ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

ÉLIE COMPOINT
MICHAEL SINGER

Relations linéaires entre solutions d'une équation différentielle

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 7, nº 4 (1998), p. 659-670

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1998_6_7_4_659_0>

© Université Paul Sabatier, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (http://picard.ups-tlse.fr/~annales/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VII, n° 4, 1998

Relations linéaires entre solutions d'une équation différentielle[*]

ÉLIE COMPOINT[1] et MICHAEL SINGER[2]

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous caractérisons les opérateurs différentiels linéaires à coefficients dans $\mathbf{C}(z)$ admettant des solutions linéairement indépendantes sur $\mathbf{C}$, mais linéairement dépendantes sur $\mathbf{C}(z)$. Nous donnons également un algorithme pour le calcul de telles relations de dépendance linéaire.

ABSTRACT. — In this paper we characterize the linear differential operators with coefficients in $\mathbf{C}(z)$ that have solutions linearly independent over $\mathbf{C}$ but linearly dependent over $\mathbf{C}(z)$. We give an algorithm to compute such linear relations.

1. Introduction

Soit k un corps différentiel de caractéristique nulle, dont le corps des constantes, C, est supposé algébriquement clos, et soit L un opérateur différentiel linéaire à coefficients dans k. Dans [2], le premier auteur a montré que si L est irréductible sur k, alors toute famille de solutions de $L(y) = 0$ linéairement indépendante sur C, reste linéairement indépendante sur k. Dans la seconde partie de cet article, nous caractérisons les équations différentielles $L(y) = 0$ admettant pour système fondamental de solutions des éléments linéairement dépendants sur k. Nous donnons dans la troisième

(*) Reçu le 13 mai 1997, accepté le 30 septembre 1997

(1) Université de Paris VI, Mathématiques, T. 46, Case 247, 4 place Jussieu, F-75230 Paris Cédex 05 (France)
E-mail : compoint@riemann.math.jussieu.fr

(2) North Carolina State University, Department of Mathematics, Box 8205, Raleigh, NC-27695-8205 (Nouvelle Calédonie)
E-mail : singer@math.ncsu.edu.

The preparation was partially supported by NSF Grant CCR-93222422

partie un algorithme qui permet de décider, pour certains corps différentiels k, s'il existe des relations de dépendance linéaire à coefficients dans k entre les éléments d'une base de solutions d'une équation différentielle linéaire donnée à coefficients dans k. De plus, si l'opérateur est complètement réductible, nous donnons un algorithme permettant de déterminer toutes les relations de dépendance linéaire à coefficients dans k de ce type. Pour tout entier N fixé, nous montrons alors comment utiliser cet algorithme pour déterminer toutes les relations polynomiales de degré au plus N (à coefficients dans k) entre les éléments d'une base de solutions d'une équation différentielle linéaire complètement réductible.

Nous supposons que le lecteur connaît les bases de la théorie de Picard-Vessiot des équations différentielles linéaires (voir [7]).

2. Relations Linéaires

Avant d'énoncer le principal résultat de cette partie, nous adoptons les notations suivantes. Soit L_1 un opérateur différentiel d'ordre r à coefficients dans le corps différentiel k et soit $\nu = (\nu_0, \ldots, \nu_{r-1}) \in k^r$. On désigne par L_1^ν l'unique opérateur unitaire à coefficients dans k dont l'espace des solutions est $\{\nu_0 z + \nu_1 z' + \cdots + \nu_{r-1} z^{(r-1)} \mid z \text{ est solution de } L(z) = 0\}$. On peut montrer que si L_1 est irréductible sur k et si $\nu \neq (0, \ldots, 0)$, alors L_1^ν est d'ordre r et est également irréductible. De plus, si K est une extension de Picard-Vessiot de k contenant les solutions des équations $L_1 y = 0$ et $L_1^\nu y = 0$, alors les espaces de solutions de ces deux opérateurs sont des $\mathrm{Gal}(K/k)$-modules isomorphes, où $\mathrm{Gal}(K/k)$ désigne le groupe de Galois différentiel de l'extension K/k. Le corollaire 2.6 de [9] prouve que la réciproque est vraie également : si K est une extension de Picard-Vessiot de k contenant les solutions de $L_1 y = 0$ et $L_2 y = 0$ et si ϕ est un $\mathrm{Gal}(K/k)$-isomorphisme de l'espace des solutions de $L_1(y) = 0$ sur l'espace des solutions de $L_2(y) = 0$, alors il existe $\nu = (\nu_0, \ldots, \nu_{r-1}) \in k^r$ tel que $\phi(y) = \sum_{i=0}^{r-1} \nu_i y^{(i)}$, c'est-à-dire, $L_2 = L_1^\nu$. Le principal résultat de cet article est le suivant.

THÉORÈME 2.1.— *Soit k un corps différentiel de caractéristique nulle dont le corps des constantes C est algébriquement clos, et soit $L(y) = 0$ une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients dans k. Il existe des solutions de $L(y) = 0$, linéairement indépendantes sur C et linéairement* *dépendantes sur k si et seulement si il existe un opérateur irréductible, L_1, d'ordre $r < n$ et des vecteurs $\nu_1, \ldots, \nu_s$ de k^r tels que*

(1) chacun des opérateurs $L_1^{\nu_1}, \ldots, L_1^{\nu_s}$ divise L à droite, et

(2) les vecteurs $\nu_1, \ldots, \nu_s$ sont linéairement indépendants sur C mais linéairement dépendants sur k.

Une version plus faible de ce résultat se trouve dans [3]. La preuve du théorème 2.1 repose sur les trois lemmes suivants. Dans le premier de ces lemmes (essentiellement le lemme de Goursat (voir [8, p. 54])), "anneau" signifie anneau unitaire et "module", module à gauche.

LEMME 2.2.— *Soient R un anneau et $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_t$ un R-module complètement réductible, où les M_i sont des R-modules irréductibles. Soit N un sous-module irréductible non nul de M. Alors il existe un ensemble d'indices $I = \{i_1, \ldots, i_s\}$ et des R-isomorphismes $\phi_j : M_{i_1} \to M_{i_j}$, $j = 2, \ldots, s$ tels que*

$$N = \left\{ (m, \phi_2(m), \ldots, \phi_s(m)) \,\middle|\, m \in M_{i_1} \right\}.$$

Démonstration.— Soit π_i la projection de M sur son $i^{\text{ième}}$ facteur. D'après le lemme de Schur, pour chaque i, la restriction de π_i à N est soit l'application nulle, soit un isomorphisme de N sur M_i. Soit $I = \{i_1, \ldots, i_s\}$ l'ensemble des indices pour lesquels la $i^{\text{ième}}$ projection se restreint en un isomorphisme. Puisque N est non nul, I est non vide. Les applications $\phi_j = \pi_{i_j} \circ \pi_{i_1}^{-1}$ satisfont alors la conclusion du lemme. □

LEMME 2.3.— *Soient C un corps algébriquement clos, G un groupe linéaire défini sur C et k un corps contenant C. Soient V_1 et V_2 des G-modules de dimension finie sur C. Alors*

(1) V_1 est un G-module irréductible si et seulement si $V_1 \otimes k$ est un G-module irréductible (où l'action de G sur k est triviale);

(2) en tant que G-modules, V_1 est isomorphe à V_2 sur C si et seulement si $V_1 \otimes k$ est isomorphe à $V_2 \otimes k$ sur k. De plus, si V_1 et V_2 sont irréductibles et si $\widetilde{\phi} : V_1 \otimes k \to V_2 \otimes k$ est un G-isomorphisme, alors il existe un élément $f \in k$ et un isomorphisme $\phi : V_1 \to V_2$ tels que $\widetilde{\phi}(v \otimes \kappa) = \phi(v) \otimes f\kappa$, pour tous $v \in V_1$ et $\kappa \in k$.

Démonstration

(1) (voir [2, lemme 3]) Supposons que V_1 soit un G-module irréductible. Le théorème de Burnside [8, p. 628] implique alors que les éléments de $G \subset \mathrm{End}_C(V_1)$ engendrent toute l'algèbre $\mathrm{End}_C(V_1)$. Donc les éléments de $G \subset \mathrm{End}_k(V_1 \otimes_C k) = \mathrm{End}_C(V_1) \otimes_C k$ engendrent toute l'algèbre $\mathrm{End}_k(V_1 \otimes_C k)$, et par conséquent la représentation $V_1 \otimes_C k$ de G est irréductible. L'autre implication est évidente.

(2) Soient $\rho_1(G) \subset \mathrm{GL}(V_1)$ et $\rho_2(G) \subset \mathrm{GL}(V_2)$ deux représentations matricielles de G (définies sur C). Si $V_1 \otimes k$ est isomorphe à $V_2 \otimes k$ sur k, alors il existe une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(k)$ telle que $A\rho_1(g)A^{-1} = \rho_2(g)$ pour tout $g \in G(C)$. Puisque $\rho_1(G)$ et $\rho_2(G)$ sont définies sur C, le *Nullstellensatz* de Hilbert implique qu'il existe une matrice $A' \in \mathrm{GL}_n(C)$ telle que $A'\rho_1(g)A'^{-1} = \rho_2(g)$ pour tout $g \in G$, et V_1 et V_2 sont donc des G-modules isomorphes. Soit $B = A \cdot (A')^{-1}$. Pour tout $g \in G(C)$, on a $B\rho_2(g)B^{-1} = \rho_2(g)$. Si B n'est pas de la forme $f \cdot I$, avec $f \in k$, alors il devrait exister une matrice $B' \in \mathrm{GL}_n(C)$ qui ne soit pas du type $c \cdot I$ ($c \in C$) et telle que $B'\rho_2(g)B'^{-1} = \rho_2(g)$ pour tout $g \in G(C)$. Si ρ_2 est une représentation irréductible, ceci contredit le lemme de Schur. Sous cette hypothèse, il existe donc $f \in k$ tel que $A = f \cdot A'$. L'autre implication est claire. □

On désigne par $\mathcal{D} = k[D]$ l'anneau des opérateurs différentiels linéaires à coefficients dans k. Dans le lemme suivant, un opérateur $L' \in \mathcal{D}$ est dit *opérateur minimal* d'un élément z si L' est l'opérateur unitaire de $\mathcal{D}$ de plus bas degré tel que $L'(z) = 0$.

LEMME 2.4.— *Soient k un corps différentiel de caractéristique nulle dont le corps des constantes C est algébriquement clos, et L un opérateur à coefficients dans k. S'il existe des solutions de $Ly = 0$, linéairement indépendantes sur C et linéairement dépendantes sur k, alors il existe des solutions de $Ly = 0$, linéairement indépendantes sur C et linéairement dépendantes sur k dont les opérateurs minimaux sont irréductibles.*

Démonstration.— Soit V l'espace des solutions de $Ly = 0$ dans une extension convenable de k. Soit

$$\sum_{i=1}^{r} f_i \otimes y_i \in k \otimes V$$

un tenseur non nul tel que

$$\sum_{i=1}^{r} f_i y_i = 0\,,$$

et supposons r minimal pour de tels tenseurs. Soit t le nombre des éléments y_i dont l'opérateur minimal est *non* irréductible. On procède par réccurence sur t. Supposons par exemple que l'opérateur minimal de y_1 ne soit pas irréductible. Alors l'espace vectoriel engendré par l'orbite de y_1 sous G contient un élément non nul, disons w_1, dont l'opérateur minimal est irréductible. Il existe donc un élément ϕ appartenant à l'algèbre de groupe $C[G]$ de G tel que $w_1 = \phi(y_1) \neq 0$. Posons $w_i = \phi(y_i)$. On a

$$\sum_{i=1}^{r} f_i w_i = 0$$

et comme $w_1 \neq 0$ et r est minimal, alors chacun des w_i est non nul. De plus, si y_i vérifie $L'(y_i) = 0$, alors on a aussi $L'(w_i) = 0$, et par conséquent, si l'opérateur minimal de y_i est irréductible, alors l'opérateur minimal de w_i l'est également. On obtient ainsi une relation de dépendance linéaire où le nombre t a chuté, et on peut conclure par récurrence. □

On donne à présent la démonstration du théorème 2.1.

Démonstration du théorème 2.1

Supposons tout dabord qu'il existe L_1 et $\nu_i = (\nu_{i,0}, \nu_{i,1}, \ldots, \nu_{i,r-1})$ vérifiant les conditions du théorème. Soit y une solution non nulle de $L_1(y) = 0$. Comme L_1 est irréductible, y ne peut être solution d'une équation différentielle (linéaire) d'ordre strictement inférieur à r. Pour $i \in \{1, \ldots, s\}$, on pose

$$z_i = \sum_{j=0}^{r-1} \nu_{i,j} y^{(j)}\,.$$

Les éléments $z_1, \ldots, z_s$ sont donc linéairement indépendants sur C, mais linéairement dépendants sur k. Par hypothèse $L_1^{\nu_i}(z_i) = 0$ et $L_1^{\nu_i}$ divise L à droite, ce qui prouve un des deux sens de l'équivalence.

On suppose à présent que l'équation $L(y) = 0$ admet des solutions linéairement indépendantes sur C et linéairement dépendantes sur k. Soit M le plus petit commun multiple à gauche de *tous* les opérateurs irréductibles divisant L à droite (voir [9]). Alors l'opérateur complètement réductible

M divise L à droite et l'équation $My = 0$ admet des solutions linéairement dépendantes sur C et linéairement indépendantes sur k d'après le lemme 2.4. On peut donc supposer, sans perte de généralité, que l'opérateur L est complètement réductible. Soit K l'extension de Picard-Vessiot de k associée à L, et soient V l'espace des solutions de $L(y) = 0$ dans K et G le groupe de Galois différentiel de K sur k. Puisque L est complètement réductible, le G-module V peut s'écrire $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$, où les V_i sont des G-modules irréductibles. D'après le lemme 2.3, $V \otimes k \simeq V_1 \otimes k \oplus \cdots \oplus V_t \otimes k$, où chaque $V_i \otimes k$ est un G-module irréductible. Par hypothèse, le noyau de l'application $m : V \otimes k \to K$ définie par $m(v \otimes \kappa) = \kappa v$, est non trivial. Soit N un $k[G]$-sous-module irréductible de ce noyau. Le lemme 2.2 implique qu'il existe (après une éventuelle renumérotation) un entier s inférieur ou égal à t et des G-isomorphismes $\widetilde{\phi}_j : V_1 \otimes k \to V_j \otimes k$ tels que

$$N = \left\{ (m, \widetilde{\phi}_2(m), \ldots, \widetilde{\phi}_s(m)) \;\middle|\; m \in V_1 \otimes k \right\}.$$

De plus, d'après le lemme 2.3, pour chaque $\widetilde{\phi}_i$, il existe $\nu_i = (\nu_{i,0}, \ldots, \nu_{i,r-1}) \in k^r$ et $f_i \in k$ tels que

$$\widetilde{\phi}_i(v \otimes 1) = \left(\sum_{j=0}^{r-1} \nu_{i,j} v^{(j-1)} \right) \otimes f_i \, .$$

Notons L_1 l'opérateur irréductible et unitaire de $k[D]$ dont V_1 est l'espace des solutions. Pour $1 \leq i \leq s$, chacun des espaces V_i est alors l'espace des solutions de $L_1^{\nu_i}$, et chacun des opérateurs $L_1, L_1^{\nu_2}, \ldots, L_1^{\nu_s}$ divise L à droite. Vérifions que la propriété (2) est satisfaite par ce choix des ν_i (avec $\nu_1 = (1, 0, \ldots, 0)$). Pour cela supposons qu'il existe des constantes $c_1, \ldots, c_s$ non toutes nulles et telles que

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \nu_i = 0 \, .$$

Pour simplifier la notation, on suppose que c_1 est non nul et égal à 1. Soit v un vecteur non nul de V_1. On a alors

$$v = -\sum_{i=2}^{s} c_i \left(\sum_{j=0}^{r-1} \nu_{i,j} v^{(j)} \right)$$

ce qui contredit le fait que la somme $V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$ est directe, et prouve que les vecteurs $\nu_1, \ldots, \nu_s$ sont linéairement indépendants sur C. Puisque N est dans le noyau de l'application m, on a

$$0 = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{r-1} f_i \nu_{i,j} v^{(j)} = \sum_{j=0}^{r-1} \left(\sum_{i=1}^{s} f_i \nu_{i,j} \right) v^{(j)} .$$

Comme L_1 est irréductible, v ne peut vérifier d'équation différentielle linéaire d'ordre inférieur à r et par conséquent chacune des sommes $\sum_{i=1}^{s} f_i \nu_{i,j}$ est nulle. Donc

$$\sum_{i=1}^{s} f_i \nu_i = 0$$

et la propriété (2) est satisfaite. □

Exemple 2.5. — L'exemple suivant (cet exemple apparaît dans [2] et a été suggéré par F. Beukers) illustre le théorème 2.1.

Soient f et g deux éléments non constants de $\mathbf{C}(x)$ et tels que le groupe de Galois de l'équation différentielle $L_1(y) = y'' + fy' + gy = 0$ soit $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$. Soit $\{y_1, y_2\}$ une base de l'espace des solutions de $L_1(y) = 0$. Ces hypothèses impliquent alors que la famille $\{y_1, y_2, y_1', y_2', y_1'', y_2''\}$ est constituée d'éléments linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$. De plus, cette famille engendre un espace vectoriel qui est stable sous l'action du groupe de Galois. Cette famille est donc une base de solutions d'un opérateur L d'ordre 6 à coefficients dans $\mathbf{C}(x)$. D'autre part, les éléments de cette famille sont clairement dépendants sur $\mathbf{C}(x)$ puisque $y_i'' + fy_i' + gy_i = 0$ ($i = 1$ ou 2). Posons $\nu_1 = (1,0)$, $\nu_2 = (0,1)$ et $\nu_3 = (g,f)$, alors $L_1^{\nu_i}$ divise L à droite, pour $i = 1, 2, 3$. Et, puisque f et g ne sont pas des constantes, ν_1, ν_2 et ν_3 sont linéairement indépendants sur C, et, bien entendu, dépendants sur k. Le théorème 2.1 affirme que tous les exemples sont essentiellement de ce type. □

3. Calcul des Relations Linéaires

Grâce au théorème 2.1, nous allons pouvoir décider si une équation différentielle linéaire $L(y) = 0$ admet des solutions linéairement indépendantes sur C mais linéairement dépendantes sur k. Pour cela, nous rappelons dabord que si L et L_1 sont des éléments de $\mathcal{D}$, alors l'ensemble des vecteurs $\nu = (\nu_0, \ldots, \nu_{r-1})$ de k^r tels que L_1^ν divise L à droite, s'identifie au C-espace vectoriel $\mathcal{E}(L, L_1)$ des opérateurs $N = \sum_{i=0}^{r-1} \nu_i D^i$, pour lesquels il existe un élément S de $\mathcal{D}$ vérifiant $LN = SL_1$ (voir [9, , pp. 81-84]). De plus, $\mathcal{E}(L, L_1)$ est exactement l'ensemble des solutions $\nu \in k^r$ d'un système différentiel linéaire $\mathcal{A}_{L,L_1}\nu = 0$, où la matrice $\mathcal{A}_{L,L_1}$ est une matrice $r \times r$ à coefficients dans l'anneau $\mathcal{D} = k[D]$ des opérateurs différentiels linéaires à coefficients dans k. Pour trouver les solutions de ce système, on peut le convertir en un système diagonal en utilisant l'"élimination de Gauss" (c.-à-d. des opérations sur les lignes et les colonnes, voir [1, sect. III.11]). Pour de nombreux corps différentiels k (par exemple $\mathbf{C}(x)$ ou certains types d'extensions liouvilliennes de $\mathbf{C}(x)$, voir [10]), on peut alors déterminer une base de l'espace vectoriel des solutions rationnelles de chacun des opérateurs qui apparaissent dans le système diagonal, et ainsi trouver une base de solutions du système $\mathcal{A}_{L,L_1}\nu = 0$.

PROPOSITION 3.1.— *Soit k un corps différentiel de caractéristique nulle dont le corps des constantes est algébriquement clos et tel que*

(1) pour tout opérateur $L \in \mathcal{D}$, on puisse effectivement trouver une base de toutes les solutions dans k de $L(y) = 0$;

(2) on puisse effectivement factoriser tout opérateur $L \in \mathcal{D}$;

(3) on puisse effectivement décider si une famille de vecteurs de k^r est linéairement dépendante sur k.

Alors, pour tout opérateur $L \in \mathcal{D}$, on peut effectivement décider si l'équation $L(y) = 0$ admet une base de solutions dont les éléments sont linéairement dépendants sur k.

Démonstration.— Soit $L \in k[D]$ et soit K l'extension de Picard-Vessiot de k associée. Soit $L = L_1 L_2 \cdots L_t$ une factorisation de L en facteurs irréductibles. Tout opérateur irréductible et divisant L à droite est alors équivalent à l'un des L_i. Pour chaque i, on détermine une C-base de $\mathcal{E}(L, L_i)$ et on détermine si les éléments de cette base sont k-linéairement dépendants. Si c'est le cas, le théorème 2.1 implique que $L(y) = 0$ admet une base de solutions linéairement dépendants sur k. Si ce n'est pas le cas pour chaque L_i, le théorème 2.1 implique que toute base de solutions de $L(y) = 0$ est constituée d'éléments linéairement indépendants sur k. □

Pour un opérateur complètement réductible L, on peut améliorer le résultat précédent et déterminer *toutes* les relations de dépendance linéaire sur k vérifiées par les éléments d'une base de solutions de $Ly = 0$. Dans la proposition suivante, on dit que la base $\{y_1, \ldots, y_n\}$ de l'espace des solutions de $Ly = 0$ est *normalisée* au point p si $y_i^{(j)}(p) = \delta_{i-1,j}$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $j = 0, \ldots, n-1$ (avec $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$, et 0 sinon).

PROPOSITION 3.2.— *Soit k un corps différentiel de caractéristique nulle dont le corps des constantes C est supposé algébriquement clos et inclus dans $\mathbb{C}$. Supposons de plus que*

(1) k est un corps de fonctions méromorphes dans un domaine $\mathcal{G} \subset \mathbb{C}$;

(2) il existe un ensemble infini $P \subset \mathcal{G}$, et un corps calculable E tels que pour tout élément $f \in k$, pour tout point $p \in P$, et tout entier n, on peut effectivement calculer les n premiers termes du développement en série de Laurent de f en p, et que les coefficients de ce développement appartiennent à E.

Soit L un opérateur complètement réductible de $\mathcal{D}$. Alors, on peut effectivement déterminer un ensemble fini $S \subset P$ tel que pour tout point $p \in P$, $p \notin S$, et pour toute base normalisée $\{y_1, \cdots, y_n\}$ en p de l'espace des solutions de $Ly = 0$, on peut effectivement déterminer une k-base du k-espace vectoriel des éléments $(f_1, \ldots, f_n) \in k^n$ tels que

$$\sum f_i y_i = 0\,.$$

Remarquons que si $k = \overline{\mathbf{Q}}(x)$, on peut choisir pour P l'ensemble des points entiers de la droite réelle et $E = C$. Un autre exemple est donné par $k = \overline{\mathbf{Q}}(x, e^x)$. Dans ce cas, E est la clôture algébrique de $\overline{\mathbf{Q}}(x, e)$, et P à nouveau l'ensemble des points entiers de la droite réelle. En effet, $\overline{\mathbf{Q}}(x, e)$ est une extension transcendante d'un corps calculable, donc sa clôture algébrique est encore un corps calculable (cf. [12, chap. 42]).

Démonstration.— Puisque L est complètement réductible, l'espace des solutions V de $Ly = 0$ est un G-module complètement réductible, où G est le groupe de Galois différentiel associé. D'après le lemme 2.3, $V \otimes k$ est également un G-module complètement réductible, ainsi que le noyau W de l'application $m : V \otimes k \mapsto K$. Ce noyau est donc somme directe de modules de type décrit au lemme 2.2. Factorisons $L = L_1 L_2 \cdots L_m$ en facteurs irréductibles. On peut déterminer ceux des L_i qui sont équivalents et, pour chaque classe d'équivalence, on choisit un représentant. On désigne par $R = \{L_1, \ldots, L_q\}$ un système de représentants. Pour chaque $M \in R$, on détermine une C-base $B = \{\nu_1, \ldots, \nu_t\}$ de $\mathcal{E}(L, M)$ et une k-base F de l'ensemble des vecteurs $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_t)$ tels que $\sum_{i=1}^{t} f_i \nu_i = 0$. Soit $y_1, \ldots, y_r$ une base de l'espace des solutions de $My = 0$ et soit $\overline{\mathbf{y}}_i$ le r-uplet défini par $\overline{\mathbf{y}}_i = (y_i, y_i', \ldots, y_i^{(r-1)})$ où r est l'ordre de M. Alors

(1) les éléments de $\mathcal{B}_M = \{(\nu_i \cdot \overline{\mathbf{y}}_j)\}$ sont des solutions de $Ly = 0$ linéairement indépendantes sur C, et $\mathcal{B} = \cup_M \mathcal{B}_M$ est une base de cet espace de solutions;

(2) pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, on a

$$\sum_{i=1}^{t} f_i (\nu_i \cdot \overline{\mathbf{y}}_j) = 0 \; ;$$

et toute relation k-linéaire entre les éléments de $\mathcal{B}$ est une combinaison k-linéaire des relations du type $\sum_{i=1}^{t} f_i (\nu_i \cdot \overline{\mathbf{y}}_j) = 0$

Soit n l'ordre de L et soit S l'intersection de P avec l'ensemble constitué des points singuliers de $M \in R$ et de L et des pôles de chacun des $\nu_{\mathbf{i}}$. Pour tout point $p \in P$, $p \notin S$, on peut déterminer les séries de Taylor à l'ordre de n de chacune des solutions $\nu_i \cdot \overline{\mathbf{y}}_j$ de $Ly = 0$. Par comparaison des conditions initiales en p, on peut exprimer les solutions $\nu_i \cdot \overline{\mathbf{y}}_j$ en fonction des éléments de la base normalisée en p (de l'espace des solutions de $Ly = 0$) et donc obtenir une base des relations k-linéaires vérifiées par les éléments de cette base. □

La proposition 3.2 va nous permettre de calculer, pour des corps différentiels convenables et pour tout entier naturel N, l'ensemble des relations *algébriques*, à coefficients dans k et de degré inférieur à N, satisfaites par les solutions d'un opérateur linéaire complètement réductible. Soit L un tel opérateur, et soit $L^{\circledS m}$ l'opérateur unitaire dont l'espace des solutions est engendré par tous les monômes de degré m en les solutions de $L(y) = 0$ (par convention, on définit $L^{\circledS 0} = D$; voir [11] pour davantage de précisions sur ces opérateurs). Soit L_N le plus petit commun multiple à gauche de la famille d'opérateurs $\{L^{\circledS m}\}_{m=0}^{N}$ et soit M l'ordre de L_N. Soit S l'ensemble défini par la proposition 3.2 appliquée à L_N et soit $p \in P$ un point ordinaire pour L et L_N et n'appartenant pas à l'ensemble S. Considérons alors la base $\{y_i\}$ de l'espace des solutions de $Ly = 0$, normalisée en p, et désignons par $\{\mathcal{M}_j\}$ l'ensemble de tous les monômes de degré au plus N en les y_i. Puisque l'on peut calculer le développement en série de chaque solution y_i à un ordre arbitraire, on peut déterminer le M-jet de chaque monôme $\mathcal{M}_j$. L'ensemble $\mathcal{L}_1$ des relations C-linéaires entre ces M-jets est alors exactement l'ensemble des relations C-linéaires entre les solutions $\{\mathcal{M}_j\}$ de $L_N y = 0$. Soit $\mathcal{B}_1$ une C-base de $\mathcal{L}_1$. On désigne par $\{z_j\}$ la base de l'espace des solutions de $L_N y = 0$ normalisée en p. Grâce à la proposition 3.2, on peut déterminer une base $\mathcal{B}'_2$ de toutes les relations k-linéaires vérifiées par les $\{z_j\}$. En exprimant les $\mathcal{M}_j$ en fonction des $\{z_j\}$, on peut alors convertir $\mathcal{B}'_2$ en un ensemble $\mathcal{B}_2$ de relations k-linéaires liant certains des $\mathcal{M}_j$. La réunion de $\mathcal{B}_1$ et de $\mathcal{B}_2$ fournit une base de l'ensemble de toutes les relations algébriques, à coefficients dans k et de degré inférieur à N, vérifiées par les $\{y_i\}$.

On remarquera que pour un opérateur complètement réductible L, le premier auteur a montré que l'on peut convertir une base de l'anneau des invariants de $\mathrm{Gal}(L)$, agissant sur l'anneau des polynômes en n^2 indéterminées $C[Y_{i,j}]$, en une base $\mathcal{B}$ de l'idéal de toutes les relations algébriques (à coefficients dans k) satisfaites par les éléments $\{y_i^{(j)}\}_{i=1,\dots,n}^{j=0,\dots,n-1}$. Cette méthode associe à un invariant de $\mathrm{Gal}(L)$, une relation algébrique (à coefficients dans k) de même degré que l'invariant. Par ailleurs, [5] montre comment calculer un invariant, une fois connu son degré. Dans [4], on donne une méthode pour borner le degré des invariants de $\mathrm{Gal}(L)$. La combinaison de ces trois résultats permet de déterminer une base $\mathcal{B}$ de l'idéal de toutes les relations algébriques satisfaites par les éléments d'une matrice fondamentale de solutions de $Ly = 0$. Ainsi on peut alors également trouver les relations algébriques d'un degré donné, vérifiées par les solutions de $Ly = 0$.

Bibliographie

[1] POOLE (E. G. C.) .— *Introduction to the Theory of Linear Differential Equations*, Dover Publications, Inc., New-York, 1960.

[2] COMPOINT (E.) .— *Généralisation d'un théorème de Fano et Singer*, C.R.A.S., **318**, Série I (1994), pp. 885-887.

[3] COMPOINT (E.) .— *Équations différentielles, relations algébriques et invariants*, thése de Doctorat de l'Université Paris VI, 1996.

[4] COMPOINT (E.) et SINGER (M. F.) .— *Calculating Galois Groups of Completely Reducible Linear Operators*, manuscrit, North Carolina State University, 1997.

[5] HOEIJ (M. VAN) and WEIL (J.-A.) .— *An Algorithm for Computing Invariants of Differential Galois Groups*, à paraître dans Proceedings of MEGA-96.

[6] HUMPHREYS (J. E.) .— *Linear Algebraic Groups*, Springer-Verlag, New-York, 1981.

[7] KAPLANSKY (I.) .— *An Introduction to Differential Algebra*, Deuxième édition, Hermann, Paris, 1976.

[8] LANG (S.) .— *Algebra*, Deuxième édition, Addison-Wesley, Menlo Park, 1984.

[9] SINGER (M. F.) .— *Testing Reducibility of Linear Differential Operators: A Group Theoretic Perspective*, Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing **7** (1996), pp. 77-106.

[10] SINGER (M. F.) .— *Liouvillian solutions of linear differential equations with Liouvillian coefficients*, Journal of Symbolic Computation **11** (1991), pp. 251-273.

[11] SINGER (M. F.) et ULMER (F.) .— *Galois Groups of Second and Third Order Linear Differential Equations*, Journal of Symbolic Computation **16**, n° 1 (1993), pp. 1-36.

[12] WAERDEN (B. L. VAN DER) .— *Modern Algebra*, Deuxième édition, Frederick Ungar Publishing Co, New-York, 1953.