89-100.

[Ro] ROCHE (C. A.) .— *Densities for certains leaves of real analytic foliations*, Astérisque **222** (1994), pp. 373-387.

[Sa] SANTALÓ (L. A.) .— *Integral Geometry and geometric probability*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Addison-Wesley (1976).

[Te] TEISSIER (B.) .— *Sur la triangulation des morphismes sous-analytiques*, Pub. Math. I.H.E.S. **70** (1989), pp. 169-198.

[To] TOUGERON (J.-C.) .— *Algèbres analytiques topologiquement noethériennes, théorie de Hovanskii*, Ann. de l'Inst. Fourier **41** (1991), pp. 823-840.

[Wi] WILKIE (A.) .— *A general theorem of the complement and some new* O-*minimal structures*, preprint (1996).

[Yo] YOMDIN (Y.) .— *Metric properties of semialgebraic sets and mappings and their applications in smooth analysis*, Géométrie algébrique et applications, C. R. 2ème Conf. Int. La Rabida/Espagne 1984; III : Géométrie réelle. Systèmes différentiels et théorie de Hodge, Trav. Cours **24** (1987), pp. 165-183; Proc. of Larabida, Hermann (1985).