ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

HÉLÈNE MAUGENDRE

Discriminant d'un germe $(g, f) : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ et quotients de contact dans la résolution de $f \cdot g$

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 7, nº 3 (1998), p. 497-525

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1998_6_7_3_497_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VII, n° 3, 1998

Discriminant d'un germe $(g,f):(\mathbb{C}^2,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$ et quotients de contact dans la résolution de $f\cdot g^{(*)}$

HÉLÈNE MAUGENDRE[(1)]

RÉSUMÉ. — Soient f et g deux germes de fonctions analytiques de $(\mathbb{C}^2,0)$ dans $(\mathbb{C},0)$ sans branche commune, c'est-à-dire que si

$$f=\prod_{i\in I} f_i^{r_i} \quad \text{et} \quad g=\prod_{j\in J} g_j^{s_j}$$

sont des décompositions de f et g en leurs facteurs irréductibles distincts, alors $f_i\neq g_j$ pour tout i et tout j modulo une unité.

Dans [14], nous avons défini les quotients jacobiens de (g,f) et démontré que ce sont des invariants du type topologique de (g,f). Nous les avons calculés en fonction de la topologie de (g,f). Nous les étudions ici à travers la résolution minimale de $f\cdot g$. Ceci donne un autre moyen de calcul explicite des quotients jacobiens de (g,f) à l'aide de la résolution minimale de $f\cdot g$ (sect. 3). On décrit ensuite le comportement de croissance de ces quotients dans la résolution minimale de $f\cdot g$ (sect. 4). Dans le cas où g est une forme linéaire transverse à f, on retrouve les résultats de D. T. Lê, F. Michel et C. Weber dans [9]. Nous terminons enfin en donnant un exemple d'application de ces résultats, lequel constitue la réponse à une question de D. T. Lê et C. Weber (voir [11]) relative à leur étude de la conjecture jacobienne (sect. 5).

ABSTRACT. — Let f and g be two plane curves germs from $(\mathbb{C}^2,0)$ into $(\mathbb{C},0)$, without common branches, i.e., if

$$f=\prod_{i\in I} f_i^{r_i} \quad \text{and} \quad g=\prod_{j\in J} g_j^{s_j}$$

are decompositions of f and g into their distinct irreducible factors, then $f_i\neq g_j$, modulo units, for all i and j.

In [14], we have defined the jacobian quotients of (g,f) and we have proved that they are invariants of the topological type of (g,f). We have computed them in terms of the topology of (g,f). Here, we study them

(*) Reçu le 13 mars 1997, accepté le 30 septembre 1997

(1) CMI, 39 rue F.-Joliot-Curie, F-13453 Marseille Cedex 13 (France)
E-mail : maugendr@gyptis.univ-mrs.fr

in the minimal resolution of $f \cdot g$. It gives another way to compute the jacobian quotients of (g, f) (Sect. 3). Then we describe their behaviour in the minimal resolution of $f \cdot g$ (Sect. 4). In the particular case where g is a linear form transverse to f, we recover the results of D. T. Lê, F. Michel, C. Weber in [9]. Finally, we give an application ot these results, which constitutes the answer to a question of D. T. Lê and C. Weber (see [11]) concerning their study of the jacobian conjecture (Sect. 5).

AMS Classification : 14B05, 32S05, 32S45, 57M25.

1. Introduction

Notations.— Si ε est un réel strictement positif, D^4_ε désigne la boule fermée de rayon ε centrée à l'origine de $\mathbb{C}^2$, dont le bord est la sphère S^3_ε. Le nombre d'enlacement dans S^3_ε est noté $\mathcal{L}(\cdot\,,\cdot)$. Enfin, si h_1 et h_2 sont des germes de fonctions analytiques à l'origine de $\mathbb{C}^2$, $(h_1)_o$ et $(h_1, h_2)_o$ désignent respectivement la multiplicité en l'origine de h_1 et la multiplicité d'intersection à l'origine entre h_1 et h_2.

1.1 Quotients jacobiens

On considère le germe d'application analytique Φ défini par :

$$(\mathbb{C}^2, 0) \xrightarrow{\Phi} (\mathbb{C}^2, 0)$$
$$(x, y) \longmapsto \big(g(x,y), f(x,y)\big)\,.$$

DÉFINITION.— *Le germe jacobien de (g, f), $\widehat{\mathcal{J}}$, est le produit des composantes du déterminant de la matrice jacobienne de Φ,*

$$D(\Phi) = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\,,$$

qui ne divisent pas $f \cdot g$. Le lieu des zéros réduit de $\widehat{\mathcal{J}}$ est un germe de courbe réduit appelé lieu jacobien de (g, f) et noté $\mathcal{J}$.

Remarques

(i) Si f et g sont lisses et transverses à l'origine, alors $\widehat{\mathcal{J}}$ est vide. Nous éliminons d'office l'étude de ce cas trivial.

(ii) Le type analytique du lieu jacobien $\mathcal{J}$ est un invariant du type analytique de Φ mais son type topologique n'est pas un invariant du type topologique de Φ ([14], [12]).

DÉFINITION. — *On appelle courbe discriminante de (g, f), l'image par Φ du lieu jacobien $\mathcal{J}$. On la note Δ.*

Désignons par (u, v) les coordonnées complexes de $\Phi(\mathbb{C}^2)$. Par définition, $\{u = 0\} = \Phi(\{g = 0\})$ n'est pas une branche de Δ. Donc, si δ représente une branche de Δ, il existe un nombre rationnel strictement positif q_δ/p_δ (où q_δ est premier à p_δ), un entier strictement positif m et une paramétrisation de Puiseux de δ de la forme ([1] ou [2]) :

$$u = v^{q_\delta/p_\delta}\left(a + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} b_k v^{k/m}\right)$$

où $a \in \mathbb{C}^*$, $b_k \in \mathbb{C}$.

DÉFINITION. — *L'ensemble des quotients jacobiens de (g, f) est égal à l'ensemble des nombres rationnels p_δ/q_δ, pour les branches δ de Δ.*

Par définition, cet ensemble est un "invariant du premier ordre" de la courbe discriminante du morphisme (g, f).

Remarque. — Si g est une forme linéaire transverse à f, $\widehat{\mathcal{J}}$ est le germe polaire de f pour la direction g, et les quotients jacobiens de (g, f) sont les *quotients polaires* de f ([18], [6] et [7]).

1.2 Présentation des résultats

Soit π la résolution minimale de $f \cdot g$ à l'origine. L'*arbre de résolution minimal de $f \cdot g$*, noté $A(f \cdot g)$, s'obtient comme suit.

Chaque composante irréductible E_S du diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(0)$ correspond à un sommet S de $A(f \cdot g)$. Si deux telles composantes s'intersectent, alors les sommets de $A(f \cdot g)$ qui les représentent sont reliés par une arête. À chaque sommet S, on ajoute autant de flèches qu'il existe de composantes irréductibles de la transformée stricte, $\overline{\pi^{-1}\left((f\cdot g)^{-1}(0)\backslash\{0\}\right)}$, de $(f\cdot g)^{-1}(0)$, qui intersectent E_S. Chaque flèche symbolise la transformée stricte d'une composante irréductible $f_i^{-1}(0)$ (resp. $g_j^{-1}(0)$) de $(f\cdot g)^{-1}(0)$, et est affectée du poids r_i (resp. s_j). Un sommet S est dit *de rupture* si le nombre de flèches et d'arêtes qui le rencontrent est au moins égal à trois. On oriente positivement chaque arête de $A(f\cdot g)$ qui se trouve sur un chemin (orienté), appelé *géodésique*, allant du premier sommet de $A(f\cdot g)$ (c.-à-d. du sommet représentant la composante du diviseur exceptionnel obtenue en éclatant l'origine dans $\mathbb{C}^2$) vers une quelconque flèche. Une telle orientation est appelée *sens géodésique*.

À partir de $A(f\cdot g)$, on peut construire l'arbre de résolution minimal coloré de $f\cdot g$, noté $A_c(f\cdot g)$. On l'obtient en marquant en rouge les géodésiques (flèches comprises) des branches de $f^{-1}(0)$ et en bleu celles de $g^{-1}(0)$. On appelle *branche morte* chaque partie connexe de l'arbre qui reste incolore.

DÉFINITION.— *Une curvette de E_S est un germe de courbe lisse qui intersecte E_S transversalement en un point lisse.*

Pour chaque sommet S de $A(f\cdot g)$, on choisit un germe de courbe réduit à l'origine de $\mathbb{C}^2$, noté $c(S)$, dont la transformée stricte est une curvette de E_S.

DÉFINITION.— *Le quotient de contact de (g,f) associé à un sommet S de $A(f\cdot g)$ est le nombre rationnel $\left(f,c(S)\right)_0/\left(g,c(S)\right)_0$, où $\left(f,c(S)\right)_0$ est la multiplicité d'intersection à l'origine entre f et $c(S)$.*

La section 2 présente des résultats connus qui seront utilisés dans la section 3 pour démontrer le théorème 1.1 suivant.

THÉORÈME 1.1.— *L'ensemble des quotients jacobiens de (g,f) est égal à l'ensemble des quotients de contact de (g,f) associés aux sommets de rupture de $A(f\cdot g)$.*

Ce résultat fournit une méthode de calcul algébrique des quotients jacobiens en terme de quotients de multiplicités d'intersection à l'origine de $\mathbb{C}^2$. Dans [14], la description topologique des quotients jacobiens nous avait permis de donner une première méthode de calcul au moyen d'entrelacs toriques itérés. Le caractère combinatoire de la méthode exposée ici présente un intérêt évident. En effet, le calcul des quotients jacobiens à partir de leur définition est généralement impossible. De plus, le procédé utilisé ici est totalement indépendant de celui donné dans [14]. Il permet ainsi une étude algébrique des quotients jacobiens, qui complète l'étude topologique qui en avait été faite dans [14].

Dans la section 4, on étudie le comportement de croissance des quotients de contact dans l'arbre de résolution minimal de $f \cdot g$. Comme le montrent D. T. Lê et C. Weber dans [10, § 2], le comportement de croissance des quotients de contact de (g, f) est essentiel pour lever l'indétermination locale de la fonction méromorphe f/g. On démontre le résultat suivant.

THÉORÈME 1.2.— *Le long d'une arête orientée positivement de $A_c(f \cdot g)$, il y a :*

(i) croissance stricte des quotients de contact si l'arête est unicolore rouge;

(ii) croissance non stricte des quotients de contact si par cette arête passent toutes les géodésiques rouges;

(iii) constance des quotients de contact si l'arête est incolore.

De la même manière, nous obtenons des résultats de décroissance le long des arêtes bleues.

Ces résultats ont permis de répondre négativement à la question suivante de D. T. Lê et C. Weber : *si f et g sont réduits (c.-à-d. $r_i = s_j = 1$ pour tout i et tout j) et si $\mathcal{J}$ est lisse à l'origine, a-t-on forcément f ou g lisse ?*

La motivation de ce problème résulte d'une étude par D. T. Lê et C. Weber de la conjecture jacobienne dans $\mathbb{C}^2$.

CONJECTURE JACOBIENNE.— *Étant donné F et G deux applications polynômiales de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$, on dit que (G, F) satisfait l'hypothèse jacobienne, si le déterminant de la matrice jacobienne de (G, F) est une constante complexe non nulle.*

Si (G, F) est un automorphisme de $\mathbb{C}^2$, alors (G, F) satisfait l'hypothèse jacobienne.

La conjecture jacobienne affirme que la réciproque est vraie.

Dans leur travaux, D. T. Lê et C. Weber considèrent une surface algébrique lisse X obtenue en éclatant des points de $\mathbb{C}P^2 \backslash \mathbb{C}^2$, et pour laquelle il existe des fonctions holomorphes $\widetilde{F}$ et $\widetilde{G}$ de X sur $\mathbb{C}P^1$ telles que, si i est l'inclusion naturelle de $\mathbb{C}^2$ dans X et j celle de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$, on ait le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "(\widetilde{F},\widetilde{G})"] & \mathbf{C}P \times \mathbf{C}P \\ \mathbf{C}^2 \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "j \circ (F,G)"'] & \end{tikzcd}$$

Si P désigne un point lisse d'une composante irréductible D de $X \backslash \mathbb{C}^2$, et U un voisinage de P dans X, on choisit des coordonnées locales pour que $D \cap U = \{x = 0\}$ et $P = (0,0)$. On note f et g les restrictions de $\widetilde{F}$ et $\widetilde{G}$ à U. Le problème général est de trouver des conditions nécessaires sur (g, f) pour que (G, F) satisfasse l'hypothèse jacobienne. Les conditions nécessaires évidentes sont les suivantes :

(i) f et g sont des germes réduits (donc $D(\Phi) = \widehat{\mathcal{J}}$) ;

(ii) f et g sont sans branche commune au voisinage de $P = (0,0)$.

De plus, si (G, F) satisfait l'hypothèse jacobienne, soit $\widehat{\mathcal{J}}(0,0) \neq 0$, et alors f et g sont lisses et transverses en $(0,0)$, soit $\mathcal{J} \cap U = D \cap U = \{x = 0\}$. Dans ce cas, D. T. Lê et C. Weber espéraient que l'un au moins des deux germes serait lisse.

Dans [11], on a fourni plusieurs types d'exemples de deux germes non lisses, dont le lieu jacobien est lisse. Ces exemples montrent que l'hypothèse *avoir lieu jacobien lisse* ne permet pas de caractériser la topologie de $f \cdot g$ de façon plus précise que dans les théorèmes 1.3 et 1.4.

THÉORÈME 1.3. — *Soient f et g deux germes réduits de fonctions analytiques à l'origine de $\mathbb{C}^2$ dont le lieu jacobien $\mathcal{J}$ est lisse. De plus, supposons qu'une composante irréductible f_0 de f soit transverse à g. Alors, soit g est lisse, soit f_0 est lisse et transverse à toute autre composante irréductible de f.*

THÉORÈME 1.4. — *Soient f et g deux germes réduits transverses à l'origine, dont le lieu jacobien $\mathcal{J}$ est lisse. Alors, il existe $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $b \geq a \geq 2$, tel que $f \cdot g$ soit topologiquement équivalent à $y(x^a - y^b)$.*

Les démonstrations de ces deux théorèmes (sect. 5) utilisent le théorème 1.2 dans le cas particulier où il y a un unique quotient jacobien.

2. Définitions et rappels

Pour tous les calculs effectués par la suite, nous choisissons des coordonnées de $\mathbb{C}^2$ pour que l'axe $x = 0$ soit transverse au germe produit $f \cdot g$.

Dans cette section (§ 2.1 et 2.2), nous commençons par donner quelques définitions utiles pour la suite de l'article. Au paragraphe 2.3, nous rappelons le résultat de [14] et nous établissons des correspondances avec l'arbre de résolution minimal de $f \cdot g$.

2.1 Donnée caractéristique de Puiseux

Commençons par rappeler une définition.

DÉFINITION.— *La multiplicité à l'origine d'un germe de fonction analytique de* $(\mathbb{C}^2, 0)$ *dans* $(\mathbb{C}, 0)$ *est égale au degré de la partie homogène de plus bas degré d'une série convergente de* $\mathbb{C}\{x, y\}$ *qui représente le germe* f. *Nous la notons* $(f)_0$.

Soit f^* une composante irréductible de f. Considérons un développement de Puiseux φ_* de $(f^*)^{-1}(0)$ donné par

$$\varphi_*(x) = \sum_{k \in \mathbb{Q},\, k \geq 1} a_k x^k$$

où les a_k sont des nombres complexes.

DÉFINITION.— *On définit la valuation de* φ_*, *notée* $\mathrm{val}(\varphi_*)$, *comme suit. Si* $\varphi_* = 0$, *on pose* $\mathrm{val}(\varphi_*) = -\infty$, *sinon*

$$\mathrm{val}(\varphi_*) = \min\{k \text{ tel que } a_k \neq 0\}.$$

Si pour tout k, *avec* $a_k \neq 0$, k *appartient à* $\mathbb{N}^*$, *alors* f^* *n'a pas de paire caractéristique de Puiseux.*

Sinon, soit $k_1 = \inf\{k \text{ tel que } a_k \neq 0 \text{ et } k \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}\}$. *Le nombre* k_1 *peut s'écrire* $k_1 = m_1/n_1$, *avec* $\mathrm{pgcd}(m_1, n_1) = 1$. *Le couple* (m_1, n_1) *est la* *première paire caractéristique de Puiseux de* f^*. *Soit* (m_j, n_j) *la* j*-ième paire caractéristique de Puiseux de* f^*. *Considérons*

$$k_{j+1} = \inf\left\{k \text{ tel que } a_k \neq 0\,,\ k > k_j \text{ et } k \notin \frac{1}{n_1 \cdots n_j}\mathbb{N}\right\}.$$

On écrit k_{j+1} *sous la forme*

$$k_{j+1} = \frac{m_{j+1}}{(n_1 \cdots n_{j+1})}$$

avec $\mathrm{pgcd}(m_{j+1}, n_{j+1}) = 1$, *et* $n_{j+1} > 1$. *Le couple* (m_{j+1}, n_{j+1}) *est la* $(j+1)$*-ième paire caractéristique de Puiseux de* f^*.

Il existe q *tel que si* $k > k_q$, *et* $a_k \neq 0$, *alors* k *appartient à* $(1/(n_1 \cdots n_q))\mathbb{N}$.

DÉFINITION.— *L'ensemble* $\{(m_1, n_1), (m_2, n_2), \ldots, (m_q, n_q)\}$ *constitue l'ensemble des paires caractéristiques de Puiseux de* f^*.

DÉFINITION.— *On appelle exposants caractéristiques de Puiseux de* f^*, *les nombres rationnels* $r_k = m_k/(n_1 \cdots n_k)$, *avec* $1 < r_k < r_{k+1}$, $1 \leq k \leq q$.

On a

$$\varphi_*(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} b_i x^{i/(n_1 \cdots n_q)} \quad \text{avec } b_i \in \mathbb{C}.$$

Soit f^{**} *une autre composante irréductible de* f *qui admet pour paires caractéristiques de Puiseux* $\{(m'_1, n'_1), \ldots, (m'_{q'}, n'_{q'})\}$. *Autrement dit, si* φ_{**} *est un développement de Puiseux de* $(f^{**})^{-1}(0)$, *on a*

$$\varphi_{**}(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} b'_j x^{j/(n'_1 \cdots n'_{q'})}$$

où $b'_j \in \mathbb{C}$.

DÉFINITION.— (Voir aussi [15, chap. 3]) *Soit* σ_* *(resp.* σ_{**}*) un générateur du groupe de Galois relatif à* φ_* *(resp.* φ_{**}*). Alors l'exposant de coïncidence entre* f^* *et* f^{**}, *noté* $\exp(f^*, f^{**})$, *est égal à :*

$$\exp(f^*, f^{**}) = \max_{i,j}\left\{\mathrm{val}\{\sigma_*^i(\varphi_*) - \sigma_{**}^j(\varphi_{**})\}\right\}$$

pour $i = 1, \ldots, (f^*)_0$ *et* $j = 1, \ldots, (f^{**})_0$.

DÉFINITION.— *La donnée caractéristique de Puiseux d'une composante irréductible f^* de f consiste en la réunion des exposants caractéristiques de Puiseux de f^* et des exposants de coïncidence entre f^* et toute autre composante irréductible de f.*

Remarque.— Un exposant caractéristique de Puiseux de f^* peut aussi être un exposant de coïncidence entre f^* et une autre composante irréductible de f.

DÉFINITION.— *La donnée caractéristique de Puiseux de f consiste en la réunion des ensembles qui constituent la donnée caractéristique de Puiseux de chaque composante irréductible de f.*

Remarque.— Par O. Zariski et M. Lejeune, la donnée caractéristique de Puiseux de f détermine le type topologique de f (voir aussi [15, chap. 3]).

2.2 Autres définitions

DÉFINITION.— *Le cône tangent réduit d'un germe f est le lieu des zéros réduit de la partie homogène de plus bas degré d'une série convergente de $\mathbb{C}\{x, y\}$ qui représente le germe f. C'est une réunion finie de droites.*

DÉFINITION.— *La valence d'un sommet S de $A(f \cdot g)$ est égale au nombre d'arêtes et de flèches qui rencontrent S.*

DÉFINITION.— *Deux germes sont dits transverses si leurs cônes tangents (réduits) n'ont aucune droite en commun.*

Remarque.— Le nombre d'arêtes et de flèches qui partent du premier sommet de $A(f \cdot g)$ est égal au nombre de droites du cône tangent réduit de $f \cdot g$. Par conséquent, lorsque deux germes f et g sont transverses, leurs transformées strictes se séparent au premier éclatement (dans la résolution de $f \cdot g$).

DÉFINITION.— *Un sommet caractéristique de $A(f \cdot g)$ est un sommet de rupture S qui provient d'un exposant caractéristique de Puiseux r_k de $f \cdot g$. On le note (S, r_k).*

Tout autre sommet de rupture S de $A(f \cdot g)$ est appelé sommet de coïncidence pur, et noté (S, r), où r est un exposant de coïncidence entre deux composantes irréductibles de $f \cdot g$.

Remarque.— Si S est un sommet de coïncidence pur et si aucun sommet caractéristique ne précède S, alors r est égal au nombre de sommets compris entre le premier sommet et S (tous deux étant comptés). Sinon, si $r_k = m_k/(n_1 \cdots n_k)$ est l'exposant caractéristique de Puiseux associé au dernier sommet caractéristique S' qui précède S, lorsque l'on parcours l'arbre $A(f \cdot g)$ dans le sens géodésique, alors r peut s'écrire sous la forme

$$r = \frac{m_k + m}{n_1 \cdots n_k},$$

où $m \in \mathbb{N}^*$, et si r_{k+1} existe, m vérifie $m_k + m < m_{k+1}/n_{k+1}$.

DÉFINITION.— *Soient h_1 et h_2 deux germes de fonctions analytiques à l'origine de $\mathbb{C}^2$. La multiplicité d'intersection à l'origine entre les germes de courbes $h_1^{-1}(0)$ et $h_2^{-1}(0)$, notée $\left(h_1, h_2\right)_o$, est égale à la dimension sur $\mathbb{C}$ de $\mathbb{C}\{x, y\}/(h_1, h_2)$, où (h_1, h_2) est l'idéal engendré par h_1 et h_2.*

Remarque.— Si h_1 et h_2 ont au moins une branche commune, alors $\left(h_1, h_2\right)_o$ est infinie.

Dans [4, p. 74], Fulton a démontré que cette définition est équivalente à la définition suivante.

DÉFINITION.— *Soient h_1 et h_2 deux germes de fonctions analytiques à l'origine de $\mathbb{C}^2$, sans branche commune, avec h_1 irréductible. Considérons une paramétrisation de Puiseux de h_1, au voisinage de l'origine, donnée par*

$$\begin{cases} x = t^n, n \text{ minimum} \\ y = \varphi(t). \end{cases}$$

(Le "n minimum" signifie que le pgcd *entre n et le degré de chacun des monômes de $\varphi(t)$ est égal à 1).*

La multiplicité d'intersection à l'origine entre les germes de courbes $h_1^{-1}(0)$ et $h_2^{-1}(0)$ est égale à la multiplicité à l'origine de $h_2\big(t^n, \varphi(t)\big)$ (voir aussi [2, chap. 9, partie 3, pp. 183-187]).

Remarque.— Si $f = \prod_{i=1}^{R} f_i^{r_i}$ et $g = \prod_{j=1}^{S} g_j^{s_j}$, alors nous avons la formule suivante :

$$(f,g)_o = \sum_{i=1}^{R} \sum_{j=1}^{S} r_i s_j (f_i, g_j)_o \, .$$

2.3 Décomposition de Waldhausen

J. Milnor a démontré que, si ε est un réel strictement positif suffisamment petit, alors la classe d'isotopie de l'entrelacs $K_f = f^{-1}(0) \cap S_\varepsilon^3$ ne dépend pas de ε (voir [16]).

DÉFINITION.— *L'entrelacs pondéré de $f = \prod_{i \in I} f_i^{r_i}$ est l'entrelacs K_f dans lequel on pondère par r_i la composante connexe de K_f qui correspond à f_i, $i \in I$.*

Dans [14], nous avons défini l'équivalence topologique entre deux paires de germes (g_1, f_1) et (g_2, f_2). Elle correspond à l'existence d'un homéomorphisme d'un voisinage de l'origine qui envoie $g_1^{-1}(0)$ sur $g_2^{-1}(0)$ et $f_1^{-1}(0)$ sur $f_2^{-1}(0)$ en respectant les poids de chaque composante irréductible. D'après le théorème de structure conique de J. Milnor [16, théorème 2.10, p. 18], si deux paires d'entrelacs pondérés sont isotopes, alors les paires de germes qui leurs sont associées sont topologiquement équivalentes. La réciproque est donnée par O. Saeki dans [17]. Par conséquent, étudier la topologie de la paire de germes (g, f) revient à caractériser la classe d'isotopie de la paire d'entrelacs pondérés (K_g, K_f).

Dans [14], nous avons démontré l'invariance topologique des quotients jacobiens de (g, f) en les calculant en fonction de la topologie de la paire d'entrelacs pondérés (K_g, K_f). Pour ce faire, nous avons considéré une décomposition de S_ε^3 en une réunion finie de variétés feuilletées en cercles — dites *variétés de Seifert* (pour plus de détails voir [5], [8] et [19]) — qui admettent les composantes de $K_{f \cdot g}$ pour feuilles. Une telle décomposition est appelée une décomposition de Waldhausen de S_ε^3 pour $K_{f \cdot g}$.

Remarque.— L'intersection entre deux telles variétés de Seifert est soit vide, soit constituée d'un unique tore.

En fait, nous nous sommes plus précisément ramenés à la décomposition minimale de Waldhausen de S^3_ε pour $K_{f\cdot g}$ (c.-à-d. lorsque le nombre de variétés de Seifert est minimal), notée

$$S^3_\varepsilon = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} V_i\,,$$

laquelle est unique à isotopie près ([5], [8] et [19]). Nous avons alors considéré l'ensemble des quotients d'enlacement de (g,f) défini comme suit.

Soit ρ_i une feuille quelconque d'une variété V_i, $i\in\mathcal{I}$, de la décomposition minimale de Waldhausen de S^3_ε pour $K_{f\cdot g}$.

Remarque.— Dans la proposition 4 de [14], nous avons montré que chaque feuille ρ_i est isotope au nœud d'un germe irréductible à l'origine de $\mathbb{C}^2$, noté c. Par un théorème de Lefschetz, le nombre d'enlacement entre deux nœuds algébriques K_{c_1} et K_{c_2} est égal à la multiplicité d'intersection à l'origine entre c_1 et c_2. Par conséquent, $\mathcal{L}(K_{c_1},K_{c_2}) = \left(c_1,c_2\right)_o > 0$.

DÉFINITION.— *L'ensemble des quotients d'enlacement de (g,f) est égal à l'ensemble constitué des nombres rationnels $\mathcal{L}(K_f,\rho_i)/\mathcal{L}(K_g,\rho_i)$, $i\in\mathcal{I}$.*

L'unicité, à isotopie près, de la décomposition minimale de Waldhausen de S^3_ε pour $K_{f\cdot g}$ fournit l'invariance topologique de l'ensemble des quotients d'enlacement de (g,f).

Le résultat principal de [14] s'énonce comme suit.

THÉORÈME 2.1.— *À tout quotient d'enlacement de (g,f) correspond un unique quotient jacobien de (g,f), et réciproquement.*

Dans [15, chap. 10], [3] ou encore [8], on trouve une démonstration du fait que les liens qui existent entre les variétés V_i, $i\in\mathcal{I}$, et l'arbre de résolution minimal $A(f\cdot g)$ sont les suivants : il existe une correspondance biunivoque entre les variétés de Seifert de la décomposition minimale de Waldhausen de S^3_ε pour $K_{f\cdot g}$ et les sommets de rupture de $A(f\cdot g)$. Autrement dit, “à chaque variété V_i, $i\in\mathcal{I}$, correspond un unique sommet de rupture de $A(f\cdot g)$ et réciproquement”.

Dans [8, § 1.3.13], on a le résultat suivant.

PROPOSITION 2.2.— *Soit ρ_i une feuille d'une variété de Seifert V_i de la décomposition minimale de Waldhausen de S^3_ε pour $K_{f \cdot g}$. Soit S le sommet de rupture qui correspond à V_i. Soit $c(S)$ un germe irréductible à l'origine de $\mathbb{C}^2$ tel que la feuille ρ_i soit isotope, dans $S^3_\varepsilon \backslash K_{f \cdot g}$, au nœud $K_{c(S)}$.*

- *Si ρ_i est une feuille régulière (c'est-à-dire qu'il existe un voisinage tubulaire de ρ_i tel que toute feuille de ce voisinage soit homologue à ρ_i), alors la transformée stricte de $c(S)^{-1}(0)$ dans la résolution minimale de $f \cdot g$ est une curvette de la composante irréductible du diviseur exceptionnel symbolisée par S.*
- *Si ρ_i est une feuille exceptionnelle (c'est-à-dire qu'il existe un voisinage tubulaire de ρ_i tel qu'aucune feuille de ce voisinage ne soit homologue à ρ_i), alors la transformée stricte de $c(S)^{-1}(0)$ dans la résolution minimale de $f \cdot g$ est une curvette d'une composante irréductible du diviseur exceptionnel symbolisée par un sommet S' de valence égale à un et tel que la géodésique comprise entre S' et S ne passe par aucun sommet de rupture.*

3. Démonstration du théorème 1.1

Avant de débuter la démonstration du théorème 1, rappelons deux résultats essentiels contenus dans [15, chap. 3, § 4 et chap. 5, prop. 5.4.5, resp.]. Ce sont des conséquences directes de la résolution de $f \cdot g$. Le premier s'énonce comme suit.

PROPOSITION 3.1.— *Soient h_1 et h_2 deux composantes irréductibles de $f \cdot g$.*

Si h_1 et h_2 sont transverses, alors leurs géodésiques se séparent au premier sommet de $A(f \cdot g)$, et l'exposant de coïncidence entre h_1 et h_2 vaut 1.

Sinon, soit (S, r^*) le sommet de rupture qui correspond au lieu de séparation des géodésiques de h_1 et h_2. Alors, l'exposant de coïncidence entre h_1 et h_2 est égal à r^*.

Afin de présenter le deuxième résultat, précisons quelques notations.

On affecte tout sommet de rupture de $A(f \cdot g)$ d'un couple d'entiers (ℓ, α), où, avec les mêmes notations que dans la section 2, (les (m_i, n_i) sont les paires caractéristiques de Puiseux), on a :

- pour un sommet caractéristique (S, r_k) : si $k = 1$, on a $\alpha = n_1$ et $\ell = \ell_1 = m_1$, sinon, par récurrence, $\alpha = n_k$ et $\ell = \ell_k = m_k + n_k(\ell_{k-1} n_{k-1} - m_{k-1})$ où (S', r_{k-1}) est le sommet caractéristique qui précède (S, r_k);
- pour un sommet de coïncidence pur (S, r) : si aucun sommet caractéristique ne précède (S, r), alors $\alpha = 1$ et $\ell = N$, où N est égal au nombre de sommets qui précèdent S (S inclus); sinon, s'il existe au moins un sommet caractéristique (S', r_k) qui précède (S, r), avec $r_k = m_k/(n_1 \cdots n_k)$, et $r = (m_k + m)/(n_1 \cdots n_k)$, alors $\alpha = 1$, et $\ell = m + \ell_k n_k$, où, (ℓ_k, n_k) est le couple associé à (S', r_k).

PROPOSITION 3.2.— *Soient h_1 et h_2 deux composantes irréductibles de $f \cdot g$. Désignons par $(\ell_{i_0}, \alpha_{i_0})$, le couple d'entiers associé au sommet de rupture où se séparent les géodésiques de h_1 et h_2. Alors, nous avons*

$$(h_1, h_2)_{\text{o}} = (h_1)_{\text{o}} \cdot (h_2)_{\text{o}} \cdot \frac{\ell_{i_0}}{(\alpha_1 \cdots \alpha_{i_0 - 1})^2 \alpha_{i_0}}.$$

Remarque.— Le nombre rationnel $\ell_{i_0}/(\alpha_1 \cdots \alpha_{i_0-1})^2 \alpha_{i_0}$ dépend de l'exposant de coïncidence entre h_1 et h_2. Dans [20], Zariski a aussi obtenu des formules exprimant les multiplicités d'intersection en fonction des exposants de coïncidence.

Démonstration du théorème 1.1

D'après le théorème 2.1, il suffit de prouver que l'ensemble des quotients d'enlacement de (g, f) est égal à l'ensemble des quotients de contact associés aux sommets de rupture de $A(f \cdot g)$.

Montrons tout d'abord que l'ensemble des quotients d'enlacement est inclus dans l'ensemble des quotients de contact.

Soit ρ_i une feuille de V_i, $i \in \mathcal{I}$, et soit S le sommet de $A(f \cdot g)$ associé à V_i. D'après les propositions 4 de [14] et 2.2, il existe un germe de courbe irréductible à l'origine de $\mathbb{C}^2$, noté $c(S)$, tel que ρ_i soit isotope à $K_{c(S)}$. De plus, si ρ_i est une feuille régulière, alors la transformée stricte de $c(S)$ par π, est une curvette de la composante irréductible du diviseur exceptionnel qui correspond à S. On obtient directement le résultat escompté, à savoir

$$\frac{\mathcal{L}(K_f, \rho_i)}{\mathcal{L}(K_g, \rho_i)} = \frac{\mathcal{L}(K_f, K_{c(S)})}{\mathcal{L}(K_g, K_{c(S)})},$$

ou encore $(f, c(S))_{\text{o}}/(g, c(S))_{\text{o}}$ (par un théorème de Lefschetz).

Par ailleurs, si ρ_i est une feuille exceptionnelle de V_i, d'après les propositions 2.2, 3.1 et 3.2, le calcul explicite de $\big(f, c(S)\big)_o / \big(g, c(S)\big)_o$ fournit le résultat.

Réciproquement, soit $c(S)$ un germe de courbe réduit à l'origine de $\mathbb{C}^2$ dont la transformée stricte par π, est une curvette d'un sommet de rupture S de $A(f \cdot g)$. Soit V_i la variété de Seifert de la décomposition minimale de Waldhausen de S^3_ε pour $K_{f \cdot g}$ qui correspond à S. Alors, $K_{c(S)}$ est isotope à une feuille régulière ρ_i de V_i. Par conséquent,

$$\frac{\big(f, c(S)\big)_o}{\big(g, c(S)\big)_o} = \frac{\mathcal{L}(K_f, K_{c(S)})}{\mathcal{L}(K_g, K_{c(S)})} = \frac{\mathcal{L}(K_f, \rho_i)}{\mathcal{L}(K_g, \rho_i)} . \square$$

Remarque.— Attention, il n'existe pas de correspondance biunivoque entre l'ensemble des quotients jacobiens, donc d'enlacement, et l'ensemble des sommets de rupture de $A(f \cdot g)$. Ceci est dû au fait que plusieurs variétés V_i, $i \in \mathcal{I}$, peuvent avoir un même quotient d'enlacement. Illustrons ce fait par deux exemples.

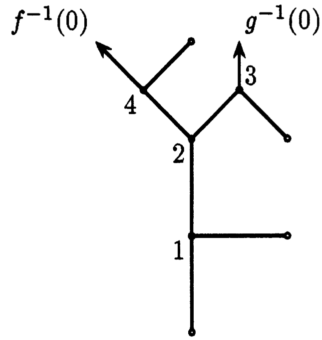
1) Soient

$$\begin{aligned} f(x,y) &= y^4 - 2x^3y^2 - 4x^6y - x^9 + x^6 \\ g(x,y) &= y^4 - 4x^2y^3 + 6x^4y^2 - 2x^3y^2 - 8x^6y + \\ &\qquad + 4x^5y - x^9 + 5x^8 - 2x^7 + x^6 \end{aligned}$$

Les germes f et g sont irréductibles. Ils ont tous deux pour cône tangent réduit la droite d'équation $y = 0$, et $\{(3,2); (9,2)\}$ pour paires caractéristiques de Puiseux. Leur exposant de coïncidence vaut deux. Le lieu jacobien $\mathcal{J}$ est constitué de trois branches dont un développement de Puiseux est respectivement donné par

$$\begin{aligned} y &= x^{3/2}(a_1 + \cdots) \\ y &= x^{3/2}\big(1 + x^{1/2}(a_2 + \cdots)\big) \\ y &= x^{3/2}\big(1 + x^{1/1}(a_3 + \cdots)\big), \; a_1,\, a_2,\, a_3 \in \mathbb{C}^* . \end{aligned}$$

L'arbre de résolution minimal de $f \cdot g$ est représenté dans le schéma suivant.

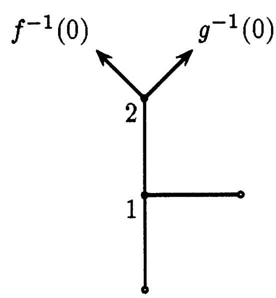


Les quotients de contact, donc jacobiens, ou encore d'enlacement de (g, f) associés aux sommets de rupture 1, 2, 3, 4 sont respectivement égaux à 1, 1, 14/15 et 15/14. (Pour le détail des calculs, voir la fin de la section 4.)

2) De même, les germes :

$$f(x, y) = x^3 - y^2$$
$$g(x, y) = x^3 - y^2 + x^{20}$$

ont un germe jacobien égal à $\widehat{\mathcal{J}}(x, y) = -40x^{19}y$. L'arbre de résolution minimal de $f \cdot g$ représenté ci-après, possède deux sommets de rupture affectés d'un même quotient de contact égal à 1.



À l'aide des théorèmes 1.1 et 2.1 et des propositions 2.2 et 3.2, on étudie les cas où $(f)_0/(g)_0$ est un quotient jacobien.

COROLLAIRE 3.3.— *Si le cône tangent réduit de $f \cdot g$ contient au moins trois droites ou une unique droite, alors $(f)_0/(g)_0$ est le quotient de contact de (g, f) associé au premier sommet de rupture de $A(f \cdot g)$.*

Démonstration. — Dans la suite, étant donné un sommet S de $A(f\cdot g)$, $c(S)$ désigne un germe de courbe irréductible à l'origine de $\mathbb{C}^2$, dont la transformée stricte est une curvette de la composante irréductible du diviseur exceptionnel qui correspond à S.

1) Si le cône tangent réduit de $f\cdot g$ contient au moins trois droites, alors le premier sommet de $A(f\cdot g)$, noté (1), est de rupture. Dans ce cas $c(1)$ est transverse à $f\cdot g$ par conséquent le quotient de contact associé à (1) est égal à :

$$\frac{(f,c(1))_0}{(g,c(1))_0} = \frac{(f)_0\cdot(c(1))_0}{(g)_0\cdot(c(1))_0} = \frac{(f)_0}{(g)_0}.$$

2) Si le cône tangent réduit de $f\cdot g$ possède exactement une droite, et si S_0 désigne le premier sommet de rupture de $A(f\cdot g)$, alors, pour chaque composante irréductible f_i de f et g_j de g, on a

$$\exp\big(f_i, c(S_0)\big) = \exp\big(g_j, c(S_0)\big) = C\,.$$

Ainsi
$$\frac{(f,c(S_0))_0}{(g,c(S_0))_0} = \frac{(f)_0\cdot(c(S_0))_0\cdot C}{(g)_0\cdot(c(S_0))_0\cdot C} = \frac{(f)_0}{(g)_0}\,.\ \square$$

Remarque

Dans le cas particulier où le cône tangent réduit de f possède exactement deux droites et est égal au cône tangent réduit de g, à isomorphisme analytique près, nous pouvons supposer que les cônes tangents de f et g sont respectivement de la forme ax^ny^m et $bx^{n'}y^{m'}$, n, m, n', $m'\in\mathbb{N}^*$ et a, $b\in\mathbb{C}^*$.

Si $nm'\neq n'm$, alors le cône tangent réduit de $D(\Phi)$, donc de $\widehat{\mathcal{J}}$, est égal au cône tangent réduit de f et de g et est donc constitué de deux droites transverses. (En effet, le cône tangent (non réduit) de $D(\Phi)$ a pour équation $(amx^ny^{m-1})(bn'x^{n'-1}y^{m'})-(anx^{n-1}y^m)(bm'x^{n'}y^{m'-1})=0$, soit $ab(nm'-n'm)x^{n+n'-1}y^{m+m'-1}=0$.)

Les exemples suivants montrent que si le cône tangent réduit de f possède exactement deux droites et est égal au cône tangent réduit de g et, si $nm'=n'm$, alors on ne peut pas savoir s'il existe une branche de $\mathcal{J}$ transverse à $f\cdot g$ on non.

- Soient par exemple les germes f et g définis par

$$f(x,y) = y(y^3 - x)$$
$$g(x,y) = (x^5 - y)(y^2 - x)\,.$$

Le cône tangent réduit de f et de g est constitué des droites d'équation $x = 0$ et $y = 0$. Le cône tangent du germe jacobien de f et g a pour équation

$$3y^3 = 0\,.$$

Le cône tangent réduit de $\widehat{\mathcal{J}}$ est donc contenu dans le cône tangent réduit de $f \cdot g$.

- Considérons maintenant les germes d'équation

$$f(x,y) = (x^2 - y)(y^2 - x)$$
$$g(x,y) = (x^3 - y)(y^3 - 2x)\,.$$

Comme dans l'exemple précédent, le cône tangent réduit de f et de g est constitué des droites d'équation $x = 0$ et $y = 0$. Cependant, le cône tangent du germe jacobien de f et g a pour équation

$$x^3 - y^3 = 0\,.$$

Il est donc constitué des droites d'équation :

$$x - y = 0$$
$$x + \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right) y = 0$$
$$x + \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right) y = 0\,.$$

Dans cet exemple, le cône tangent réduit de $\widehat{\mathcal{J}}$ est distinct du cône tangent réduit de $f \cdot g$.

Remarque

Si le cône tangent réduit de $f \cdot g$ possède exactement deux droites, et si le cône tangent réduit de f est différent du cône tangent réduit de g, alors le cône tangent réduit de $D(\Phi)$, donc de $\widehat{\mathcal{J}}$, est contenu dans le cône tangent réduit de $f \cdot g$. En effet, à isomorphisme analytique près, nous pouvons supposer que le cône tangent de f est de la forme $ax^n = 0$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, et que le cône tangent de g est de la forme $bx^{m_1}y^{m_2} = 0$, avec $b \in \mathbb{C}^*$, $m_1 \in \mathbb{N}$ et $m_2 \in \mathbb{N}^*$. (Remarquons que si $m_1 = 0$, alors f et g sont transverses.) Le cône tangent de $D(\Phi)$ est de la forme :

$$\frac{\partial(ax^n)}{\partial x} \cdot \frac{\partial(bx^{m_1}y^{m_2})}{\partial y} = 0\,,$$

soit

$$abnm_2x^{n+m_1-1}y^{m_2-1} = 0\,.$$

Par conséquent, le cône tangent réduit de $D(\Phi)$, donc de $\widehat{\mathcal{J}}$, est bien contenu dans le cône tangent réduit de $f \cdot g$.

4. Démonstration du théorème 1.2

La démonstration du théorème de croissance utilise le résultat intermédiaire suivant.

PROPOSITION 4.1.— *Soit h un germe de fonction analytique à l'origine de $\mathbb{C}^2$. Soient c et c' deux germes de courbes irréductibles à l'origine de $\mathbb{C}^2$, dont les transformées strictes sont des curvettes de composantes irréductibles du diviseur exceptionnel de la résolution de h, et tels que, dans $A(h \cdot c \cdot c')$, la géodésique de c soit contenue dans la géodésique de c'. Alors*

$$\frac{(h, c)_o}{(c)_o} \leq \frac{(h, c')_o}{(c')_o}\,.$$

Démonstration.— Il suffit de prouver que le résultat est vrai pour toute composante irréductible h_i de h. Soit S_{i_0} le sommet de rupture de $A(h \cdot c \cdot c')$ où se séparent les géodésiques de c et c'. Notons $(\ell_{i_0}, \alpha_{i_0})$ le couple d'entiers associé à S_{i_0}. Par définition de c, S_{i_0} est le dernier sommet de rupture sur la géodésique de c. Par conséquent :

$$(c)_o = \alpha_1 \cdots \alpha_{i_0}$$
$$(c')_o = \alpha_1 \cdots \alpha_{i_0} \alpha_{i_0+1} \cdots \alpha_{N_0}\,,$$

où N_0 est le nombre de sommets de rupture sur la géodésique de c'.

De plus, d'après la proposition 3.2, pour toute composante irréductible h_i de h, si $(\ell_{i_1}, \alpha_{i_1})$ (resp. $(\ell_{i_2}, \alpha_{i_2})$) est le couple associé au lieu de séparation des géodésiques de h_i et c (resp. h_i et c'), on obtient

$$\frac{(h_i, c)_o}{(c)_o} = (h_i)_o \cdot \frac{\ell_{i_1}}{(\alpha_1 \cdots \alpha_{i_1 - 1})^2 \alpha_{i_1}}$$

$$\frac{(h_i, c')_o}{(c')_o} = (h_i)_o \cdot \frac{\ell_{i_2}}{(\alpha_1 \cdots \alpha_{i_2 - 1})^2 \alpha_{i_2}}.$$

Envisageons le cas où $\exp(h_i, c) = \exp(h_i, c')$. Alors on a $(\ell_{i_1}, \alpha_{i_1}) = (\ell_{i_2}, \alpha_{i_2})$, et donc

$$\frac{(h_i, c)_o}{(c)_o} = \frac{(h_i, c')_o}{(c')_o}.$$

L'autre éventualité est $\exp(h_i, c) < \exp(h_i, c')$, alors $(\ell_{i_1}, \alpha_{i_1}) = (\ell_{i_0}, \alpha_{i_0})$ et il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $i_2 = i_0 + k$. On obtient

$$\frac{(h_i, c)_o}{(c)_o} = (h_i)_o \cdot \frac{\ell_{i_0}}{(\alpha_1 \cdots \alpha_{i_0 - 1})^2 \alpha_{i_0}}$$

$$\frac{(h_i, c')_o}{(c')_o} = (h_i)_o \cdot \frac{\ell_{i_0 + k}}{(\alpha_1 \cdots \alpha_{i_0 + k - 1})^2 \alpha_{i_0 + k}}.$$

Le lemme suivant permet de conclure $(h, c)_o / (c)_o < (h, c')_o / (c')_o$.

LEMME 4.2.— *On a l'inégalité*

$$\ell_{i_0} \alpha_{i_0} (\alpha_{i_0 + 1} \cdots \alpha_{i_0 + k - 1})^2 \alpha_{i_0 + k} < \ell_{i_0 + k}.$$

Démonstration.— La démonstration de ce lemme est sans difficulté et laissée aux soins du lecteur. Elle s'effectue par récurrence sur k, en distinguant les cas où les sommets de rupture S_{i_0} et S_{i_0+k}, associés respectivement à $(\ell_{i_0}, \alpha_{i_0})$ et $(\ell_{i_0+k}, \alpha_{i_0+k})$, sont de coïncidence pure ou caractéristiques. Dans les différents cas envisagés, on applique la remarque suivante.

Remarque.— À la section 3, la définition par récurrence des ℓ_k implique $\ell_k > \ell_{k-1} \alpha_k \alpha_{k-1}$.

On peut désormais effectuer la démonstration du théorème de croissance.

Démonstration du théorème 1.2

(i) Soient S_1 et S_2 deux sommets consécutifs situés sur une arête orientée unicolore rouge et tels que S_1 précède S_2. Notons c_1 et c_2 des germes de courbes irréductibles à l'origine de $\mathbb{C}^2$, dont les transformées strictes sont des curvettes des composantes irréductibles du diviseur exceptionnel qui correspondent à S_1 et S_2 respectivement. Pour toute composante irréductible g_j de g, soit k_j le nombre rationnel strictement positif tel que $(g_j, c_1)_o = (g_j)_o \cdot (c_1)_o \cdot k_j$. Le calcul de k_j fourni par la proposition 3.2, implique que $(g_j, c_2)_o = (g_j)_o \cdot (c_2)_o \cdot k_j$. Par ailleurs, d'après la proposition 4.1, pour toute composante irréductible f_i de f, nous avons

$$\frac{(f, c_1)_o}{(c_1)_o} \leq \frac{(f, c_2)_o}{(c_2)_o}.$$

En particulier, il existe une composante irréductible f_{i_0} de f dont la géodésique passe par S_1 et S_2, et donc par la démonstration de la proposition 4.1, $(f_{i_0}, c_1)_o/(c_1)_o < (f_{i_0}, c_2)_o/(c_2)_o$, ce qui implique $(f, c_1)_o/(c_1)_o < (f, c_2)_o/(c_2)_o$. Finalement on obtient

$$\frac{(f, c_1)_o}{(g, c_1)_o} = \frac{(f, c_1)_o}{(c_1)_o} \frac{1}{\sum_{j=1}^{s} s_j \cdot (g_j)_o \cdot k_j}$$

et

$$\frac{(f, c_2)_o}{(g, c_2)_o} = \frac{(f, c_2)_o}{(c_2)_o} \frac{1}{\sum_{j=1}^{s} s_j \cdot (g_j)_o \cdot k_j}$$

donc

$$\frac{(f, c_1)_o}{(g, c_1)_o} < \frac{(f, c_2)_o}{(g, c_2)_o}.$$

(ii) Reprenons les mêmes notations que ci-dessus, en considérant désormais S_1 et S_2 sur une arête où passent toutes les géodésiques rouges. Désignons par :

g_1 le produit des composantes irréductibles de g dont la géodésique passe par S_1,

g_2 le produit des composantes irréductibles de g dont la géodésique ne passe pas par S_1,

g_3 le produit des composantes irréductibles de g_1 dont la géodésique passe par S_2,

g_4 le produit des composantes irréductibles de g_1 dont la géodésique ne passe pas par S_2.

Nous avons $g = g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_3 \cdot g_4$.

Par hypothèse, $\exp(f_i, c_1)$ et $\exp(f_i, c_2)$ sont indépendants du choix de f_i et vérifient $\exp(f_i, c_1) < \exp(f_i, c_2)$. Par conséquent, d'après la proposition 3.2, il existe des constantes rationnelles strictement positives C_1 et C_2, $C_1 < C_2$, telles que

$$(f, c_1)_{\mathrm{o}} = (f)_{\mathrm{o}} \cdot (c_1)_{\mathrm{o}} \cdot C_1 \quad \text{et} \quad (f, c_2)_{\mathrm{o}} = (f)_{\mathrm{o}} \cdot (c_2)_{\mathrm{o}} \cdot C_2 \,.$$

Par ailleurs, si g_j divise g_1, nous avons $\exp(g_j, c_1) = \exp(f_i, c_1)$ quel que soit i. Ainsi,

$$(g_1, c_1)_{\mathrm{o}} = (g_1)_{\mathrm{o}} \cdot (c_1)_{\mathrm{o}} \cdot C_1 \,.$$

De même, par hypothèse, on obtient $(g_3, c_2)_{\mathrm{o}} = (g_3)_{\mathrm{o}} \cdot (c_2)_{\mathrm{o}} \cdot C_2$.

Par contre, si g_j divise g_4, $\exp(g_j, c_1) \leq \exp(g_j, c_2) < \exp(f_i, c_2)$ quel que soit i et, par conséquent,

$$(g_4, c_2)_{\mathrm{o}} = (c_2)_{\mathrm{o}} \cdot \sum_{g_j \mid g_4} s_j \cdot (g_j)_{\mathrm{o}} \cdot D_j \,,$$

où D_j dépend de j et vérifie $C_1 \leq D_j < C_2$.

Enfin on a

$$(g_2, c_2)_{\mathrm{o}} = (g_2, c_1)_{\mathrm{o}} = (c_2)_{\mathrm{o}} \cdot \sum_{g_j \mid g_2} s_j \cdot (g_j)_{\mathrm{o}} \cdot C_j \,,$$

où C_j dépend de j et $C_j < C_1$.

Par conséquent, prouver la croissance non stricte des quotients de contact le long d'une arête où passent toutes les géodésiques rouges revient à vérifier :

$$\frac{(f, c_1)_{\mathrm{o}}}{(g, c_1)_{\mathrm{o}}} \leq \frac{(f, c_2)_{\mathrm{o}}}{(g, c_2)_{\mathrm{o}}} \,.$$

Écrivant cette inégalité sous la forme $(f, c_1)_{\mathrm{o}} \cdot (g, c_2)_{\mathrm{o}} \leq (f, c_2)_{\mathrm{o}} \cdot (g, c_1)_{\mathrm{o}}$, on doit donc prouver

$$((f)_{\mathrm{o}} \cdot C_1) \cdot \left((g_3)_{\mathrm{o}} \cdot C_2 + \sum_{g_j \mid g_4} s_j \cdot (g_j)_{\mathrm{o}} \cdot D_j + \sum_{g_j \mid g_2} s_j \cdot (g_j)_{\mathrm{o}} \cdot C_j \right) \leq$$

$$\leq ((f)_{\mathrm{o}} \cdot C_2) \cdot \left((g_3)_{\mathrm{o}} \cdot C_1 + (g_4)_{\mathrm{o}} \cdot C_1 + \sum_{g_j \mid g_2} s_j \cdot (g_j)_{\mathrm{o}} \cdot C_j \right) .$$

Ceci est équivalent à vérifier $\sum_{g_j \mid g_4} s_j \cdot (g_j)_o \cdot D_j \leq (g_4)_o \cdot C_2$, ce qui est toujours vrai car $D_j < C_2$.

(iii) Appelons désormais S_1 un sommet de rupture de $A_c(f \cdot g)$ dont est issue une branche morte (le sommet S_1 est un sommet caractéristique). Soit S_2 un sommet quelconque sur la branche morte issue de S_1. Désignons par :

f_1 (resp. g_1) le produit des composantes irréductibles de f (resp. g) dont la géodésique passe par S_1,

f_2 (resp. g_2) le produit des composantes irréductibles de f (resp. g) dont la géodésique ne passe pas par S_1.

Remarque.— Aucune composante irréductible de $f \cdot g$ ne passe par S_2.

Quel que soit S_2 sur la branche morte issue de S_1, le sommet S_1 est le lieu de séparation des géodésiques de f_1 et c_2, et de g_1 et c_2, mais aussi de f_1 et c_1 et de g_1 et c_1. Par conséquent, en appliquant la formule de la proposition 3.2,

$$\frac{(f_1, c_1)_o}{(g_1, c_1)_o} = \frac{(f_1, c_2)_o}{(g_1, c_2)_o}.$$

De même, les géodésiques des branches de $f_2 \cdot g_2$ et c_1 se séparent aux mêmes sommets que les géodésiques des branches de $f_2 \cdot g_2$ et c_2. Nous en déduisons :

$$\frac{(f_2, c_1)_o}{(g_2, c_1)_o} = \frac{(f_2, c_2)_o}{(g_2, c_2)_o}.$$

Finalement, pour tout sommet S_2, nous obtenons

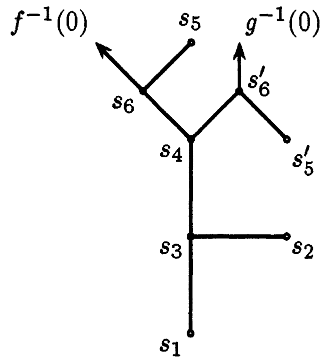
$$\frac{(f, c_1)_o}{(g, c_1)_o} = \frac{(f, c_2)_o}{(g, c_2)_o}. \square$$

Le premier exemple de la section 3 illustre de façon très précise ce théorème.

Rappelons que l'on y considère les deux germes suivants :

$$f(x, y) = y^4 - 2x^3y^2 - 4x^6y - x^9 + x^6$$
$$g(x, y) = y^4 - 4x^2y^3 + 6x^4y^2 - 2x^3y^2 - 8x^6y + +$$
$$+ 4x^5y - x^9 + 5x^8 - 2x^7 + x^6.$$

L'arbre de résolution minimal de $f \cdot g$ est le suivant.



Désormais, calculons de façon détaillée le quotient de contact associé à chacun des sommets de $A_c(f \cdot g)$.

Une curvette $c(S_1)$ du premier sommet de $A_c(f \cdot g)$ est un germe de courbe irréductible transverse lisse à $f \cdot g$. En utilisant les formules de la proposition 3.2, on obtient donc, pour le premier sommet de $A_c(f \cdot g)$, un quotient de contact égal à

$$\frac{(f, c(S_1))_o}{(g, c(S_1))_o} = \frac{(f)_o}{(g)_o} = 1\,.$$

Une curvette $c(S_2)$ du deuxième sommet de $A_c(f \cdot g)$ est un germe de courbe lisse irréductible tangent à $f \cdot g$. Les géodésiques de $c(S_2)$ et de f (resp. g) se séparent au sommet de rupture S_3 auquel est associé le couple $(\ell_{i_2}, \alpha_{i_2}) = (3, 2)$. À l'aide de la proposition 3.2, on obtient un quotient de contact pour S_2 égal à

$$\frac{(f, c(S_2))_o}{(g, c(S_2))_o} = \frac{(f)_o}{(g)_o} = 1\,.$$

Le calcul du quotient de contact associé au sommet S_3 est exactement le même. Ce quotient vaut encore 1.

En ce qui concerne S_4, les géodésiques de $c(S_4)$ et de f (resp. g) se séparent en S_4 où $(\ell_{i_4}, \alpha_{i_4}) = (7, 1)$. Finalement, on trouve

$$\frac{(f, c(S_4))_o}{(g, c(S_4))_o} = \frac{(f)_o}{(g)_o} = 1\,.$$

Étudions maintenant le cas du sommet S_5. Les géodésiques de $c(S_5)$ et f se séparent en S_6, auquel on associe le couple $(\ell_{i_6},\alpha_{i_6})=(15,2)$. Par contre, les géodésiques de $c(S_5)$ et g se séparent en S_4. On obtient alors

$$\frac{\big(f,c(S_5)\big)_o}{\big(g,c(S_5)\big)_o}=\frac{(f)_o}{(g)_o}\cdot\frac{15/8}{7/4}=\frac{15}{14}.$$

De la même manière, on a pour S_6 un quotient de contact égal à $15/14$.

Symétriquement, les géodésiques de $c(S'_5)$ (resp. $c(S'_6)$) et f se séparent en S_4, tandis que celles de $c(S'_5)$ (resp. $c(S'_6)$) et g se séparent en S'_6, auquel est associé le couple $(\ell_{i'_6},\alpha_{i'_6})=(15,2)$, ce qui donne un quotient de contact qui vaut

$$\frac{\big(f,c(S'_5)\big)_o}{\big(g,c(S'_5)\big)_o}=\frac{(f)_o}{(g)_o}\cdot\frac{7/4}{15/8}=\frac{14}{15},$$

pour S'_5 et pour S'_6.

5. Cas du lieu jacobien lisse

Dans cette partie, nous répondons par la négative à la question suivante posée par D. T. Lê et C. Weber : *Si f et g sont des germes réduits de fonctions analytiques à l'origine de $\mathbb{C}^2$ pour lesquels $\mathcal{J}$ est lisse, a-t-on forcément f ou g lisse ?*

On ne revient pas ici sur la motivation de ce problème exposée dans l'introduction, ni sur les contre-exemples donnés dans [11]. On présente une démonstration détaillée des théorèmes 1.3 et 1.4. L'argument fondamental utilisé est l'unicité du quotient jacobien de (g,f), dûe au fait que le lieu jacobien $\mathcal{J}$ de (g,f) est lisse. Par conséquent, d'après le théorème 1.1, tous les sommets de rupture de (g,f) ont même quotient de contact. Utilisant ce fait et le théorème 1.2, on démontre le théorème 1.3 que nous rappelons.

THÉORÈME. — *Soient f et g deux germes réduits de fonctions analytiques à l'origine de $\mathbb{C}^2$ dont le lieu jacobien $\mathcal{J}$ est lisse. De plus, supposons qu'une composante irréductible f_0 de f soit transverse à g. Alors, soit g est lisse, soit f_0 est lisse et transverse à toute autre composante irréductible de f.*

Démonstration du théorème 1.3

Par hypothèse, le cône tangent réduit de $f \cdot g$ contient au moins deux droites. Il est clair que le quotient de contact associé au premier sommet de $A_c(f \cdot g)$ est égal à $(f)_0/(g)_0$.

On montre que, si g n'est pas lisse et si f possède une branche f_0 transverse à g, alors f_0 est lisse et transverse aux autres composantes irréductibles de f.

Considérons tout d'abord le cas où le cône tangent réduit de $f \cdot g$ possède exactement deux droites. Comme f_0 est transverse à g, le cône tangent réduit de g est alors constitué d'une unique droite. Ainsi, du premier sommet de $A_c(f \cdot g)$ sont issues deux arêtes dont l'une est unicolore rouge et l'autre est soit unicolore bleue (si f est transverse à g), soit bicolore (sinon). Si g n'est pas lisse, d'après le théorème 1.2, le quotient de contact associé au premier sommet de rupture par lequel passent toutes les géodésiques bleues est inférieur ou égal à $(f)_0/(g)_0$.

Comme f_0 est transverse à g, les arêtes par lesquelles passent sa géodésique sont unicolores rouges. Si l'on suppose que f_0 n'est pas lisse et transverse aux autres composantes irréductibles de f, alors sa géodésique passe par un sommet de rupture unicolore rouge. D'après le théorème 1.2, le quotient de contact associé à ce sommet est strictement supérieur à $(f)_0/(g)_0$. Ceci contredit l'unicité du quotient de contact des sommets de rupture de $A_c(f \cdot g)$.

Dans le cas où le cône tangent réduit de $f \cdot g$ possède au moins trois droites, alors le premier sommet de $A_c(f \cdot g)$ est de rupture et admet $(f)_0/(g)_0$ pour quotient de contact.

Si l'on suppose que f_0 n'est pas lisse et transverse aux autres composantes irréductibles de f, comme dans le cas précédent, le théorème 1.2 permet de conclure. □

Le théorème 1.3 appliqué au cas particulier où les germes f et g sont transverses a pour conséquences les deux corollaires suivants dont résulte directement le théorème 1.4.

COROLLAIRE 5.1.— *Soient f et g deux germes réduits transverses à l'origine de $\mathbb{C}^2$, dont le lieu jacobien $\mathcal{J}$ est lisse.*

Si le cône tangent réduit de $f \cdot g$ est constitué d'exactement deux droites, alors un des deux germes est lisse.

Si le cône tangent réduit de $f \cdot g$ est constitué d'au moins trois droites, alors $\widehat{\mathcal{J}}$ est transverse à $f \cdot g$, et $f \cdot g \cdot \widehat{\mathcal{J}}$ est constitué de branches lisses et transverses deux à deux.

Démonstration. — Si le cône tangent réduit de $f \cdot g$ est constitué de deux droites, comme f et g sont transverses, alors du premier sommet de $A_c(f \cdot g)$ (de quotient de contact égal à $(f)_0/(g)_0$) sont issues une arête unicolore rouge et une unicolore bleue. Si l'on suppose que ni f ni g ne sont lisses, il existe un sommet de rupture unicolore rouge et un unicolore bleu. Dès lors, la décroissance des quotients de contact sur les arêtes unicolore bleues et leur croissance sur les arêtes unicolores rouges (théorème 1.2) contredit l'unicité du quotient de contact des sommets de rupture de $A_c(f \cdot g)$. En conclusion, soit f, soit g est lisse.

Si le cône tangent réduit de $f \cdot g$ possède au moins trois droites, alors le premier sommet de $A_c(f \cdot g)$ est de rupture, et par conséquent $(f)_0/(g)_0$ est le quotient de contact des sommets de rupture de $A_c(f \cdot g)$.

Si $\mathcal{J}$ est tangent à f (resp. g), à l'aide de la proposition 3.2, on montre qu'alors $(f,\mathcal{J})_0/(g,\mathcal{J})_0$ est strictement supérieur (resp. inférieur) à $(f)_0/(g)_0$. La proposition 5 de [14], rappelée en la proposition 5.2 ci-dessous, prouve que cette situation est impossible (car alors il n'y aurait pas unicité du quotient jacobien de (g,f)). Par conséquent $\mathcal{J}$ est transverse à $f \cdot g$.

PROPOSITION 5.2. — *L'ensemble des quotients jacobiens de (g,f) est égal à l'ensemble des nombres rationnels $(f,\widehat{\gamma})_0/(g,\widehat{\gamma})_0$ pour les composantes $\widehat{\gamma}$ de $\widehat{\mathcal{J}}$.*

On sait ainsi que $\mathcal{J}$ est lisse et transverse à $f \cdot g$. Si f (resp. g) n'est pas constitué de branches lisses et transverses deux à deux, cela signifie que, dans $A_c(f \cdot g)$, il existe un sommet de rupture unicolore rouge (resp. bleu). D'après le théorème 1.2, le quotient de contact qui lui correspond est strictement supérieur (respectivement inférieur) à $(f)_0/(g)_0$. D'où la contradiction. □

COROLLAIRE 5.3. — *Soient f et g deux germes réduits transverses à l'origine de $\mathbb{C}^2$, dont le lieu jacobien $\mathcal{J}$ est lisse. Alors il existe un feuilletage de Seifert de S^3_ε qui admet les composantes de $K_{f \cdot g}$ (et même de $K_{f \cdot g \cdot \widehat{\mathcal{J}}}$) pour feuilles.*

Démonstration. — D'après la correspondance biunivoque entre les variétés de Seifert de la décomposition minimale de Waldhausen de S_ε^3 pour $K_{f\cdot g}$ et les sommets de rupture de $A_c(f\cdot g)$ (§ 2.3), il suffit de vérifier que $A_c(f\cdot g)$ possède un unique sommet de rupture.

Considérons le cas où le cône tangent réduit de $f\cdot g$ est constitué de deux droites. D'après le corollaire 5.1, avec l'hypothèse f transverse à g, nous pouvons supposer que f est lisse. Du premier sommet de $A_c(f\cdot g)$ sont donc issues une flèche rouge et une arête bleue. Le théorème 1.2 et l'unicité du quotient de contact des sommets de rupture prouvent alors l'existence d'un unique sommet de rupture bleu. (L'existence provient du fait que l'on exclut le cas où f et g sont lisses et transverses, car alors $\widehat{\mathcal{J}}$ n'existe pas).

Si le cône tangent réduit de $f\cdot g$ est constitué d'au moins trois droites, le résultat est immédiat à partir du corollaire 5.1. □

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à F. Michel qui m'a si clairement et judicieusement conseillée dans l'élaboration de ce travail.

Bibliographie

[1] Brieskorn (E.) et Knörrer (H.) .— *Plane Algebraic Curves*, Birkhäuser Verlag, 1986.

[2] Chenciner (A.) .— *Courbes algébriques planes*, Publications mathématiques de l'Université Paris-VII, 1978.

[3] Eisenbud (D.) et Neumann (W.) .— *Three-Dimensional Link Theory and Invariants of Plane Curve Singularities*, Princeton University Press, Ann. Math. Studies **110** (1995).

[4] Fulton (W.) .— *Algebraic Curves Benjamin*, Mathematics Lecture Note Series, 1969.

[5] Jaco (W.) et Shalen (P.) .— *Seifert Fibered Spaces in Three-Manifolds*, A.M.S., Memoirs **220**.

[6] Lê (D. T.) .— *Calcul du nombre de cycles évanouissants d'une hypersurface complexe*, Ann. Inst. Fourier **23**, n° 4 (1973), pp. 261-270.

[7] Lê (D. T.) .— *Topological Use of Polar Curves*, in Algebraic Geometry, Arcata 1974, A.M.S. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **29** (1975), pp. 507-512.

[8] Lê (D. T.), Michel (F.) et Weber (C.) .— *Courbes polaires et topologie des courbes planes*, Ann. Scienc. E.N.S., 4-ième série, **24** (1991), pp. 141-169.

[9] LÊ (D. T.), MICHEL (F.) et WEBER (C.) .— *Sur le comportement des courbes polaires associées aux germes de courbes planes*, Compositio Mathematica **72** (1989), pp. 87-113.

[10] LÊ (D. T.) et WEBER (C.) .— *Equisingularité dans les pinceaux de germes de courbes planes et C^0-suffisance*, prépublication de l'université de Genève (février 1996).

[11] MAUGENDRE (H.) .— *Topologie de germes de courbes planes à lieu jacobien lisse*, Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences Paris, série 1, **320** (1995), pp. 325-328.

[12] MAUGENDRE (H.) .— *Topologie des germes jacobiens*, Thèse de doctorat (avril 1995).

[13] MAUGENDRE (H.) .— *Topologie des germes jacobiens*, Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences Paris, série 1, **322** (1996), pp. 945-948.

[14] MAUGENDRE (H.) .— *Discriminant of a germ $\Phi : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ and Seifert fibered manifolds*, à paraître au Journal of the London Math. Society.

[15] MICHEL (F.) et WEBER (C.) .— *Topologie des germes de courbes planes à plusieurs branches*, Prépublication de l'Université de Genève, 1985.

[16] MILNOR (J.) .— *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Princeton University Press, 1968.

[17] SAEKI (O.) .— *Topological Types of Complex Isolated Hypersurface Singularities*, Kodai Math. J. **12** (1989), pp. 23-29.

[18] TEISSIER (B.) .— *Introduction to equisingularity problems*, in Algebraic Geometry, Arcata 1974, A.M.S. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **29** (1975), pp. 593-632.

[19] WALDHAUSEN (F.) .— *Eine klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*, Inv. Math. **3** (1967), pp. 308-333 and Inv. Math. **4** (1967), pp. 87-117.

[20] ZARISKI (O.) .— *General Theory of Saturation and of Saturated Local Rings II*, Amer. J. of Math. **93** (1971), pp. 872-964.