ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

FRÉDÉRIC GIRARD
MOULAY-AHMED JEBRANE

Majorations affines du nombre de zéros d'intégrales abéliennes pour les hamiltoniens quartiques elliptiques

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 7, nº 4 (1998), p. 671-685

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1998_6_7_4_671_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VII, n° 4, 1998

Majorations affines du nombre de zéros d'intégrales abéliennes pour les hamiltoniens quartiques elliptiques(*)

FRÉDÉRIC GIRARD(1) et MOULAY-AHMED JEBRANE(1)

RÉSUMÉ. — Nous donnons des bornes affines pour le nombre de zéros d'intégrales abéliennes $\int_{\delta(h)} \omega$ sur une famille continue de cycles réels $\{\delta(h)\}$ d'un hamiltonien quartique elliptique. Ces estimations dépendent seulement du degré de la 1-forme polynomiale ω.

ABSTRACT. — We give affine estimates for the number of zeros of complete Abelian integrals $\int_{\delta(h)} \omega$ on a continuous family of real cycles $\{\delta(h)\}$ of a quartic elliptic Hamiltonian. These estimates only depend on the degree of the polynomial 1-form ω.

AMS Classification : 58F21, 58F14, 34C05

1. Introduction

Soit $H(x,y)$ un polynôme sur $\mathbb{R}^2$ de degré d. On considère un intervalle réel $\mathcal{I}$ tel que pour toute valeur $h \in \mathcal{I}$, la courbe de niveau $H(x,y) = h$ contient une composante connexe compacte (γ_h) sans point critique. On suppose que (γ_h) dépend continûment de h. Pour chaque 1-forme polynomiale $\omega = f(x,y)\,\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y$ de degré $n = \max\{\deg(f), \deg(g)\}$, on définit l'intégrale abélienne

$$I_\omega(h) = \int_{\gamma_h} \omega\,.$$

(*) Reçu le 25 avril 1998, accepté le 1er juillet 1998

(1) Université de Bourgogne, U.F.R. des Sciences et Techniques, Laboratoire de Topologie, U.M.R. 5584 du C.N.R.S., 9 avenue Alain-Savary, B.P. 400, F-21011 Dijon Cédex (France)
E-mail : frgirard@u-bourgogne.fr
E-mail : jebrane@u-bourgogne.fr

Nous désignerons par $Z(\omega,\mathcal{I})$ le nombre de zéros isolés de I_ω dans l'intervalle $\mathcal{I}$.

La version infinitésimale du seizième problème de Hilbert consiste à majorer les nombres $Z(\omega,\mathcal{I})$ en fonction des degrés d et n de H et ω. A. Khovanski [12] et A. Varchenko [19] ont résolu ce problème. Cependant, la complexité de la borne établie n'était pas précisée. Beaucoup de résultats concernant le nombre de zéros d'intégrales abéliennes ont été obtenus notamment par L. Gavrilov ([1], [2]), P. Mardešič [14], G. S. Petrov ([16], [17], [18]), ainsi que d'autres auteurs. Dans une série d'articles ([8], [9], [15]), Y. Il'Yashenko, D. Novikov et S. Yakovenko proposent un algorithme permettant de contrôler la dépendance de $Z(\omega,\mathcal{I})$ en fonction de H et du degré de ω. Ils ont obtenu des majorations de l'ordre de $\exp\big(K(H)\deg(\omega)\big)$.

Pour les hamiltoniens de degré 3, E. Horozov et I. D. Iliev [5] ont établi une majoration affine. Ils ont montré que la borne uniforme $Z(3,n)$ est inférieure à $5n+15$ pour les cas génériques. Pour les cas non génériques, la majoration est encore meilleure et a été établie dans [2] et [5].

Rappelons que la version classique du seizième problème de Hilbert, encore ouvert, est de montrer l'existence d'une borne uniforme $H(n)$ du nombre de cycles limites d'un champ polynomial de degré inférieur ou égal à n. Le lien avec le problème infinitésimal est le suivant. On considère une perturbation polynomiale d'un champ hamiltonien X_H de la forme :

$$X_\varepsilon = \left(\frac{\partial H}{\partial y} + \varepsilon g(x,y)\right)\frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \varepsilon f(x,y)\right)\frac{\partial}{\partial y},$$

où ε est un petit paramètre réel, f et g sont deux polynômes de degré inférieur ou égal à n. L'application retour de Poincaré P de X_ε sur une transversale paramétrée par les valeurs de H vérifie

$$P(h,\varepsilon) = h + \varepsilon\int_{\gamma_h}(f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y) + O(\varepsilon^2).$$

Le nombre de zéros isolés de l'intégrale $\int_{\gamma_h}(f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y)$ donne alors une information sur le nombre de cycles limites de la famille X_ε. On obtient ainsi la cyclicité des ovales régulières de l'hamiltonien X_H dans les déformations polynomiales.

Dans ce travail, nous étudions le cas des hamiltoniens quartiques elliptiques et nous démontrons le résultat suivant.

THÉORÈME 1.— *Pour tout hamiltonien quartique elliptique, le nombre de zéros isolés de $I(h) = \int_{\gamma_h}\omega$ dans tout intervalle $\mathcal{I}$ est inférieur ou égal à $7/2\deg(\omega) + 3$.*

Les hamiltoniens quartiques elliptiques s'écrivent sous la forme normale suivante :

$$H(x,y) = \frac{y^2}{2} + P(x) = \frac{y^2}{2} + \varepsilon\frac{x^4}{4} + a\frac{x^2}{2} + bx\,, \quad \varepsilon = \pm 1\,,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Désignons par $\delta(\varepsilon, a, b) = 27\,\varepsilon b^2 + 4a^3$ le discriminant du polynôme P'.

- Pour $\varepsilon = -1$ et $\delta(-1,a,b) < 0$, l'hamiltonien H possède deux points de selle et un centre, il admet une seule famille continue d'ovales (cas dit de la "double selle"). Si $\delta(-1,a,b) \geq 0$, on n'a pas de centre.
- Pour $\varepsilon = +1$ et $\delta(+1,a,b) < 0$, l'hamiltonien H possède un point de selle et deux centres, il admet trois familles continues d'ovales, deux intérieures et une extérieure (cas dit du "huit"). Si $\delta(+1,a,b) = 0$, on a un centre, un point semi-hyperbolique et deux familles d'ovales, intérieures et extérieures (cas du "huit dégénéré"). Si $\delta(+1,a,b) > 0$, l'hamiltonien H possède une seule famille d'ovales (on a un centre global).

Remarques

- Nous verrons dans la démonstration du théorème que cette majoration peut être améliorée dans tous les cas sauf un : c'est le cas des "grandes" ovales intérieures du "huit" non symétrique.
- Pour les hamiltoniens symétriques ($b = 0$), la majoration est encore meilleure. Plus précisément, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 2.— *Pour tout hamiltonien elliptique symétrique de degré* 4, *le nombre de zéros isolés de* $I(h) = \int_{\gamma_h} \omega$ *dans tout intervalle* $\mathcal{I}$ *est inférieur ou égal à :*

(i) $7/2\,\deg(\omega) - 3$ *pour les ovales intérieures du "huit" symétrique ;*

(ii) $3/2\,\deg(\omega) - 1$ *dans les autres cas.*

2. Cohomologie relative et système de Picard-Fuchs

Un des faits essentiels intervenant dans la preuve du théorème est la présence d'un sous-système de Picard-Fuchs d'ordre deux dont nous allons ici justifier géométriquement l'existence. On considère pour cela l'espace vectoriel de cohomologie relative algébrique :

$$\mathcal{P}_H = \frac{\Omega^1_{\mathbf{alg}}}{\mathrm{d}\Omega^0_{\mathbf{alg}} + \Omega^0_{\mathbf{alg}}\,\mathrm{d}H}.$$

Cet espace vectoriel complexe est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{C}[h]$-module

$$h \cdot [\omega] = [H(x,y) \times \omega].$$

Par abus de notations, nous désignerons encore par ω la classe de la 1-forme ω dans $\mathcal{P}_H$. Étant donné un hamiltonien algébrique H, sa fibre générique $F_h = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid H(x,y) = h\}$ peut être vue comme courbe algébrique de $\mathbf{CP}^2$ moins un nombre fini de points "à l'infini". L'intersection d'une fibre type F_h avec une grande sphère $\mathbf{S}^3$ est une union finie de cycles (cycles de "bout") qui engendrent un sous-espace vectoriel de $\mathbf{H}_1(F_h, \mathbb{C})$ noté $\mathbf{H}_1^B(F_h, \mathbb{C})$. Ce sous-espace ne dépend pas de la sphère choisie, pourvu que son rayon soit assez grand. Soit A le plus petit des ensembles B tels que

$$H : \mathbb{C}^2 \setminus H^{-1}(B) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus B$$

soit une fibration localement triviale. On sait d'après [4] que A est un ensemble fini constitué des valeurs critiques de H et des valeurs "atypiques" correspondant aux singularités à l'infini.

Considérons le sous-ensemble $\mathcal{P}_H^0$ de $\mathcal{P}_H$ constitué des éléments dont l'intégrale est nulle sur tout cycle de "bout" $\gamma(h)$, quel que soit h appartenant à $\mathbb{C} \setminus A$.

On note $\nabla\omega$ la dérivée covariante relativement à H de ω : un représentant η de $\nabla\omega$ vérifie $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}H \wedge \eta$. Soit D le polynôme: $D(h) = \prod_{i=1}^{p}(h - h_i)$ où les h_i sont les valeurs critiques deux à deux distinctes de H.

PROPOSITION

(i) $\mathcal{P}_H^0$ *est un sous-module de* $\mathcal{P}_H$,

(ii) $D \cdot \nabla(\mathcal{P}_H) \subset \mathcal{P}_H$,

(iii) $D \cdot \nabla(\mathcal{P}_H^0) \subset \mathcal{P}_H^0$,

(iv) $D^n \cdot \nabla^n(\mathcal{P}_H) \subset \mathcal{P}_H$, $n \in \mathbb{N}$.

Dans le cas d'un hamiltonien H quartique elliptique, le module $\mathcal{P}_H$ associé est un module libre de rang trois. Le rang de $\mathcal{P}_H^0$ est égal à $2g$, où g est le genre de la fibre générique F_h. Dans notre cas, le rang de ce sous-module est 2 puisque la fibre F_h est un tore privé d'un point (quadruple) à l'infini. On vérifie ici que l'hamiltonien ne possède pas de valeurs "atypiques" donc l'ensemble A n'est constitué que des valeurs critiques de H.

Soit γ un cycle de $\mathbf{H}_1^B(F_{h_0}, \mathbb{C})$. Ce cycle est invariant par l'action de la monodromie, donc s'étend de manière univoque en une famille $\{\gamma(h) \mid h \in \mathbb{C} \setminus A\}$. Fixons alors une base $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}$ du module $\mathcal{P}_H$. La fonction f_j définie sur $\mathbb{C}\setminus A$ par $f_j(h) = \int_{\gamma(h)} \omega_j$, $j = 0, 1, 2$, est holomorphe, univaluée et sa croissance en l'infini est polynomiale. De plus, d'après Malgrange [13], f_j est bornée au voisinage des valeurs critiques. On en déduit que f_j est un polynôme et qu'il existe un entier naturel k tel que

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}h^k}\left(f_j(h)\right) = \int_{\gamma(h)} \nabla^k \omega_j \equiv 0\,, \quad j = 0, 1, 2\,.$$

Les formes $D^k \cdot \nabla^k(\omega_j)$ de $\mathcal{P}_H$ appartiennent en fait à $\mathcal{P}_H^0$ et sont donc algébriquement dépendantes.

Dorénavant, nous considérons l'hamiltonien :

$$H(x, y) = \frac{1}{2}\, y^2 + \frac{1}{4}\, \varepsilon x^4 + a x^2 + b x$$

et désignons respectivement par $\omega_{i,j}$ et ω_i les formes monomiales $x^i y^j \,\mathrm{d}x$, $x^i y \,\mathrm{d}x$.

LEMME 1.— *Dans $\mathcal{P}_H$, on a les relations suivantes :*

$$\omega_{i,j} = 2h \cdot \omega_{i,j-2} - \frac{1}{2}\, \varepsilon\, \omega_{i+4,j-2} - a\, \omega_{i+2,j-2} - 2b\, \omega_{i+1,j-2}\,, \quad j \geq 2\,, \quad (1)$$

$$(7 + i)\, \omega_{i+4} = -2\varepsilon a(i + 4)\, \omega_{i+2} - 2\varepsilon b(2i + 5)\, \omega_{i+1} + 4\varepsilon(i + 1) h \cdot \omega_i\,. \quad (2)$$

Preuve.— La première relation s'obtient en écrivant :

$$\begin{aligned} \omega_{i,j} &= x^i y^j \,\mathrm{d}x = x^i y^{j-2} (y^2)\,\mathrm{d}x \\ &= x^i y^{j-2} \left(2h - \frac{1}{2}\, \varepsilon x^4 - a x^2 - 2bx\right) \mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Pour la relation (2), on intègre par parties puis on utilise $\mathrm{d}H = 0$.

$$\begin{aligned} x^i y^j \,\mathrm{d}x &= \frac{j}{i+1}\, x^{i+1} y^{j-2} (\varepsilon x^3 + a x + b)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\varepsilon j}{i+1}\, x^{i+4} y^{j-2} \,\mathrm{d}x + \frac{a j}{i+1}\, x^{i+2} y^{j-2} \,\mathrm{d}x + \frac{b j}{i+1}\, x^{i+1} y^{j-2} \,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité :

$$\omega_{i+4,j-2} = -\varepsilon a\,\omega_{i+2,j-2} - \varepsilon b\,\omega_{i+1,j-2} + \varepsilon\frac{i+1}{j}\,\omega_{i,j}\,.$$

En substituant le dernier terme à l'aide de (1), il vient

$$\begin{aligned}\omega_{i+4,j-2} &= \\ &= -\varepsilon a\,\omega_{i+2,j-2} - \varepsilon b\,\omega_{i+1,j-2} + \\ &\quad + \frac{i+1}{j}\,\varepsilon\Big(2h\cdot\omega_{i,j-2} - \varepsilon\frac{1}{2}\,\omega_{i+4,j-2} - a\,\omega_{i+2,j-2} - 2b\,\omega_{i+1,j-2}\Big)\,.\end{aligned}$$

En regroupant les termes et en prenant pour valeur particulière $j = 3$, on obtient l'égalité (ii).

LEMME 2.— *Toute 1-forme ω de degré n s'écrit dans $\mathcal{P}_H$:*

$$\omega = \sum_{k=0}^{2} a_k(h)\cdot\omega_k\,,\quad a_k(h)\in\mathbb{C}[h]$$

avec

$$\deg(a_0) \le \left[\frac{n-1}{2}\right] = p\,,\quad \deg(a_1) \le \left[\frac{n-2}{2}\right] = q\,,\quad \deg(a_2) \le q\,.$$

Preuve.— Le lemme 1 montre que les formes ω_0, ω_1, ω_2 forment un système de générateurs de $\mathcal{P}_H$. Soit ω une forme algébrique de degré inférieur ou égal à n que nous supposerons monomiale. Dans $\mathcal{P}_H$, ω s'écrit $\omega = a_0\omega_0 + a_1\omega_1 + a_2\omega_2$, où les coefficients a_ℓ sont des polynômes dont le degré reste à contrôler. Quitte à effectuer une intégration par parties, on peut poser $\omega = \omega_{i,j}$, $i + j \le n$. Remarquons aussi que si j est pair, $\omega = 0$ dans $\mathcal{P}_H$. Lorsque j est impair, $j = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, on peut écrire $\omega_{i,j}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\omega_{i,j} &= x^i y^j\,\mathrm{d}x \\ &= x^i y\left(2h - \varepsilon\frac{1}{2}x^4 - ax^2 - 2bx\right)^k\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{|M|=k} (*)\,h^{m_1}\omega_{i+4m_2+2m_3+m_4}\end{aligned}$$

où $|M| = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$. Le symbole $*$ désigne des constantes réelles que l'on ne précisera pas. La relation (2) appliquée à chaque terme de cette somme permet d'obtenir la majoration

$$\begin{aligned}\deg(a_\ell) &\leq \max_{|M|=k}\left(m_1 + \left[\frac{i + 4m_2 + 2m_3 + m_4 - \ell}{4}\right]\right)\\ &\leq \left[\frac{4k+i-\ell}{4}\right] \leq \left[\frac{2n-2-\ell}{4}\right]\end{aligned}$$

ce qui montre le résultat.

On considère les intégrales abéliennes :

$$I_i(h) = \int_{\delta(h)} x^i y \,\mathrm{d}x\,, \quad i \in \mathbb{N}\,.$$

LEMME 3.— *Le vecteur colonne* $I = (I_0, I_1, I_2)$ *vérifie le système de Picard-Fuchs :*

$$(Ah + B)\, I' = I$$

où

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-4\varepsilon a}{15} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -b & \frac{-a}{3} \\ \frac{\varepsilon ab}{4} & \frac{\varepsilon a^2}{4} & \frac{-3b}{4} \\ \frac{3\varepsilon b^2}{5} & \varepsilon ab & \frac{4\varepsilon a^2}{15} \end{pmatrix}.$$

Preuve.— D'après la formule de dérivation de Guelfand-Leray, la dérivée de I_i s'écrit $I_i'(h) = \int_{\delta(h)} (x^i/y)\,\mathrm{d}x$. En utilisant l'égalité

$$I_i(h) = \int_{\delta(h)} \frac{x^i y^2}{y}\,\mathrm{d}x = \int_{\delta(h)} \frac{x^i}{y}\left(2h - \frac{\varepsilon}{2}x^4 - ax^2 - 2bx\right)\mathrm{d}x\,,$$

on établit la relation

$$I_i = 2hI_i' - \frac{\varepsilon}{2}I_{i+4}' - aI_{i+2}' - 2bI_{i+1}'\,. \tag{3}$$

D'autre part, une intégration par parties permet d'obtenir

$$I_i = \frac{1}{i+1}\left(\varepsilon I_{i+4}' + aI_{i+2}' + bI_{i+1}'\right). \tag{4}$$

Si l'on élimine dans ces deux dernières relations le terme I'_{i+4}, on a

$$(i+3)I_i = 4hI'_i - 3bI'_{i+1} - aI'_{i+2}\,. \tag{5}$$

En écrivant cette égalité pour $i = 0, 1, 2$, on aboutit au système

$$\begin{cases} 3I_0 = 4hI'_0 - 3bI'_1 - aI'_2 \\ 4I_1 = 4hI'_1 - 3bI'_2 - aI'_3 \\ 5I_2 = 4hI'_2 - 3bI'_3 - aI'_4\,. \end{cases}$$

Dans ce système, on substitue I'_3 et I'_4 à l'aide des relations $\varepsilon I'_3 + aI'_1 + bI'_0 = 0$ et $I_0 = \varepsilon I'_4 + aI'_2 + bI'_1$, pour obtenir finalement le système de Picard-Fuchs annoncé. □

LEMME 4.— *Les intégrales abéliennes I_0, I_1, I_2 satisfont le système suivant*

$$\begin{cases} DI''_0 = P_0 I'_0 + Q_0 I'_2 \\ DI''_1 = P_1 I'_0 + Q_1 I'_2 \\ DI''_2 = P_2 I'_0 + Q_2 I'_2 \end{cases}$$

où les P_i et les Q_i sont des polynômes de degré au plus deux que l'on peut calculer explicitement :

$$P_0 = -\frac{4}{15}\varepsilon h^2 - \frac{1}{15}\varepsilon a^2 h - \frac{1}{20}ab^2\varepsilon$$

$$Q_0 = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}ah + \frac{3}{4}b^2 + \frac{1}{12}\varepsilon a^3\right)$$

$$P_2 = \frac{4}{15}\varepsilon a h^2 + \frac{1}{5}b^2\varepsilon h + \frac{1}{15}a^3 h + \frac{1}{30}a^2 b^2$$

$$Q_2 = \frac{4}{15}h^2 + \frac{1}{15}\varepsilon a^2 h + \frac{1}{20}\varepsilon a b^2\,.$$

Preuve.— En dérivant l'équation différentielle $(Ah+B)I' = I$, on obtient $(Ah+B)I'' = (\mathrm{Id} - A)I'$. Puisque $D(h)$ est à une constante réelle multiplicative près le déterminant de la matrice $(Ah+B)$, on obtient le résultat en multipliant à gauche par l'inverse de cette matrice et en remarquant que $(\mathrm{Id} - A)$ possède une deuxième colonne nulle.

Le sous-système de Picard-Fuchs vérifié par le vecteur (I'_0, I'_2) implique de manière immédiate le lemme suivant.

LEMME 5. — *Le quotient $w(h) = I_2'(h)/I_0'(h)$ vérifie l'équation de Riccati*

$$Dw' = -Q_0 w^2 + (Q_2 - P_0)w + P_2 .$$

Remarquons que la fonction w est bien définie car I_0' n'a ni pôle ni zéro sur l'intervalle $\mathcal{I}$.

3. Preuve du théorème 1

Soit $\{\delta(h), h \in \mathcal{I}\}$ une famille continue d'ovales contenus dans les niveaux de l'hamiltonien H. On supposera que le cycle $\delta(h)$ s'évanouit lorsque l'on tend vers une des extrémités de $\mathcal{I}$. Ceci arrive dans tous les cas rencontrés sauf pour les ovales extérieurs du "huit". Nous préciserons ultérieurement ce qui diffère dans cette dernière situation.

Soit ω une forme algébrique réelle de degré n. Notre but est de majorer le nombre de zéros de la fonction $I(h) = \int_{\delta(h)} \omega$ lorsque h appartient à l'intervalle réel $\mathcal{I}$. Exprimons ω dans la base de $\mathcal{P}_H$. D'après le lemme 3, ω s'écrit

$$\omega = \sum_{k=0}^{2} a_k(h)\, \omega_k$$

où les a_k, $k = 0,\ 1,\ 2$, sont des polynômes de degré respectivement inférieur ou égal à p, q et q. En intégrant sur le cycle $\delta(h)$, on obtient l'égalité:

$$I(h) = \sum_{k=0}^{2} a_k(h) I_k(h) . \tag{6}$$

L'espace vectoriel $\mathcal{J}_n = \{\int_{\delta(h)} \omega,\ \deg(\omega) \leq n\}$ apparaît naturellement comme enveloppe polynomiale tronquée des intégrales "élémentaires" $I_k(h)$, $k = 0,\ 1,\ 2$. On vérifie que l'orbite de $\delta(h)$ sous l'action de la monodromie engendre l'espace vectoriel $\mathbf{H}_1(F_h, \mathbb{C})$ ce qui implique que le module d'intégrales abéliennes $\mathcal{J} = \{\int_{\delta(h)} \omega,\ \omega \in \mathcal{P}_H\}$ est de rang lui aussi maximal, c'est-à-dire trois [1].

En appliquant le théorème de Rolle, on constate que le nombre de zéros de I sur $\mathcal{I}$ est inférieur ou égal à celui de sa dérivée I' puisque le cycle

$\delta(h)$ est évanescent. Si l'on dérive (6) et que l'on substitue les I_k à l'aide du système de Picard-Fuchs, il vient:

$$I'(h) = \sum_{k=0}^{2} b_k(h) I'_k(h)$$

avec $\deg(b_0) \leq p$, $\deg(b_1) \leq q$, $\deg(b_2) \leq q$.

Nous effectuons maintenant une étape de l'algorithme général de division-dérivation afin de ramener l'étude du nombre de zéros de I' à l'étude du nombre de zéros d'une combinaison polynomiale ne faisant intervenir que I'_0 et I'_2.

LEMME 6.— *Sur l'ouvert non connexe $\mathcal{I} \setminus \{D \cdot b_1 = 0\}$, on a*

$$\left(\frac{I'(h)}{b_1(h)}\right)' = \frac{J(h)}{b_1^2(h) \cdot D(h)}$$

avec $J(h) = u(h) I'_0(h) + v(h) I'_2(h)$; u et v étant des polynômes de degré respectivement inférieur ou égal à $(p+q+2)$ et $(p+q+1)$.

Remarque.— On a implicitement supposé que $b_1 \not\equiv 0$. Dans le cas contraire, on peut appliquer directement les lemmes 8 et 9.

Preuve.— On calcule directement la dérivée de ce quotient puis on remplace les dérivées secondes à l'aide des égalités données par le lemme 2. On obtient ainsi explicitement les polynômes u et v dont on contrôle le degré.

Dans le lemme suivant, nous indiquons le lien existant entre le nombre de zéros de I' et celui de J.

LEMME 7.— *Nous avons*

$$Z(I', \mathcal{I}) \leq Z(J, \mathcal{I}) + q + 2\,.$$

Preuve.— On applique le théorème de Rolle sur chaque composante connexe de $\mathcal{I} \setminus \{D \cdot b_1 = 0\}$ et à l'aide de l'équation donnée au lemme précédent, on compare l'ordre d'annulation de I' et de J aux points où $\{D \cdot b_1 = 0\}$.

On s'intéresse maintenant au nombre de points d'annulation de J sur $\mathcal{I}$. Puisque I_0' n'a ni pôle ni zéro sur $\mathcal{I}$, $Z(J,\mathcal{I}) = Z(W,\mathcal{I})$ où $W(h) = u(h) + v(h)w(h)$.

LEMME 8.— *La fonction W vérifie l'équation de Riccati :*

$$v\,DW' = -Q_0 \cdot W^2 + R \cdot W + S$$

avec S polynôme de degré inférieur ou égal à $2p+2q+5$.

Preuve.— Par un calcul direct,

$$\begin{aligned}
v\,DW' &= v\,D(u' + vw' + v'w) = v\,Du' + v^2 Dw' + vv'Dw \\
&= v\,Du' + v^2\big(-Q_0 w^2 + (Q_2 - P_0)w + P_2\big) + vv'\,Dw \\
&= v\,Du' - Q_0 w^2 v^2 + (Q_2 - P_0)v^2 w + v^2 P_2 + vv'\,Dw \\
&= -Q_0(W-u)^2 + (Q_2 - P_0)v(W-u) + \\
&\quad + v'\,D(W-u) + v^2 P_2 + v\,Du' \\
&= -Q_0 W^2 + RW - Q_0 u^2 - (Q_2 - P_0)vu - v'\,Du + v^2 P_2 + v\,Du'\,.
\end{aligned}$$

LEMME 9.— *Le nombre de zéros de W sur l'intervalle $\mathcal{I}$ est inférieur ou égal à* $\deg(S) + \deg(v) + 2 = 3p + 3q + 8$.

Preuve.— Une équation de Riccati de la forme précédente s'écrit, sur chaque composante connexe de $\mathcal{I} \setminus \{D \cdot v = 0\}$, comme un champ de vecteurs non singulier. Sur chaque composante, on peut alors montrer qu'entre deux zéros consécutifs de W, il existe au moins un zéro de S, ce qui donne sur l'intervalle $\mathcal{I}$ tout entier

$$Z(W,\mathcal{I}) \le Z(v\,D,\,\mathcal{I}) + Z(S,\,\mathcal{I}) + 1\,.$$

Nous pouvons grâce à ce lemme achever la preuve du théorème 1. En effet, d'après le lemme 3,

$$\begin{aligned}
Z(I,\mathcal{I}) &\le Z(I',\mathcal{I}) \\
&\le Z(J,\mathcal{I}) + q + 2 = Z(W,\mathcal{I}) + q + 2 \le 3p + 3q + 8 + q + 2\,.
\end{aligned}$$

D'où la majoration annoncée :

$$Z(I,\mathcal{I}) \le 3p + 4q + 10 \le \frac{7n}{2} + 3\,. \square$$

Remarque.— Dans le cas des ovales extérieurs du "huit", on peut recopier la démonstration en s'en écartant toutefois sur deux points. Le théorème de Rolle appliqué à la fonction $I(h)$ permet seulement d'obtenir l'inégalité $Z(I,\mathcal{I}) \leq Z(I',\mathcal{I})+1$. En revanche, le polynôme D ne s'annule pas sur l'intervalle $\mathcal{I}$, ce qui, en fin de compte, permet d'obtenir la majoration $Z(I,\mathcal{I}) \leq 7n/2+2$.

Les mêmes arguments permettent d'obtenir que dans le cas de la "double selle", on a l'estimation $Z(I,\mathcal{I}) \leq 7n/2+1$.

4. Preuve du théorème 2

Nous regardons en dernier lieu les cas symétriques, c'est-à-dire les hamiltoniens $H_{\varepsilon,a,b}$ avec $b=0$. En reprenant les hypothèses (2), le système de Picard-Fuchs satisfait par les intégrales élémentaires (I_0, I_1, I_2) s'écrit

$$\begin{cases} I_0 = \dfrac{4}{3}\, hI_0' - \dfrac{a}{3}\, I_2' \\ I_1 = \left(h + \dfrac{\varepsilon a^2}{4}\right) I_1' \\ I_2 = -\dfrac{4\varepsilon a}{15}\, hI_0' + \left(\dfrac{4}{5}\, h + \dfrac{4\varepsilon a^2}{15}\right) I_2' \,. \end{cases}$$

Nous avons dans ce cas immédiatement le sous-sytème de rang deux attendu :

$$\begin{cases} D \cdot I_0' = \left(\dfrac{4}{5}h + \dfrac{4\varepsilon a^2}{15}\right) I_0 + \dfrac{4\varepsilon a}{15}\, hI_2 = p_0 I_0 + q_0 I_2 \\ D \cdot I_2' = \dfrac{a}{3}\, I_0 + \dfrac{4}{3}\, hI_2 = p_2 I_0 + q_2 I_2 \end{cases}$$

où D est, à une constante réelle multiplicative près, le polynôme de degré 2 $D(h) = h(4h + \varepsilon a^2)$. Notons que l'équation différentielle vérifiée par I_1 permet d'obtenir par intégration $I_1(h) = C(4h + \varepsilon a^2)$, $C \in \mathbb{R}$.

A. Cas des ovales intérieurs du huit

L'intégrale d'une forme polynomiale ω de degré n sur cette famille d'ovales s'écrit

$$I(h) = \int_{\delta(h)} \omega = a_0 I_0 + b_1 + a_2 I_2\,, \quad h \in \mathcal{I} = \left]\frac{-a^2}{4}\,, 0\right[\,.$$

Les degrés des polynômes a_0, b_1, a_2 sont respectivement p, $q+1$ et q. L'analogue de la relation établie au lemme 6 s'écrit

$$\left(\frac{I(h)}{b_1(h)}\right)' = \frac{1}{D\cdot b_1^2}\,(u\,I_0 + v\,I_2)$$

où

$$u = a_0 b_1 p_0 + b_1 a_2 p_2 + D\cdot(a_0' b_1 - a_0 b_1')$$

et

$$v = a_0 b_1 q_0 + a_2 b_1 q_2 + D\cdot(a_2' b_1 - b_1' a_2)\,.$$

Les degrés de u et de v sont tous deux inférieurs à $(p+q+2)$ et l'on peut de plus remarquer que u est divible par $(4h+a^2)$ et que v est divisible par D.

De l'égalité précédente, il vient

$$Z(I,\mathcal{I}) \le Z(W,\mathcal{I}) + q + 1\,.$$

La fonction W est égale à

$$W(h) = u(h) + v(h)\frac{I_2(h)}{I_0(h)}$$

et vérifie l'équation de Riccati :

$$v\,DW' = -q_0W^2 + RW - q_0u^2 - (q_2-p_0)vu - v'\,Du + v^2p_2 + v\,Du'\,.$$

Notons que le "terme constant" de cette équation est un multiple du polynôme $h\big(4h+\varepsilon a^2\big)^2$. On peut de ce fait déduire que le nombre de zéros de W sur $\mathcal{I}$ n'excède pas $3p+3q+3$, d'où la majoration $Z(I,\mathcal{I}) \le 3p+4q+4$.

B. Autres cas (ovales extérieurs du huit, centre global et double selle)

Dans tous ces cas l'intégrale I_1 devient, pour des raisons de symétrie, identiquement nulle. Il en résulte que l'intégrale I d'une 1-forme polynomiale de degré n s'écrit directement comme combinaison des deux intégrales I_0 et I_2.

$$I(h) = \int_{\delta(h)} \omega = a_0I_0 + a_2I_2$$

avec, comme précédemment, $\deg(a_0) \le p$, $\deg(a_2) \le q$. Le rapport $W = I/I_0$ satisfait l'équation de Riccati :

$$a_2\,DW' = -q_0W^2 + RW - q_0a_0^2 - (q_2-p_0)a_0a_2 - a_2'\,Da_0 + a_2^2p_2 + a_2\,Da_0'\,.$$

On obtient ainsi la majoration $Z(W,\mathcal{I}) \leq 2p+q+2$, ce qui achève la preuve du théorème 2. □

Remarque.— L'un des auteurs profite de ce travail pour rectifier une erreur malencontreuse commise dans [11, p. 11, l. 12], le signe de l'expression

$$-\frac{1}{5}\frac{12-Q_1}{\ln(12-Q_1)}$$

est évidemment positif pour Q_1 voisin de 12. De ce fait et en vertu du point a) de [11, lemme 10], la courbe étudiée possède un nombre pair de points d'inflexion. D'autre part, dans [11, lemme 11], on montre que s'il y a un point d'inflexion, il est unique. Par conséquent la courbe est convexe. Le nombre de zéros de l'intégrale considérée est donc majoré par 2.

Notons que cette erreur est aussi mentionnée dans [7].

Remerciements.

Nous tenons à remercier Pavao Mardešič pour les discussions et remarques fructueuses dont il nous a fait part.

Références

[1] GAVRILOV (L.) .— *Petrov modules and zeros of Abelian integrals*, Bull. Sci. Math. (à paraître).

[2] GAVRILOV (L.) .— *Nonoscillation of elliptic integrals related to cubic polynomials with symmetry of order three*, Bull. Lond. Math. Soc. (à paraître).

[3] GIRARD (F.) .— *Une propriété de Chebychev pour certaines intégrales abéliennes généralisées*, C. R. Acad. Sci. Paris, **326**, Série I (1998), pp. 471-476.

[4] HA HUY VUI ET NGUYEN LE ANH .— *Le comportement géométrique à l'infini des polynômes de deux variables complexes*, C. R. Acad. Sci. Paris, **309**, Série I (1989), pp. 183-186.

[5] HOROZOV (E.) et ILIEV (I. D.) .— *Linear estimate for the number of zeros of Abelian integrals with cubic Hamiltonians*, Conférence à Luminy, octobre 1997.

[6] ILIEV (D.) .— *On second order bifurcations of limit cycles*, J. Lond. Math. Soc. 1998.

[7] ILIEV (D.) et PERKO (L.) .— *Higher order bifurcation of limit cycles*, (à paraître).

[8] IL'YASHENKO (YU. S.) .— *The multiplicity of limit cycles arising from perturbation of the form $w' = P_2/Q_1$ of a Hamilton equation in the real and complex domain*, Amer. Math. Soc. Trans. **118**, n° 2 (1982).

[9] IL'YASHENKO (YU. S.) et YAKOVENKO (S.), .— *Double exponential estimate for the number of zeros of complete Abelian integrals*, Invent. Math. **121**, n° 3 (1995), pp. 613-650.

[10] IL'YASHENKO (YU. S.) et YAKOVENKO (S.), .— *Counting real zeros of analytic function satisying linear ordinary differential equations*, J. Diff. Equ. **126**, n° 1 (1996), pp. 87-105.

[11] JEBRANE (M.) et ZOLADEK (H.) .— *Abelian integrals in non-symmetric perturbation of symmetric Hamiltonian vector field*, Adv. Appl Math. **15** (1994), pp. 1-12.

[12] KHOVANSKI (A.) .— *Real analytic manifolds with finiteness properties and complex Abelian integrals*, Funct. Anal. Appl. **18** (1984), pp. 119-128.

[13] MALGRANGE (B.) .— *Intégrales asymptotiques et monodromie*, Ann. Scient. Ec. Norm. Supp. **7** (1974), pp. 405-430.

[14] MARDEŠIČ (P.) .— *The number of limit cycles of polynomial perturbations of a Hamiltonian vector field*, Erg. Th. Dyn. Sys. **10** (1990), pp. 523-529.

[15] NOVIKOV (D.) et YAKOVENKO (S.) .— *Simple exponential estimate for the number of real zeros of complete Abelian integrals*, Ann. Inst. Fourier **45** (1995), pp. 897-927.

[16] PETROV (G. S.) .— *Elliptic integrals and their non-oscillatorness*, Funct. Anal. Appl. **20**, n° 1 (1986), pp. 46-49.

[17] PETROV (G. S.) .— *Complex zeros of an elliptic integral*, Funct. Anal. Appl. **21** (1987), n° 3, pp. 87-88.

[18] PETROV (G. S.) .— *Non-oscillatorness of elliptic integrals*, Funct. Anal. Appl. **24**, n° 3 (1990), pp. 45-50.

[19] VARCHENKO (A. N.) .— *Estimate of the number of zeros of Abelian integrals depending on parameters and limit cycles*, Funct. Anal. Appl. **18** (1984), pp. 98-108.