ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

TIEN-CUONG DINH

Conjecture de Globevnik-Stout et théorème de Morera pour une chaîne holomorphe

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 8, nº 2 (1999), p. 235-257

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1999_6_8_2_235_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VIII, n° 2, 1999
pp. 235–257

Conjecture de Globevnik-Stout et théorème de Morera pour une chaîne holomorphe (*)

TIEN-CUONG DINH (1)

RÉSUMÉ. — Soient $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ une variété complexe de dimension $p \geqslant 2$ à bord $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{C}^n$, f une fonction $\mathcal{C}^1$ sur bD et V une famille suffisamment grande et générique de $(n-p+1)$-plans complexes. Supposons que pour $\nu \in V$, aucune composante connexe de $bD \cap \mathbb{C}_\nu^{n-p+1}$ n'est presque réelle analytique et que f se prolonge holomorphiquement dans $D \cap \mathbb{C}_\nu^{n-p+1}$. Alors f se prolonge en une fonction holomorphe dans D. Dans un cas particulier, ce résultat donne une réponse partielle à une conjecture de Globevnik-Stout [8]. En généralisant le théorème de Harvey-Lawson, nous démontrons un théorème du type de Morera pour le problème du bord dans $\mathbb{C}^n$ qui répond à un problème de Dolbeault-Henkin [6].

ABSTRACT. — Let $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ be a complex manifold of dimension $p \geqslant 2$ with $\mathcal{C}^2$ boundary in $\mathbb{C}^n$. Let f be a $\mathcal{C}^1$ function on bD and V a generic and large enough family of complex $(n-p+1)$-planes. Let suppose that for $\nu \in V$, no connected component of $bD \cap \mathbb{C}_\nu^{n-p+1}$ is "almost" real analytic and that f extends holomorphically in $D \cap \mathbb{C}_\nu^{n-p+1}$. Then f extend as a holomorphic function in D. In a special case, this result gives a partial answer to a conjecture of Globevnik-Stout [8]. By generalizing the theorem of Harvey-Lawson, we prove a Morera type theorem for the boundary problem in $\mathbb{C}^n$ which answer to a problem asked by Dolbeault and Henkin [6].

(*) Reçu le 29 avril 1998, accepté le 10 novembre 1998
(1) Bâtiment 425 - Mathématique, Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex (France).
E-mail: TienCuong.Dinh@math.u-psud.fr

1. Introduction

Soit Γ une hypersurface réelle d'une variété complexe X de dimension n. Une fonction f localement intégrable sur Γ est appelée *fonction CR* si pour toute $(n, n-2)$-forme ψ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans U, on a $\int_\Gamma f\overline{\partial}\psi = 0$, où Γ possède l'orientation induite par celle de X. Si $f \in \mathcal{C}^1$, cette condition est équivalente à la condition

$$\overline{L}f(z) = 0 \qquad \text{pour tout vecteur tangent holomorphe complexe } L \in \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \operatorname{Tan}_{\mathbb{C}}(\Gamma, z) \tag{1}$$

pour tout $z \in \Gamma$, où $\operatorname{Tan}_{\mathbb{C}}(\Gamma, z)$ est le sous-espace tangent complexe maximal de l'espace tangent de Γ en z.

D'après le théorème de Bochner, toute fonction continue, CR sur le bord lisse d'un domaine simplement connexe D de $\mathbb{C}^n$ avec $n \geqslant 2$ se prolonge continûment en une fonction holomorphe de D. En généralisant ce théorème, Harvey et Lawson ont démontré que toute variété compacte Γ de classe $\mathcal{C}^1$ à singularité négligeable, de dimension $2p-1$, orientée et *maximalement complexe* (c.-à-d. le plan tangent de Γ en tout point contient un $\mathbb{C}^{p-1}$) dans $\mathbb{C}^n$ borde un sous-ensemble analytique D de dimension p de $\mathbb{C}^n \setminus \Gamma$ (ou une p-chaîne holomorphe si Γ n'est pas irréductible) pour tout $p \geqslant 2$. Si Γ est de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geqslant 1$, D est $\mathcal{C}^k$ en tout point du bord sauf sur un compact de volume $(2p-1)$-dimensionnel nul [10, 11]. On en déduit que toute fonction f CR, de classe $\mathcal{C}^1$ sur bD se prolonge en une fonction holomorphe, bornée dans $D \setminus \operatorname{Sing}D$. En effet, le graphe de f est maximalement complexe, il borde le graphe d'une fonction holomorphe sur $D \setminus \operatorname{Sing}D$.

Dans cet article, nous allons étudier le problème d'extension holomorphe de fonctions sans hypothèse "f est CR" et également le problème du bord sans hypothèse "Γ est maximalement complexe".

Soient D un domaine borné à bord $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{C}^n$ et f une fonction continue sur bD. D'après Agranovski-Semenov, Valski, Rudin, Stout, si f se prolonge holomorphiquement dans $D \cap \mathbb{C}_\nu$ pour $\mathcal{H}^{4(n-1)}$-presque toute droite complexe $\mathbb{C}_\nu$, alors elle se prolonge holomorphiquement dans D [1, 14, 16]. Plus généralement, Globevnik et Stout ont démontré que si sur $bD \cap \mathbb{C}_\nu$, la fonction f vérifie une condition de moments faible, qui s'appelle *condition de Morera* (c.-à-d. $\int_{bD\cap\mathbb{C}_\nu} f dz_1 = 0$) pour $\mathcal{H}^{4(n-1)}$-presque tout ν, alors elle est CR et elle se prolonge holomorphiquement dans D si bD est connexe [8]. Ce théorème reste valable si on considère uniquement les droites dont la direction appartient à un ouvert non vide de la grassmannienne $G(1, n)$. Dans la démonstration, Globevnik et Stout ont considéré les fonctions dont les lignes de niveaux sont les hyperplans complexes parallèles. L'espace engendré par telles fonctions est dense dans $\mathcal{C}^\infty$. Cette propriété réduit le problème à une vérification de l'égalité $\int_\Gamma f\overline{\partial}\psi = 0$ pour $\psi = Adz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\overline{z}_i} \wedge \ldots \wedge \widehat{d\overline{z}_j} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_n$, où A est une fonction dont les lignes de niveaux sont des hyperplans complexes parallèles. Finalement, cette égalité est un corollaire du théorème de Fubini et de la condition de Morera. Globevnik et Stout ont conjecturé que si D est convexe, $\Omega \subset\subset D$ est un sous-domaine convexe et si f se prolonge holomorphiquement dans $D \cap \mathbb{C}_\nu$ pour toute droite $\mathbb{C}_\nu$ tangente à $b\Omega$, alors f se prolonge holomorphiquement dans D. Récemment, ils ont montré un résultat analogue en remplaçant la famille $\{D \cap \mathbb{C}_\nu\}$ par une famille suffisament grande de disques holomorphes à bord dans D [9]. Notre premier résultat donne une réponse partielle à la conjecture précédente.

Soient Y un compact $(n-p+1)$-*linéairement convexe* de $\mathbb{CP}^n$ (c.-à.-d. $\mathbb{CP}^n \setminus Y$ est la réunion d'une famille continue de $(n-p+1)$-plans projectifs), D une variété à bord $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{C}^n \setminus Y$, bornée dans $\mathbb{C}^n$, f une fonction $\mathcal{C}^1$ définie sur bD et $V \subset G(n-p+2, n+1)$ une famille de $(n-p+1)$-plans complexes de $\mathbb{C}^n \setminus Y$ qui coupent bD transversalement, où la grassmannienne $G(n-p+2, n+1)$ est l'ensemble des paramètres des $(n-p+1)$-plans complexes. Supposons que pour tout $\nu \in V$, f se prolonge holomorphiquement dans $D \cap \mathbb{C}_\nu^{n-p+1}$ et qu'aucune composante connexe de $bD \cap \mathbb{C}_\nu^{n-p+1}$ n'est *presque réelle analytique* (c.-à-d. $\mathbb{C}_\nu \cap bD$ n'est pas réelle analytique en dehors d'un compact de longueur nulle). Nous allons démontrer que si V est suffisament grande et générique (par exemple une variété de codimension réelle 1 telle que $\bigcup_V \mathbb{C}_\nu^{n-p+1}$ recouvre bD) alors f se prolonge holomorphiquement dans $D \setminus \mathrm{Sing}D$. Ce théorème n'est plus valable si l'on supprime la condition "aucune composante connexe de $bD \cap \mathbb{C}_\nu^{n-p+1}$ n'est presque réelle analytique". Nos contre-exemples sont donnés dans le cas où bD est Levi plat et Y n'est pas un compact de $\mathbb{C}^n$. L'idée de la démonstration (par exemple pour $n = p = 2$, D convexe et V une hypersurface réelle de $G(2,3)$) est la suivante. On considère $\nu = (\zeta, \eta) \in V$ un point générique, $\mathbb{C}_\nu = \{z_2 = \zeta + \eta z_1\}$ et H le plan tangent de V en ν. Supposons, par exemple, que $H \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est engendré par $\partial/\partial\zeta + \partial/\partial\overline{\zeta}$, $\partial/\partial\eta$ et $\partial/\partial\overline{\eta}$. Par hypothèse, les dérivées de la transformation d'Abel-Radon $R(fPdz_1) := \int_{bD\cap\mathbb{C}_\nu} fPdz_1$ par les vecteurs précédents sont nulles en ν pour tout polynôme P en z. En effet, la formule de Stokes sur $D \cap \mathbb{C}_\nu^{n-p+1}$ implique la condition des moments $R(fPdz_1) = 0$ sur V. D'autre part,

$$\frac{\partial R(fPdz_1)}{\partial \eta} = \frac{\partial R(fz_1Pdz_1)}{\partial \zeta}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial R(fPdz_1)}{\partial\overline{\zeta}} &= \int_{bD\cap\mathbb{C}_\nu}\frac{\partial f}{\partial\overline{z}_2}\frac{\partial\overline{z}_2}{\partial\overline{\zeta}}Pdz_1\\ \frac{\partial R(fPdz_1)}{\partial\overline{\eta}} &= \int_{bD\cap\mathbb{C}_\nu}\frac{\partial f}{\partial\overline{z}_2}\frac{\partial\overline{z}_2}{\partial\overline{\zeta}}\overline{z}_1Pdz_1\end{aligned}$$

Ces égalités sont induites par le lemme de Darboux [12] dans le cas où bD est, au voisinage de $bD\cap\mathbb{C}_\nu$, feuilleté par des droites complexes. Pour le cas général, il suffit d'approximer bD par ses droites complexes tangentes en $bD\cap\mathbb{C}_\nu$. Nous déduisons des égalités précédentes, appliquées pour P ou pour z_1P, que $\frac{\partial f}{\partial\overline{z}_1}\frac{\partial\overline{z}_2}{\partial\overline{\zeta}}\overline{z}_1$ et $\frac{\partial f}{\partial\overline{z}_1}\frac{\partial\overline{z}_2}{\partial\overline{\zeta}}z_1$ vérifient la condition des moments (*voir* la définition dans le paragraphe 2). Par conséquent, elles se prolongent holomorphiquement dans $D\cap\mathbb{C}_\nu$. Si $bD\cap\mathbb{C}_\nu$ n'est pas presque réelle analytique, la fonction $\overline{z}_1\,|_{bD\cap\mathbb{C}_\nu}$ ne se prolonge pas méromorphiquement dans $D\cap\mathbb{C}_\nu$. Les deux fonctions précédentes sont donc nulles. D'où f vérifie (1) sur $bD\cap\mathbb{C}_\nu$.

Un fermé K d'une variété X est appelé *géométriquement k-rectifiable* s'il est localement $(\mathcal{H}^k,k)$-rectifiable et s'il admet un k-plan tangent réel géométrique en tout point sauf sur un ensemble de *mesure de Hausdorff k-dimensionnelle $\mathcal{H}^k$* nulle. Cette notion permet de généraliser le théorème de Harvey-Lawson pour tout courant rectifiable, fermé, maximalement complexe et à support compact géométriquement $(2p-1)$-rectifiable dans $\mathbb{C}^n$ [2].

Soit Γ un courant rectifiable, fermé, de dimension $2p-1$ et à support compact géométriquement $(2p-1)$-rectifiable tel que le courant d'intersection $\Gamma\cap\mathbb{C}^{n-p+1}_\nu$ vérifie *la condition de Morera* ($(\Gamma\cap\mathbb{C}^{n-p+1}_\nu, z_idz_j)=0$ pour tous i,j) pour tout $\nu\in \mathrm{G}(n-p+2,n+1)$ générique. Alors Γ borde une p-chaîne holomorphe au sens des courants. Ce théorème donne la réponse positive à un problème de Dolbeault-Henkin [6, problème II] et généralise les résultats d'Agranovski-Semenov, Rudin, Valski, Stout, Globevnik [16, 8]. Il généralise également le théorème de Harvey-Lawson. En effet, grâce à la formule de Cauchy, on peut montrer que si Γ est maximalement complexe, $\Gamma\cap\mathbb{C}^{n-p+1}_\nu$ vérifie la condition des moments pour un sous-espace $\mathbb{C}^{n-p+1}_\nu$ générique de $\mathbb{C}^n$. La solution locale du problème du bord au voisinage d'un point, où Γ est strictement pseudoconvexe (Lewy) permet de recoller les solutions du problème du bord sur les tranches $\mathbb{C}^{n-p+1}_\nu$ en une p-chaîne holomorphe. Dans la démonstration du théorème de Morera, nous utilisons l'idée de Globevnik-Stout sur la densité d'un certain sous-espace de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{C}^n$.

Nous démontrons également un théorème analogue à la conjecture de Globevnik-Stout pour le problème du bord dans $\mathbb{C}^n$. Ce dernier résultat et le premier résultat cité ci-dessus sont récemment généralisés pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{CP}^1$ et pour le problème du bord dans $\mathbb{CP}^n$ [5].

2. Problème d'extension holomorphe

Soient D un domaine de Jordan à bord rectifiable de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur bD. Alors f se prolonge continûment en une fonction holomorphe dans D si et seulement si f vérifie *la condition des moments*, c.-à-d. $\int_{bD} f\varphi = 0$ pour toute $(1,0)$-forme polynomiale φ sur $\mathbb{C}$. Plus généralement, soient D une surface de Riemann polynomialement convexe de $\mathbb{C}^n$ à bord géométriquement 1-rectifiable et $f \in \mathcal{C}^0(bD)$ vérifiant *la condition des moments* dans $\mathbb{C}^n$, c.-à-d. $(d[D], f\varphi) = 0$ pour toute $(1,0)$-forme polynomiale φ dans $\mathbb{C}^n$, où $[D]$ est le courant de bidimension $(1,1)$ défini par l'intégration sur D. Alors f se prolonge en une fonction holomorphe dans D au sens faible des courants. Ceci est un corollaire d'un résultat de [3] sur l'extension des mesures orthogonales en $(1,0)$-forme holomorphes (appliqué ici aux mesures $f\varphi$ supportées par bD). Ce résultat de [3] généralise les résultats de Wermer et de Henkin, qui sont valables dans le cas d'une courbe réelle analytique [17] ou $\mathcal{C}^2$ par morceaux [12].

DÉFINITION 1 ([12]). — Une fonction (ou une $(1,0)$-forme) méromorphe f sur D est appelée *holomorphe* si le courant d'intégration $f \wedge [D]$ est $\overline{\partial}$ fermé dans $\mathbb{C}^n \setminus bD$. Si D est lisse, cette définition donne les fonctions et les formes holomorphes habituelles.

Soit $\gamma \subset \mathbb{C}^n$ une courbe réelle, fermée, de classe $\mathcal{C}^2$ bordant une surface de Riemann S' (éventuellement singulière et réductible). Alors l'enveloppe polynomiale $\widehat{\gamma}$ de γ est la réunion de γ avec une surface de Riemann S contenant la surface précédente [15]. On note S_j avec $j \in J$ les surfaces de Riemann irréductibles de S. On appelle γ_j la courbe fermée minimale (éventuellement réductible) de γ telle que $\widehat{\gamma}_j \supset S_j$. D'après le théorème d'unicité, la surface S est lisse jusqu'au bord sauf sur un ensemble fini ou dénombrable de singularité de S et sur un compact de mesure $\mathcal{H}^1$ nulle (éventuellement vides) de γ. Toute mesure orthogonale $\mu = hdz_m$ supportée par γ se prolonge en une $(1,0)$-forme holomorphe φdz_m dans S au sens faible des courants. De plus, si $\gamma_j \not\subset bS_{j'}$ pour tout $j' \neq j$, alors pour $\mathcal{H}^1$-presque tout point $x \in \gamma_j$ la fonction $\varphi(z)$ tend vers $h(x)$ quand z tend vers x le long des arcs non tangentiels à γ_j [3]. Si h est une fonction continue, il existe un compact $K \subset \gamma_j$ de longueur zéro ($\mathcal{H}^1(K) = 0$) tel que le prolongement de h soit continu en tout point de $\gamma_j \setminus K$. On note $\mathcal{K}_j$ l'anneau des fonctions h continues sur γ_j telles que $h|_{\gamma_j \setminus K_h}$ se prolonge en une fonction méromorphe sur S_j, continue en tout point de $\gamma_j \setminus K_h$ pour un certain compact $K_h \subset \gamma_j$ de longueur 0. En particulier, dans un voisinage de $\gamma_j \setminus K_h$ l'extension de h n'a pas de pôle. La courbe γ est appelée *générique* si pour tout $j \in J$ les fonctions $\overline{z}_m$ sont $\mathcal{K}_j$-algébriquement indépendantes sur γ_j, c.-à-d. pour tout polynôme P de $\mathcal{K}_j[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, on a $P(\overline{z})|_{\gamma_j} \not\equiv 0$. En particulier, si γ est générique, elle n'est incluse dans aucune hypersurface algébrique de $\mathbb{C}^n$ et l'application naturelle de l'anneau des polynômes $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{K}_j$ est injective.

On note $\mathrm{G}(q+1, n+1)$ la grassmannienne qui est l'ensemble des q-plans projectifs de $\mathbb{CP}^n$. On a $\dim \mathrm{G}(q+1, n+1) = (q+1)(n-q)$. L'ensemble $\mathrm{G}^*(q+1, n+1)$ des q-plans affines de $\mathbb{C}^n$ sera considéré comme un ouvert de Zariski de $\mathrm{G}(q+1, n+1)$. Soit $Y \subset \mathbb{CP}^n$ un compact q-linéairement convexe. On pose $\mathrm{G}_Y^*(q+1, n+1) = \{\nu \in \mathrm{G}^*(q+1, n+1) : \mathbb{C}_\nu^q \cap Y = \emptyset\}$. Soit D une variété complexe (éventuellement singulière) à bord $\mathcal{C}^2$ de dimension $p \geqslant 2$ dans $\mathbb{C}^n \setminus Y$, bornée dans $\mathbb{C}^n$, c.-à-d. D est un sous-ensemble analytique de dimension pure p de $\mathbb{C}^n \setminus bD \cup Y$. Alors bD admet une orientation induite par celle de D ainsi que $bD \cap \mathbb{C}_\nu^q$ si cette intersection est transversale. On note $\mathrm{G}_D(q+1, n+1)$ le sous-ensemble de $\mathrm{G}_Y^*(q+1, n+1)$ des q-plans qui coupent bD transversalement. D'après le théorème de Sard, cet ensemble est un ouvert dense de $\mathrm{G}_Y^*(q+1, n+1)$ et son complémentaire est de volume 0.

THÉORÈME 1.— *Soient Y un compact $(n-p+1)$-linéairement convexe de $\mathbb{CP}^n$, D une variété complexe (éventuellement singulière) de dimension $p \geqslant 2$ de $\mathbb{C}^n \setminus Y$, borné dans $\mathbb{C}^n$, à bord $\mathcal{C}^2$ et f une fonction $\mathcal{C}^1$ définie sur bD. Soit $V \subset \mathrm{G}_D(n-p+2, n+1)$ tel que $bD \cap \bigcup_{\nu \in V_1} \mathbb{C}_\nu^{n-p+1}$ soit dense dans bD, où V_1 est l'ensemble de $\nu \in V$ vérifiant*

1. *Le cône tangent de V en ν contient $2(p-1)(n-p+2)-1$ vecteurs réels indépendants.*
2. *Aucune composante connexe de $\mathbb{C}_\nu^{n-p+1} \cap bD$ n'est presque réelle analytique.*

Supposons que f se prolonge continûment en une fonction holomorphe dans $D \cap \mathbb{C}_\nu^{n-p+1}$ pour tout $\nu \in V$. Alors f se prolonge continûment en une fonction holomorphe dans $D \setminus \mathrm{Sing}D$, localement bornée dans $\overline{D} \setminus Y$.

Remarque.— Dans le cas général (Y n'est pas un compact de $\mathbb{C}^n$) la condition 2 est nécessaire (*voir* les exemples 1 et 2).

Soient ν_0 un point de $\mathrm{G}^*(n-p+2, n+1)$, U un voisinage de $\mathbb{C}_{\nu_0}^{n-p+1}$, $B \subset U$ une sous-variété réelle, orientée, maximalement complexe de dimension $2p-1$, bornée dans $\mathbb{C}^n$, à bord $\mathcal{C}^2$, f une fonction $\mathcal{C}^1$ sur B et φ une 1-forme lisse définie sur B. Supposons que $\mathbb{C}_\nu^{n-p+1}$ coupe B transversalement. On appelle (en généralisant la transformation d'Abel-Radon définie dans [12]) *la transformation d'Abel-Radon* de $[B] \wedge f\varphi$ l'intégrale $\int_{B \cap \mathbb{C}_\nu^{n-p+1}} f\varphi$. Cette intégrale définit une fonction au voisinage de ν_0, continue si f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ si f l'est.

PROPOSITION 1. — *Supposons que $\gamma = \mathbb{C}_{\nu_0}^{n-p+1} \cap B$ borde une surface de Riemann S'. Supposons que pour toute $(1,0)$-forme polynomiale φ de $\mathbb{C}^n$, la dérivée de la transformation d'Abel-Radon $R(f\varphi)$ par rapport à ν s'annulle en ν_0 sur un u-plan réel générique $H \subset \mathrm{Tan}\,(\mathrm{G}^*(n-p+2, n+1), \nu_0)$ indépendant de φ avec $u \geqslant (p-1)(n-p+2)+1$. L'une des conditions suivantes sera satisfaite*

1. $\overline{L}f(z) = 0$ *pour tout $z \in \gamma$ et pour tout vecteur tangent complexe holomorphe $L \in \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Tan}_{\mathbb{C}}(B, z)$.*
2. *Il existe une courbe γ_j avec $j \in J$ telle que les conjuguées des coordonnées de $\mathbb{C}_{\nu_0}^{n-p+1}$ sont $\mathcal{K}_j$-algébriquement dépendantes.*

Remarque. — Les courbes γ_j et les anneaux $\mathcal{K}_j$ sont définis comme ci-dessus mais pour γ dans $\mathbb{C}_{\nu_0}^{n-p+1}$. Tan $(.,.)$ désigne l'espace tangent réel. La notion de u-plan générique sera définie plus tard. Si $u = 2(p-1)(n-p+2)-1$ ou $2(p-1)(n-p+2)$, tout u-plan est générique dans ce sens (*voir* le lemme 2).

Preuve. — Dans un ouvert de Zariski $\mathbb{C}^{(p-1)(n-p+2)}$ de $\mathrm{G}(n-p+2, n+1)$, on peut identifier ν à une matrice (ζ, η) de taille $(p-1) \times (n-p+2)$, où

$$\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_{n-p+2} \\ \zeta_{n-p+3} \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix} \quad \text{et } \eta = \begin{pmatrix} \eta_{n-p+2}^1 & \eta_{n-p+2}^2 & \cdots & \eta_{n-p+2}^{n-p+1} \\ \eta_{n-p+3}^1 & \eta_{n-p+3}^2 & \cdots & \eta_{n-p+3}^{n-p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_n^1 & \eta_n^2 & \cdots & \eta_n^{n-p+1} \end{pmatrix}$$

et le $(n-p+1)$-plan complexe $\mathbb{C}_\nu^{n-p+1}$ est défini par les $(p-1)$ équations suivantes

$$\begin{aligned} z_m &= \zeta_m + \eta_m^1 z_1 + \eta_m^2 z_2 + \cdots + \eta_m^{n-p+1} z_{n-p+1} \\ &\quad \text{pour } m = n-p+2, \ldots, n \end{aligned} \tag{2}$$

Considérons le cas où B est une réunion de $(p-1)$-plans complexes, c.-à-d. $B = \bigcup_{a \in \Upsilon} \mathbb{C}_a^{p-1}$, où Υ est une courbe réelle, orientée, fermée (éventuellement réductible) de $\mathrm{G}^*(p, n+1)$. Sans perdre en généralité, on suppose que pour tout $a \in \Upsilon$, $z'' := (z_{n-p+2}, z_{n-p+3}, \ldots, z_n)$ est un système de coordonnées de $\mathbb{C}_a^{p-1}$ et $z' := (z_1, z_2, \ldots, z_{n-p+1})$ est un système de coordonnées de $\mathbb{C}_{\nu_0}^{n-p+1}$. Dans ce cas, on peut écrire la fonction f sous la forme d'une fonction $g(a, z'')$ à variables a et z''. Pour tout $a \in \Upsilon$ et tout ν près de ν_0, on note $Z := (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ les coordonnées du point d'intersection de $\mathbb{C}_a^{p-1}$ et de $\mathbb{C}_\nu^{n-p+1}$, qui dépendent de a et de ν.
Les équations (2) impliquent

$$\frac{\partial Z_m}{\partial \eta_q^k} = Z_k \frac{\partial Z_m}{\partial \zeta_q} \tag{3}$$

pour tous $k = 1, 2, \ldots, n-p+1$, $q = n-p+2, \ldots, n$ et $m = 1, \ldots, n$. En effet, par exemple pour $q = n$, $k = 1$, si on fixe a, ζ_s pour tout $s = n-p+2, \ldots, n-1$ et η_s^r pour tout $(r,s) \neq (1,n)$, alors tout Z_i s'écrit en fonction affine de Z_n. Il suffit donc de prouver l'égalité précédente pour $m = n$. On écrit $Z_1 = \alpha Z_n + \beta$ et $\eta_n^2 Z_2 + \cdots + \eta_n^{n-p+1} Z_{n-p+1} = \omega Z_n + \theta$. On a

$$Z_n = \zeta_n + \eta_n^1(\alpha Z_n + \beta) + \omega Z_n + \theta.$$

D'où

$$Z_n = \frac{\zeta_n + \eta_n^1 \beta + \theta}{1 - \eta_n^1 \alpha - \omega} \text{ et } Z_1 = \frac{\alpha\zeta_n + \alpha\theta + \beta - \beta\omega}{1 - \eta_n^1\alpha - \omega}$$

$$\frac{\partial Z_n}{\partial \eta_n^1} = \frac{\alpha\zeta_n + \alpha\theta + \beta - \beta\omega}{(1 - \eta_n^1\alpha - \omega)^2} = Z_1 \frac{\partial Z_n}{\partial \zeta_n}.$$

Les égalités (3) se trouvent également dans [12, lemme de Darboux]. Elles nous donnent aussi

$$\frac{\partial \overline{Z}_m}{\partial \overline{\eta}_q^k} = \overline{Z}_k \frac{\partial \overline{Z}_m}{\partial \overline{\zeta}_q} \tag{4}$$

Dans les formules suivantes, les z_k peuvent être confondus avec leurs transformés d'Abel-Radon Z_k. D'après (3), (4), nous avons pour tout polynôme P en z' et pour tout $s, k = 1, 2, \ldots, n-p+1$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R(gPdz_s)}{\partial \eta_m^k} &= \sum_{q=n-p+2}^{n} \left\{ \int_\Upsilon \frac{\partial g}{\partial z_q} \frac{\partial Z_q}{\partial \eta_m^k} P dZ_s + \int_\Upsilon g \frac{\partial P}{\partial z_q} \frac{\partial Z_q}{\partial \eta_m^k} dZ_s \right\} + \\
&\quad + \int_\Upsilon gPd\frac{\partial Z_s}{\partial \eta_m^k} \\
&= \sum_{q=n-p+2}^{n} \left\{ \int_\Upsilon \frac{\partial g}{\partial z_q} \frac{\partial Z_q}{\partial \zeta_m} P Z_k dZ_s + \int_\Upsilon g \frac{\partial P}{\partial z_q} \frac{\partial Z_q}{\partial \zeta_m} Z_k dZ_s \right\} + \\
&\quad + \int_\Upsilon gPd\left(Z_k \frac{\partial Z_s}{\partial \zeta_m} \right) \\
&= \sum_{q=n-p+2}^{n} \left\{ \int_\Upsilon \frac{\partial g}{\partial z_q} \frac{\partial Z_q}{\partial \zeta_m} P Z_k dZ_s + \int_\Upsilon g \frac{\partial P}{\partial z_q} \frac{\partial Z_q}{\partial \zeta_m} Z_k dZ_s \right\} + \\
&\quad + \int_\Upsilon gPZ_k d\frac{\partial Z_s}{\partial \zeta_m} + \int_\Upsilon gP \frac{\partial Z_s}{\partial \zeta_m} dZ_k \\
&= \sum_{q=n-p+2}^{n} \left\{ \int_\Upsilon \frac{\partial g}{\partial z_q} \frac{\partial Z_q}{\partial \zeta_m} P Z_k dZ_s + \int_\Upsilon g \frac{\partial P}{\partial z_q} \frac{\partial Z_q}{\partial \zeta_m} Z_k dZ_s \right\} + \\
&\quad + \int_\Upsilon gPZ_k d\frac{\partial Z_s}{\partial \zeta_m} + \int_\Upsilon gP \frac{\partial Z_k}{\partial \zeta_m} dZ_s -
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& - \int_\Upsilon gP \frac{\partial Z_k}{\partial \zeta_m} dZ_s + \int_\Upsilon gP \frac{\partial Z_s}{\partial \zeta_m} dZ_k \\
= \; & \frac{\partial R(gPz_k dz_s)}{\partial \zeta_m} - \int_\Upsilon gP \frac{\partial Z_k}{\partial \zeta_m} dZ_s + \int_\Upsilon gP \frac{\partial Z_s}{\partial \zeta_m} dZ_k \\
= \; & \frac{\partial R(gPz_k dz_s)}{\partial \zeta_m} + \int_\Upsilon gP \left\{ - \frac{\partial Z_k}{\partial \zeta_m} dZ_s + \frac{\partial Z_s}{\partial \zeta_m} dZ_k \right\} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

et

$$
\frac{\partial R(gPdz_s)}{\partial \overline{\zeta}_m} = \int_\Upsilon \sum_{q=n-p+2}^{n} \frac{\partial g}{\partial \overline{z}_q} \frac{\partial \overline{Z}_q}{\partial \overline{\zeta}_m} P dZ_s \qquad (6)
$$

$$
\frac{\partial R(gPdz_s)}{\partial \overline{\eta}_m^k} = \int_\Upsilon \sum_{q=n-p+2}^{n} \frac{\partial g}{\partial \overline{z}_q} \frac{\partial \overline{Z}_q}{\partial \overline{\zeta}_m} P \overline{Z}_k dZ_s \qquad (7)
$$

En utilisant un changement linéaire des coordonnées $z = (z', z'')$ on se ramène dans le cas où $\nu_0 = 0$.
Soient L_λ les vecteurs $\mathbb{C}$-indépendants de $\mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} H$ pour $\lambda = 1, 2, \ldots, u$. Alors il existe des matrices complexes

$$
b_\lambda = \begin{pmatrix} b_{n-p+2,\lambda} \\ \vdots \\ b_{n,\lambda} \end{pmatrix} \quad c_\lambda = \begin{pmatrix} c^1_{n-p+2,\lambda} & c^2_{n-p+2,\lambda} & \cdots & c^{n-p+1}_{n-p+2,\lambda} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c^1_{n,\lambda} & c^2_{n,\lambda} & \cdots & c^{n-p+1}_{n,\lambda} \end{pmatrix}
$$

$$
d_\lambda = \begin{pmatrix} d_{n-p+2,\lambda} \\ \vdots \\ d_{n,\lambda} \end{pmatrix} \quad e_\lambda = \begin{pmatrix} e^1_{n-p+2,\lambda} & e^2_{n-p+2,\lambda} & \cdots & e^{n-p+1}_{n-p+2,\lambda} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^1_{n,\lambda} & e^2_{n,\lambda} & \cdots & e^{n-p+1}_{n,\lambda} \end{pmatrix}
$$

telles que

$$
\begin{aligned}
L_\lambda = \; & \sum_{m=n-p+2}^{n} b_{m,\lambda} \frac{\partial}{\partial \zeta_m} + \sum_{k=1}^{n-p+1} \sum_{m=n-p+2}^{n} c^k_{m,\lambda} \frac{\partial}{\partial \eta^k_m} + \\
& + \sum_{m=n-p+2}^{n} d_{m,\lambda} \frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}_m} + \sum_{k=1}^{n-p+1} \sum_{m=n-p+2}^{n} e^k_{m,\lambda} \frac{\partial}{\partial \overline{\eta}^k_m}. \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Posons

$$
Q_{m,\lambda} = b_{m,\lambda} + \sum_{k=1}^{n-p+1} c^k_{m,\lambda} z_k
$$

$$K_{m,\lambda} = d_{m,\lambda} + \sum_{k=1}^{n-p+1} e^k_{m,\lambda} \bar{z}_k.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} L_\lambda R(gPdz_s) &= \sum_{m=n-p+2}^{n} \frac{\partial R(gPQ_{m,\lambda}dz_s)}{\partial \zeta_m} + \\ &+ \sum_{m=n-p+2}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq s}}^{n-p+1} c^k_{m,\lambda} \int_\Upsilon gP\left\{-\frac{\partial Z_k}{\partial \zeta_m} dZ_s + \frac{\partial Z_s}{\partial \zeta_m} dZ_k\right\} + \\ &+ \sum_{m=n-p+2}^{n} \int_\Upsilon \sum_{q=n-p+2}^{n} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_q} \frac{\partial \overline{Z}_q}{\partial \overline{\zeta}_m} PK_{m,\lambda} dZ_s \end{aligned} \tag{9}$$

Supposons que la condition 1 de la proposition 1 n'est pas satisfaite. On appelle $J' \subset J$ l'ensemble de tout $j' \in J$ tel que la condition 1 est valable pour $z \in \gamma_{j'}$. Soit $j \in J$ tel que γ_j n'est pas incluse dans $bS_{j''}$ pour tout $j'' \notin J' \cup \{j\}$. Supposons que γ_j ne vérifie pas la condition 2.
Posons

$$\begin{aligned} Q &= (Q_{n-p+2,\lambda}, \ldots, Q_{n,\lambda})_{\lambda=1}^{u'} \\ Q' &= (Q_{n-p+2,\lambda}, \ldots, Q_{n,\lambda})_{\lambda=1}^{p-1} \\ Q'' &= (Q_{n-p+2,\lambda}, \ldots, Q_{n,\lambda})_{\lambda=p}^{u'} \\ K &= (K_{n-p+2,\lambda}, \ldots, K_{n,\lambda})_{\lambda=1}^{u'} \\ K' &= (K_{n-p+2,\lambda}, \ldots, K_{n,\lambda})_{\lambda=1}^{p-1} \\ K'' &= (K_{n-p+2,\lambda}, \ldots, K_{n,\lambda})_{\lambda=p}^{u'} \end{aligned}$$

où $u' = u - (p-1)(n-p) \geqslant 2p-1$.
On prend $s = 1$. On choisit les L_λ tels que $c^k_{m,\lambda} = 0$ pour tout $k \neq 1$ et tout $\lambda = 1, \ldots, u'$. En plus, on peut choisir les L_λ tels que rang$Q' = p-1$ (c.-à-d. son déterminant est un polynôme non nul).

On pose

$$T = (-\det Q'.Q'' \times Q'^{-1}, \det Q'.I_{u'-p+1})$$

où $I_{u'-p+1}$ est la matrice d'identité d'ordre $u'-p+1$. Alors T est de taille $(u'-p+1) \times u'$ à coefficients dans $\mathcal{P}$. On a $T \times Q = 0$.

DÉFINITION 2.— *H est un u-plan* générique *s'il existe un système de coordonnées z', un choix des vecteurs L_λ et une matrice N formée par p lignes de $T \times K$ tels que le déterminant de la matrice (N, W) est non nul pour toute $p \times 1$-matrice non nulle W à coefficients dans $\mathcal{P}$.*

LEMME 1. — 1. *L'ensemble des u-plans génériques passant par* 0 *est un ouvert de Zariski, non vide de la grassmannienne réelle* $G_{\mathbb{R}}(u, \mathbb{R}^{2(p-1)(n-p+2)})$, *qui paramètre les u-plans passant par* 0.

2. *Si* H *est générique le déterminant de* (N, W) *est non nul pour toute* $p \times 1$*-matrice non nulle* W *à coefficients dans* $\mathcal{K}_j$.

Preuve.— 1. Soit H un u-plan non générique. Les coefficients de la matrice $T \times K$ sont des polynômes de dégrés 1 de $\overline{z}'$ à coefficients dans $\mathcal{P}$. Soit N une matrice formée par p-lignes de $T \times K$.
Posons $N^{(i)}$ la sous-matrice de N obtenue par suppression de la i-ième ligne. Le déterminant de $N^{(i)}$ s'écrit sous la forme

$$\det N^{(i)} = \sum_{\substack{m=(m_1,\dots,m_{n-p+1})\in\mathbb{N}^{n-p+1} \\ m_1+\dots+m_{n-p+1}\leqslant p-1}} \sigma_{m,i}.\overline{z}_1^{m_1}\dots\overline{z}_{n-p+1}^{m_{n-p+1}}$$

où $\sigma_{m,i} \in \mathcal{P}$.
Alors la matrice Σ formée par les $\sigma_{m,i}$ est de rang $\leqslant p-1$. Ceci implique le déterminant de tout $p \times p$-sous-matrice de cette matrice Σ est un polynôme nul. Le u-plan H est non générique si cette condition est vérifiée pour toute N. Par conséquent, l'ensemble des u-plans génériques est un ouvert de Zariski.
Cet ouvert est non vide car, par exemple, si H contient le plan engendré par les vecteurs

1. $L_1 = \dfrac{\partial}{\partial \zeta_{n-p+2}}$

2. $L_p = \dfrac{\partial}{\partial \overline{\zeta}_{n-p+2}}$

3. $L_{m-n+p-1} = \dfrac{\partial}{\partial \zeta_m} + \dfrac{\partial}{\partial \overline{\zeta}_m}$ pour $m = n-p+3, \dots, n$

4. $L_{m-n+2p-1} = \dfrac{\partial}{\partial \eta_m} + \dfrac{\partial}{\partial \overline{\eta}_m} + \dfrac{\partial}{\partial \eta_{m+1}} - \dfrac{\partial}{\partial \overline{\eta}_{m+1}}$
   pour $m = n-p+2, \dots, n-1$

5. $L_{2p-1} = \dfrac{\partial}{\partial \eta_n} + \dfrac{\partial}{\partial \overline{\eta}_n}$

Pour ces vecteurs on obtient

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \overline{z}_1 & -\overline{z}_1 - z_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \overline{z}_1 - z_1 & -\overline{z}_1 - z_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\overline{z}_1 - z_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \overline{z}_1 - z_1 & -\overline{z}_1 - z_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \overline{z}_1 - z_1 \end{pmatrix}$$

Soit $W = {}^t(W_1, \dots W_p)$ une $p \times 1$-matrice à coefficients dans $\mathcal{P}$. Supposons que $\det(N, W) = 0$. Alors

$$(-1)^p W_1 \overline{z}_1 (\overline{z}_1 - z_1)^{p-2} + \sum_{i=2}^{p} (-1)^{p-i+1} W_i (\overline{z}_1 - z_1)^{p-i} (-\overline{z}_1 - z_1)^{i-2} = 0.$$

Comme $W_i \in \mathcal{P}$, ils sont tous nuls.

2. Comme dans 1., W est déterminée comme un vecteur propre d'une certaine matrice à coefficients dans $\mathcal{P}$. D'autre part, $\mathcal{P}$ s'injecte dans l'anneau intègre $\mathcal{K}_j$. Donc cette matrice n'a pas de vecteur propre non nul à coefficients dans $\mathcal{P}$ si et seulement si elle n'a pas de vecteur propre non nul à coefficients dans $\mathcal{K}_j$. D'où 2. □

Supposons que H est générique. Supposons que la matrice N formée par les p premières lignes de $T \times K$ vérifie la définition 2. Remplaçant P par $PT_{i,\lambda}$ dans (9) et prenant la somme en $\lambda = 1, \dots, 2p-1$, nous obtenons

$$\sum_{m=n-p+2}^{n} \int_{\Upsilon} \sum_{q=n-p+2}^{n} \frac{\partial g}{\partial \overline{z}_q} \frac{\partial \overline{Z}_q}{\partial \overline{\zeta}_m} P(T \times K)_{i,m} dz_1 = 0 \tag{10}$$

car les dérivées $L_\lambda R(gPdz_1) = 0$ par hypothèse. Ceci montre que

$$W_i := \sum_{m=n-p+2}^{n} \left(\sum_{q=n-p+2}^{n} \frac{\partial g}{\partial \overline{z}_q} \frac{\partial \overline{Z}_q}{\partial \overline{\zeta}_m} \right) (T \times K)_{i,m} \tag{11}$$

appartient à $\mathcal{K}_j$ pour tout $i = 1, \dots, u'$ car son produit avec dz_1 est une mesure orthogonale. Comme z'' est un système de coordonnées de $\mathbb{C}_a^{p-1}$ pour tout $a \in \Upsilon$, le déterminant de la matrice

$$\left(\frac{\partial \overline{Z}_q}{\partial \zeta_m} \right)_{q,m=n-p+2}^{n}$$

est non nul sur γ_j. Comme γ_j ne vérifie pas la condition 1 de la proposition 1, le vecteur

$$\left(\sum_{q=n-p+2}^{n} \frac{\partial g}{\partial \overline{z}_q} \frac{\partial \overline{Z}_q}{\partial \overline{\zeta}_m}\right)_{m=n-p+2}^{n}$$

est non nul sur γ_j. Par conséquent, $W \neq 0$ car, d'après la définition 2, $\operatorname{rang} N = p-1$. D'où le déterminant de (N, W) est un polynôme non nul en $\overline{z}'$ à coefficient dans $\mathcal{K}_j$. Par le théorème d'unicité, on sait que toute fonction de $\mathcal{K}_j$ s'annullant sur un sous-ensemble de longueur positive de γ_j est nulle. Par conséquent, $\det(N, W)$ est de dégré $\geqslant 1$. Ce polynôme doit s'annuller sur γ_j pour que (11) admette une solution non nulle pour $z \in \gamma_j$. C'est une contradiction.

Pour le cas où B n'est pas une réunion de $(p-1)$-plans, on considère B' la réunion de $(p-1)$-plans complexes tangentes à B en $z \in \gamma$. Les calculs précédents sont encore valides car ils ne concernent que les dérivées d'ordre 1, de plus, B et B' se coïncident en γ à l'ordre 1. □

DÉFINITION 3.— (a) Un sous-ensemble $V \subset \mathrm{G}_D(n-p+2, n+1)$ est appelé *(D,u)-gros* si la réunion $\bigcup_{\nu \in V'} \mathbb{C}_\nu^{n-p+1} \cap bD$ est dense dans bD, où V' est l'ensemble des éléments $\nu \in V$ tels que le cône tangent de V en ν contienne au moins u vecteurs réellement indépendants.

(b) Cet ensemble V est appelé *(D,u)-générique* s'il est (D,u)-gros avec $u \geqslant (p-1)(n-p+2)+1$ et $\bigcup_{\nu \in V''} \mathbb{C}_\nu^{n-p+1} \cap bD$ est dense dans bD, où V'' est l'ensemble des éléments $\nu \in V'$ vérifiant les conditions suivantes:

1. Le plan réel engendré par les vecteurs tangents à V en ν est générique.
2. $bD \cap \mathbb{C}_\nu^{n-p+1}$ est générique dans $\mathbb{C}_\nu^{n-p+1}$.

(c) L'ensemble V est *non $(p-2)$-générique* si pour tout $\nu \in V$ il existe un voisinage U de ν, un sous-ensemble analytique T de U et un ensemble analytique $E \subset D$ de dimension $p-2$, tels que $V \cap U \subset T$ et $T \subset \{\nu : \mathbb{C}_\nu^{n-p+1} \cap E \neq \emptyset\}$ (*voir aussi* [4]).

Remarque.— La définition 3(c) des ensembles $(p-2)$-génériques est un peu différente de celle dans [4], où on considère l'extension méromorphe des fonctions, mais elle est valable dans notre cas où on considère seulement des extensions holomorphes. Si $u = 2(p-1)(n-p+2)-1$, tout ensemble (D,u)-générique est $(p-2)$-générique.

THÉORÈME 2.— *Soient Y un compact $(n-p+1)$-linéairement convexe de $\mathbb{CP}^n$ et D une variété complexe (éventuellement réductible et singulière) de dimension $p \geqslant 2$, à bord C^2 dans $\mathbb{C}^n \setminus Y$ et bornée dans $\mathbb{C}^n$. Soient f une* *fonction C^1 sur bD et V un ensemble (D,u)-générique de $\mathrm{G}_D(n-p+2,n+1)$ avec $u \geqslant (p-1)(n-p+2)+1$. Supposons que pour tout $\nu \in V$, la fonction f se prolonge continûment en une fonction holomorphe de $D \cap \mathbb{C}_\nu^{n-p+1}$. Alors f est CR. Par conséquent, si V est $(p-2)$-générique ou si Y est un compact de $\mathbb{C}^n$, f se prolonge continûment en une fonction holomorphe dans $D \setminus \mathrm{Sing}D$, localement bornée dans $\overline{D} \setminus Y$.*

Remarque. — Si dans la définition des ensembles (D,u)-génériques on supprime la condition 1, le théorème 2 n'est plus valable (*voir* l'exemple 3). Si $u = 2v$ et V une variété complexe de dimension v de $\mathrm{G}(n-p+2,n+1)$, alors il suffit pour ce théorème que $v \geqslant p$ et que la variété V soit $(p-2)$-générique et (D,u)-gros.

Preuve. — D'après la proposition 1, la fonction f vérifie la condition (1) sur un ensemble dense de bD. Par continuité, (1) est satisfaite partout sur bD. La fonction f est donc CR. D'après le théorème de Dolbeault-Henkin généralisé [4, thérème 1] appliqué pour le graphe de f, la propriété "1-extension" de f pour une famille $(p-2)$-générique de $(n-p+1)$-plans implique que le graphe de f borde une variété complexe (éventuellement singulière) qui contient les graphes des prolongements de f sur les tranches $\mathbb{C}_\nu^{n-p+1}$. Cette variété est le graphe d'un prolongement de f sur $D \setminus \mathrm{Sing}D$ en fonction holomorphe localement bornée dans $\overline{D} \setminus Y$. Si Y est compact de $\mathbb{C}^n$, le théorème de Harvey-Lawson-Chirka s'applique. La fonction f se prolonge holomorphiquement dans $D \setminus \mathrm{Sing}D$, en une fonction localement bornée. □

LEMME 2. — *Tout hyperplan réel H de $\mathbb{C}^{(p-1)(n-p+2)}$ passant par 0 (c.-à-d. pour $u = 2(p-1)(n-p+2)-1$) est générique.*

Preuve. — On remarque que H coupe tout sous-espace de $\mathbb{C}^{(p-1)(n-p+2)}$ en un sous-espace de codimension réel $\leqslant 1$. Par conséquent, pour un système de coordonnées générique, on peut choisir les vecteurs L_λ indépendants vérifiant

1. Pour tout $\lambda \leqslant 4p-5$, pour tout $k \neq 1$, pour tout m, $c_{m,\lambda}^k = e_{m,\lambda}^k = 0$.
2. Pour tout $\lambda \leqslant p-2$, pour tout m, $c_{m,\lambda}^1 = 0$.
3. Pour tout $\lambda \leqslant 2p-3$, pour tout m et tout k, $d_\lambda = e_{m,\lambda}^1 = 0$.
4. Pour tout $p-1 \leqslant \lambda \leqslant 2p-3$, pour tout $m \neq \lambda+n-2p$, $b_{m,\lambda} = c_{m,\lambda}^1 = 0$.
5. Pour tout $p-1 \leqslant \lambda \leqslant 2p-3$, $c_{\lambda+n-2p,\lambda}^1 = 1$.

6. Pour $2p-2 \leqslant \lambda \leqslant 4p-6$, pour tout m, k, $b_{m,\lambda} = c^1_{m,\lambda} = 0$, $d_{m,\lambda} = \bar{b}_{m,\lambda-2p+3}$ et $e^k_{m,\lambda} = \bar{e}^k_{m,\lambda-2p+3}$.

7. Pour tout m, $c^1_{m,4p-5} = e^1_{m,4p-5} = 0$.

8. Le déterminant de Q' est un polynôme non nul F de dégré $\leqslant 1$ en z_1.

9. $b_{m,4p-5} = \bar{d}_{m,4p-5} \neq 0$ pour tout m.

Les $(4p-6)$ premiers vecteurs forment une base de l'espace $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} H'$, où H' est le sous-espace complexe maximal de $H \cap \{\eta^k_m = 0 \text{ pour tout } k \neq 1\}$.
Les $2p-3$ premières lignes de $T \times K$ et de K'' sont égales, dont les $p-2$ premières lignes sont nulles. La dernière ligne de $T \times K$ est F fois celle de K''. Supposons que H n'est pas générique, alors il n'existe pas de matrice N vérifiant la définition 2 pour toute combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{C}$ des vecteurs L_λ pour $\lambda = 2p-2, \ldots, 4p-5$. On sait que les lignes numéros $\lambda = 2p-2, \ldots, 3p-4$ et $\lambda = 4p-5$ de K forment une base de $\mathbb{C}^{p-1}$. En remplaçant L_λ pour $\lambda = 2p-2, \ldots, 4p-6$ par leurs combinaisons convenables, on peut trouver la matrice N formée par la dernière ligne de $T \times K$ (notée FN_1) et par les lignes de la forme

$$N_1 + (0, \ldots, 0, k + \bar{z}_1, 0, \ldots, 0)$$

pour $k = 1, \ldots, p-1$ et $k + \bar{z}_1$ est à la k-ième position. Comme la matrice N ne vérifie pas la définition 2, la matrice N' formée par

$$N_1 = (d_{n-p+2,4p-5}, \ldots, d_{n,4p-5})$$

et par les autres lignes de N, ne vérifie pas la définition 2 non plus. Par conséquent, la matrice N'' formée par N_1 et par les lignes de la forme

$$(0, \ldots, 0, k + \bar{z}_1, 0, \ldots, 0)$$

ne vérifie pas la définition 2. Posons $A = \Pi_{k=1}^{p-1}(k + \bar{z}_1)$. Alors il existe W non nulle à coefficients dans $\mathcal{P}$ telle que

$$W_1 A \pm W_2 d_{n-p+2,4p-5} \frac{A}{1+\bar{z}_1} \pm \ldots \pm W_p d_{n,4p-5} \frac{A}{p-1+\bar{z}_1} = 0$$

Ceci implique $W = 0$. C'est une contradiction. □

Corollaire 1.— *Le compact Y, la variété D et la fonction f sont définis comme dans le théorème 2. Soit $V \subset \mathrm{G}_D(n-p+2, n+1)$ tel que $bD \cap \bigcup_{V_1} \mathbb{C}^{n-p+1}_\nu$ soit dense dans bD, où $V_1 \subset V$ est l'ensemble de ν vérifiant les conditions suivantes :*

1. *Le cône tangent de V en ν contient* $2(p-1)(n-p+2)-1$ *vecteurs indépendants.*

2. *L'intersection $\mathbb{C}_\nu^{n-p+1} \cap bD$ est une courbe générique dans $\mathbb{C}_\nu^{n-p+1}$.*

Supposons que pour tout $\nu \in V$, f se prolonge continûment en une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}_\nu^{n-p+1} \cap D$. Alors f se prolonge continûment en une fonction holomorphe dans $D \setminus \mathrm{Sing}D$, localement bornée dans $\overline{D} \setminus Y$.

LEMME 3.— *Soient γ une courbe réelle, fermée, irréductible bordant un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ et l un ouvert de γ. Supposons qu'il existe un voisinage U de l et deux fonctions holomorphes non identiquement nulles a, b dans $U \cap \Omega$, continues jusqu'à tout point de l et vérifiant $a\overline{z}+b=0$ sur l. Alors l est presque réelle analytique. Si $l=\gamma$ est réelle analytique et $U=\Omega$, alors γ est réelle algébrique (voir l'exemple 1).*

Preuve.— Soit $K \subset l$ l'ensemble des zéros de a sur l. D'après le théorème d'unicité $\mathcal{H}^1(K)=0$. Soient $x \in l \setminus K$, G un domaine de Jordan à bord lisse de $\mathbb{C}$ dont le bord contient le segment réel $[-1,1] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et Ψ une application bijective de $\overline{G}$ dans Ω, holomorphe dans G telle que $\Psi([-1,1]) \subset l$ et $\Psi(0)=x$. Comme $\overline{z}=-b/a$ on a $\mathrm{Re}(z)=(-b/a+z)/2$ et $\mathrm{Im}(z)=(b/a+z)/2i$. Par conséquent, les fonctions $\mathrm{Re}\Psi$ et $\mathrm{Im}\Psi$ se prolongent méromorphiquement dans G (holomorphe sur les points près de 0). D'après le principe de réflexion, ces fonctions se prolongent en des fonctions holomorphes au voisinage de 0. Donc l est analytique au voisinage de x.

Si $l=\gamma$ réelle analytique, on prend G le demi-plan complexe supérieur et Ψ l'application bijective de $\overline{G} \subset \mathbb{CP}^1$ dans $\overline{\Omega}$, holomorphe dans G. Alors $|\Psi(z)|^2$ se prolonge holomorphiquement au voisinage de bG et égale à $-a(\Psi(z)).\Psi(z)/b(\Psi(z))$ $\mathcal{H}^1$-presque partout sur bG. Par conséquent, cette fonction se prolonge continûment en fonction méromorphe dans G. D'après le principe de réflexion, elle se prolonge en une fonction méromorphe dans $\mathbb{CP}^1$, c.-à-d. en une fonction rationnelle. On a $|\Psi|^2=P/Q$, où P, Q sont des polynômes à coefficients réels. On peut supposer que $0 \notin \overline{\Omega}$. Alors il existe une fonction Φ définie sur bG à valeur dans $\{|z|=1\}$ telle que sur bG on ait $\Psi^2=\Phi P/Q$. La fonction Φ se prolonge méromorphiquement dans G. Par principe de réflexion, elle se prolonge méromorphiquement dans $\mathbb{CP}^1$. Ce prolongement est donc une fonction rationnelle. Par conséquent, Ψ est algébrique et donc $b\Omega$ est réelle algébrique. □

Preuve du théorème 1.— Utilisant les L_λ dans le lemme 2 pour un $\nu \in V_1$ fixé, supposons que la condition 1 de la proposition 1 n'est pas satisfaite. Alors la condition 2 de cette proposition montre que pour un système de coordonnées générique, il existe un polynôme en $\overline{z}_1$ à coefficients dans $\mathcal{K}_j$

s'annullant sur γ_j. D'après le lemme 3, la projection $\Pi(\gamma_j)$ est presque réelle analytique, où $\Pi(z) = z_1$. Ceci est valable pour un système de coordonnées générique. Par conséquent, toute coordonnée de γ_j est presque réelle analytique. Donc γ_j est presque réelle analytique. C'est une contradiction. Alors f vérifie (1) pour tout $z \in bD \cap \mathbb{C}_\nu^{n-p+1}$ et pour tout $\nu \in V_1$. Par continuité, (1) est vraie partout sur bD. La fonction f est donc CR. D'après le théorème de Dolbeault-Henkin généralisé [4], f se prolonge holomorphiquement dans $D \setminus \mathrm{Sing}D$ en fonction localement bornée dans $\overline{D} \setminus Y$. □

THÉORÈME 3.— *Soient D un domaine de $\mathbb{C}^n$, borné, à bord C^2 et f une fonction C^1 sur bD. Supposons que*

$$\int_{bD\cap\mathbb{C}_\nu} f(z_1, \zeta_2 + \eta_2 z_1, \ldots, \zeta_n + \eta_n z_1) z_1^k dz_1 = 0 \tag{12}$$

pour $\mathcal{H}^{4n-4}$-presque toute $\nu = (\zeta, \eta) \in \mathbb{C}^{2n-2}$ et pour $k \in \mathbb{N}$ fixé. Alors f est CR et si bD est connexe, f se prolonge holomorphiquement dans D.

Remarque.— La condition (12) a été introduite par Kytmanov et Myslivets dans [13], où ils ont généralisé les résultats de Globevnik et de Stout.

Preuve.— Il suffit de considérer $n = 2$. On appelle T (resp. T') l'ensemble de $\nu \in \mathbb{C}^2$ tel que $\mathbb{C}_\nu$ appartienne au plan tangent de bD en certain point (resp. l'intersection $\mathbb{C}_\nu \cap bD$ n'est pas C^2 par morceaux). Alors l'ensemble T (resp. T') est de mesure $\mathcal{H}^3$ (resp. $\mathcal{H}^2$) localement finie. D'après (5), on a

$$\frac{\partial R(f z_1^{k-1} dz_1)}{\partial \eta_2} = \frac{\partial R(f z_1^k dz_1)}{\partial \zeta_2} \doteq 0$$

par hypothèse. Donc sur la droite $\{\zeta_2 = c\}$ la fonction $R(f z_1^{k-1} dz_1)$ est continue en dehors de T' et antiholomorphe en dehors de T, où $c \in \mathbb{C}$ une constante. Cette fonction est nulle pour η_2 assez grand. Elle est donc nulle pour $\mathcal{H}^2$-presque tout c. On peut répéter cette étape k fois et on conclut que f vérifie la condition de Morera. Ensuite, une récurrence sur m et la relation

$$\frac{\partial R(f z_1^{m+1} dz_1)}{\partial \zeta_2} = \frac{\partial R(f z_1^m dz_1)}{\partial \eta_2} = 0$$

prouvent que $R(f z_1^m dz_1)$ est antiholomorphe et bornée sur $\{\eta_2 = c\}$. Cette fonction est donc identiquement nulle pour tout m. Autrement dit, f vérifie la condition des moments. D'après le théorème de Stout, f est CR et si bD est connexe, la fonction f se prolonge holomorphiquement sur D [16]. □

Exemple 1. — Soient $n = p = 2$ et $\mathrm{G}_Y^*(2,3)$ un voisinage de $(0,0)$. Soient P un polynôme d'une variable complexe de dégré k à coefficients réels avec

$P(0) = 0$, $P'(0) \neq 0$ et $0 < r < 1$ tels que la restriction de P sur $\{|t| < r\}$ soit injective. Posons $D = \mathbb{C}^2 \setminus Y \cap \{z_1 \in P(\{|t| = r\})\}$ et $f(z) = z_1^k \overline{z}_2$ une fonction définie sur bD. Alors pour tout $\nu = (\zeta, \eta) \in \mathrm{G}_Y^*(2,3)$ la droite $\mathbb{C}_\nu$ est définie par l'équation $\{z_2 = \zeta + \eta z_1\}$. Sur $bD \cap \mathbb{C}_\nu$ on a $f(z) = z_1^k \overline{z}_2 = [P(t)]^k(\overline{\zeta} + \overline{\eta}\overline{P(t)}) = \overline{\zeta}[P(t)]^k + \overline{\eta}[P(t)]^k P(\overline{t}) = \overline{\zeta}[P(t)]^k + \overline{\eta}[P(t)]^k P(r^2/t)$ pour $z_1 = P(t)$. Cette fonction en t se prolonge holomorphiquement dans $\{|t| < r\}$. Par conséquent, f se prolonge holomorphiquement dans $D \cap \mathbb{C}_\nu$ car dans $\{|t| < r\}$ l'application P est injective. Mais la fonction f n'est pas CR.

Exemple 2. — Pour $p = n = 2$; $\nu_0 = (0,0)$ et $B \cap \mathbb{C}_{\nu_0} = \{z_1 = \Psi(\mathrm{e}^{i\theta}), z_2 = 0\}$ où Ψ une fonction $\mathcal{C}^k$ définie sur le disque unité fermé $\overline{U}$ avec

$$\Psi(t) = t + \epsilon(t-1)^{2k+1}\mathrm{e}^{\frac{t+1}{t-1}}.$$

(pour ϵ réel assez petit et $k \geqslant 1$, cette application Ψ est injective sur $\overline{U}$). Sur $B \cap \mathbb{C}_{\nu_0}$, on a pour $t = \mathrm{e}^{i\theta}$

$$\overline{z}_1 = \overline{t} + \epsilon(\overline{t} - 1)^{2k+1}\mathrm{e}^{\frac{\overline{t}+1}{\overline{t}-1}} = \frac{1}{t} + \epsilon\frac{(1-t)^{2k+1}}{t^{2k+1}}\mathrm{e}^{\frac{1+t}{1-t}}$$

d'où

$$\overline{z}_1 = \frac{1}{\Psi^{-1}(z_1)} - \epsilon^2\frac{(1-\Psi^{-1}(z_1))^{4k+2}}{(\Psi^{-1}(z_1))^{2k+1}}\frac{1}{z_1 - \Psi^{-1}(z_1)}.$$

La restriction de $\overline{z}_1$ sur la courbe $B \cap \mathbb{C}_{\nu_0}$ se prolonge méromorphiquement dans le domaine de $\mathbb{C}$, borné par cette courbe. Cette courbe est localement analytique sauf au point $z_1 = 1$.

Nous pouvons maintenant construire un exemple comme celui précédent. Soient $p = n = 2$, $\mathrm{G}_Y^*(2,3)$ un voisinage de $(0,0)$, $D = [\mathbb{C}^2 \setminus Y] \cap [\Psi(U) \times \mathbb{C}]$ et

$$f(z) = (\Psi^{-1}(z_1))^{2k+1}(z_1 - \Psi^{-1}(z_1))\overline{z}_2$$

une fonction définie sur bD. Pour $\nu = (\zeta, \eta) \in \mathrm{G}_Y^*(2,3)$, on a sur $bD \cap \mathbb{C}_\nu$

$$f(z) = (\Psi^{-1}(z_1))^{2k+1}(z_1 - \Psi^{-1}(z_1))(\overline{\zeta} + \overline{\eta}\overline{z}_1).$$

Cette fonction se prolonge holomorphiquement sur $D \cap \mathbb{C}_\nu$. Mais la fonction f n'est pas CR.

Exemple 3. — Soient $n = p \geqslant 3$, D un domaine borné dans $\mathbb{C}^n$, convexe, à bord $\mathcal{C}^2$ et $f(z) = \overline{z}_n$. Soient $V = \{\eta_n^1 = 0\} \subset \mathrm{G}(2, n+1)$ une sous-variété complexe de dimension $2n-3$. Alors V est $(D, 4n-6)$-gros. On peut choisir D tel que V vérifie la deuxième condition de la définition des ensembles $(D, 4n-6)$-génériques (définition 3). Pour tout $\nu \in V$, la fonction f est constante sur $bD \cap \mathbb{C}_\nu \subset \{z_n = \zeta_n\}$. Elle se prolonge donc holomorphiquement dans $bD \cap \mathbb{C}_\nu$. Mais cette fonction f n'est pas CR.

3. Problème du bord

Soit Γ un courant rectifiable de dimension $2p-1$ d'une variété complexe $X = \mathbb{C}^n$, $\mathbb{CP}^n$, $\mathbb{C}^n \setminus Y$ ou $\mathbb{CP}^n \setminus Y$. Le courant Γ est appelé *maximalement complexe* si pour toute $(s, 2p-1-s)$-forme ψ de classe C^∞, à support compact dans X et pour tout $s \neq p, p-1$, on a $(\Gamma, \psi) = 0$.

Une p-chaîne holomorphe de $X \setminus \operatorname{Supp}\Gamma$ est une combinaison linéaire localement finie à coefficients entiers de sous-ensembles analytiques de dimension pure p de $X \setminus \operatorname{Supp}\Gamma$. Si une p-chaîne holomorphe T est de mesure $\mathcal{H}^{2p}$, comptée avec la valeur absolue des coefficients, localement finie dans X, elle définit dans X un courant d'intégration de bidimension (p,p) et de masse localement finie.

Si $X = \mathbb{C}^n$, pour $\mathcal{H}^{(n-p+2)(p-1)}$-presque tout $\nu \in \mathrm{G}(n-p+2, n+1)$ le courant d'intersection $\Gamma \cap \mathbb{P}_\nu^{n-p+1}$ existe et il est rectifiable [7].

THÉORÈME 4.— *Soient Y un compact de $\mathbb{C}^n$, $(n-p+1)$-linéairement convexe dans $\mathbb{CP}^n$, Γ un courant rectifiable fermé, de dimension $2p-1$, à support (*$\operatorname{Supp}\Gamma$*) géométriquement $(2p-1)$-rectifiable dans $\mathbb{C}^n \setminus Y$ et borné dans $\mathbb{C}^n$, avec $p \geqslant 2$. Supposons que pour $\mathcal{H}^{(n-p+2)(p-1)}$-presque tout $\nu \in \mathrm{G}_Y(n-p+2, n+1)$, $\Gamma \cap \mathbb{C}_\nu^{n-p+1}$ existe et vérifie la condition de Morera $((\Gamma \cap \mathbb{C}_\nu^{n-p+1}, z_i dz_j) = 0$ pour tous $i, j)$. Alors il existe une p-chaîne holomorphe T de $\mathbb{C}^n \setminus$* $\operatorname{Supp}\Gamma \cup Y$*, de masse localement finie dans $\mathbb{C}^n \setminus Y$ telle que $d[T] = \Gamma$ au sens des courants dans $\mathbb{C}^n \setminus Y$.*

Remarque.— Ce théorème généralise le théorème de Harvey-Lawson [11] et il donne la réponse à un problème de Dolbeault-Henkin [6].

Si $Y = \emptyset$, il suffit de considérer une famille de $(n-p+1)$-plans dont les directions appartiennent à un ouvert de $\mathrm{G}(n-p+1, n)$ (*voir* la preuve du lemme 4). Ce théorème n'est plus valable si l'on remplace $\mathbb{C}^n$ par $\mathbb{CP}^n$.

Exemple 4.— (Henkin) Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}^3 \subset \mathbb{CP}^3$ définie par

$$\Gamma = \{y_2 = y_3 = 0, x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

où $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_3 = x_3 + iy_3$ sont les coordonnées de $\mathbb{C}^3$. Considérons l'hyperplan

$$H_{a,b,c} = \{z_1 = az_2 + bz_3 + c\}$$

où $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$ et $c = c_1 + ic_2$. Posons $\Gamma_{a,b,c} = \Gamma \cap H_{a,b,c}$. Alors $\Gamma_{a,b,c}$ est une courbe réelle fermée de la surface de Riemann algébrique

$S_{a,b,c} \subset H_{a,b,c}$ qui est définie par

$$S_{a,b,c} = \{(a_1z_2 + b_1z_3 + c_1)^2 + (a_2z_2 + b_2z_3 + c_2)^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1\} \cap H_{a,b,c}.$$

Comme $S_{a,b,c}$ est de genre 0, la courbe $\Gamma \cap H_{a,b,c}$ borde une surface de Riemann dans $\mathbb{CP}^3$. La variété Γ ne peut pas être le bord d'une variété complexe car elle n'est pas maximalement complexe.

Preuve. — D'après le théorème de Dolbeault-Henkin généralisé [4, théorème 3], il suffit de montrer que Γ est maximalement complexe. Dans cette démonstration on considère $Y = \emptyset$, pour le cas général, il suffit d'étudier le problème au voisinage d'un $(n-p+1)$-plan fixé ; en choisissant un bon système de coordonnées, la même démonstration pour $Y = \emptyset$ s'adaptera.

Par la méthode des projections, il suffit de considérer le cas $p = n-1$. Soit Π une projection de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^{n-1}$ telle que sa restriction en $\operatorname{Supp}\Gamma$ soit injective sauf au dessus d'un sous-ensemble K de mesure $\mathcal{H}^{2n-3}$ nulle de $\mathbb{C}^{n-1}$ et que la projection de $\operatorname{Supp}\Gamma$ soit géométriquement $(2p-1)$-rectifiable. En plus, $\Pi^{-1}(x)$ coupe $\operatorname{Tan}(\operatorname{Supp}\Gamma, z)$ transversalement pour tout $\Pi(z) = x \in \Pi(\operatorname{Supp}\Gamma) \setminus K$. Ceci est valable pour $\mathcal{H}^{2n-2}$-presque toute projection Π [2]. Sans perdre en généralité, on suppose que $\Pi(z) = (z_1, \dots, z_{n-1})$ et et pour $\mathcal{H}^{2n-4}$-presque toute projection Φ de $\mathbb{C}^{n-1}$ dans $\mathbb{C}^{n-2}$ et pour $\mathcal{H}^{2n-4}$-presque tout $\nu \in \mathbb{C}^{n-2}$ le courant $\Gamma \cap \mathbb{C}^2_\nu$ existe et vérifie la condition du théorème 1, où $\mathbb{C}^2_\nu = (\Phi \circ \Pi)^{-1}(\theta)$. Le support $\operatorname{Supp}\Gamma$ est défini $\mathcal{H}^{2n-3}$-presque partout comme le graphe d'une fonction f au dessus de $\Pi(\operatorname{Supp}\Gamma)$.

Le lemme suivant est prouvé grâce à l'utilisation d'une idée de Globevnik-Stout [8] :

LEMME 4. — *Soit* $\Pi_*\Gamma^{0,1}$ *la composante de bidegré* $(0,1)$ *du courant* $\Pi_*\Gamma$. *Alors le courant* $f\Pi_*\Gamma^{0,1}$ *est* $\overline{\partial}$*-fermé.*

Preuve. — D'après [8], l'espace de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{C}^{n-1}$ à valeurs complexes engendrées par des fonctions, dont les lignes de niveaux sont des hyperplans complexes parallèles, est dense dans l'espace des fonction $\mathcal{C}^\infty$. (Plus généralement, ce sous-espace est déjà dense si on considère seulement les hyperplans parallèles dont les directions appartiennent un ouvert non vide de $\mathrm{G}(n-2, n-1)$).

Sans perdre en généralité, il suffit de prouver que $(\Pi_*\Gamma, f\overline{\partial}\alpha) = 0$ pour toute $(n-1, n-3)$-forme $\alpha = A(\zeta\tilde{z})\chi$ pour un certain ζ générique non nul de $\mathbb{C}^{n-1}$, où $\tilde{z} = (z_1, \dots, z_{n-1})$, $\zeta\tilde{z} = \zeta_1z_1 + \dots + \zeta_{n-1}z_{n-1}$, $\chi = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{n-1} \wedge d\overline{z}_1 \wedge \dots \wedge d\overline{z}_{n-3}$, $\zeta\tilde{z} = \zeta_1z_1 + \cdots + \zeta_{n-1}z_{n-1}$ et A est une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

On utilise un nouveau système de coordonnées $(w_1, \ldots, w_{n-1})$ avec $w_1 = \zeta\tilde{z}$. Alors il existe des constantes $a_{k,j} \in \mathbb{C}$ telles que $\chi = \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n-1} a_{j,k}\chi_{j,k}$, où

$$\chi_{j,k} = dw_1 \wedge \ldots \wedge dw_{n-1} \wedge d\overline{w}_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\overline{w}_j} \wedge \ldots \wedge \widehat{d\overline{w}_k} \wedge \ldots \wedge \ d\overline{w}_{n-1}.$$

On a

$$\overline{\partial} A\chi_{j,k} = 0$$

si $j \geqslant 2$ et

$$\begin{aligned}(\Pi_*\Gamma, f\overline{\partial}A\chi_{1,k}) &= (\Pi_*\Gamma, f\frac{\partial A}{\partial \overline{w}_1} d\overline{w}_1 \wedge \chi_{1,k}) \\ &= \pm \int_{a \in \mathbb{C}^{n-2}} \frac{\partial A(a_1)}{\partial \overline{a}_1} (\Pi_*\Gamma \cap \Psi_k^{-1}(a), f dw_k) da_1 \wedge \ldots \wedge d\overline{a}_{n-2} \\ &= 0\end{aligned}$$

car

$$(\Pi_*\Gamma \cap \Psi_k^{-1}(a), f dw_k) = (\Gamma \cap \Psi_k^{-1}(a), z_n dw_k) = 0$$

par hypothèse, où $\Psi_k(w) := (w_1, \ldots, \widehat{w_k}, \ldots, w_{n-1})$ et $\nu \in \mathrm{G}(3, n)$ est défini par $\mathbb{C}_\nu^2 = \Psi_k^{-1}(a) \subset \mathbb{C}^{n-1}$. Ces égalités donnent le lemme. □

D'après Harvey, si Γ est une variété $\mathcal{C}^1$, le lemme précédent implique que le courant Γ est maximalement complexe [10]. Cette proposition est encore valable dans notre cas: le plan tangent de $\operatorname{Supp}\Gamma$ est maximalement complexe en $\mathcal{H}^{2n-2}$-presque tout point de $\operatorname{Supp}\Gamma \setminus \Pi^{-1}(K)$ où la multiplicité de Γ est non nul. En appliquant le lemme précédent pour les projections différentes, on conclut que Γ est maximalement complexe. D'après le théorème de Harvey-Lawson généralisé [2], Γ est le bord d'une p-chaîne holomorphe de masse finie au sens des courants. □

THÉORÈME 5.— *Soient Y un compact $(n-p+1)$-linéairement convexe de $\mathbb{CP}^n$, Γ une variété $\mathcal{C}^2$ de dimension $2p-1$, orientée de $\mathbb{C}^n \setminus Y$ et bornée dans $\mathbb{C}^n$. Soit V une variété réelle de dimension $2(p-1)(n-p+2)-1$ immergée dans $\mathrm{G}_Y(n-p+2, n+1)$. Supposons que*

1. *Pour tout $\nu \in V$, $\Gamma \cap \mathbb{C}_\nu^{n-p+1}$ est transversale et borde une 1-chaîne holomorphe, de masse finie au sens des courants.*

2. *$\Gamma \cap \bigcup_{\nu \in V_1} \mathbb{C}_\nu^{n-p+1}$ est dense dans B, où V_1 est l'ensemble de $\nu \in V$ tel que aucun ouvert non vide de $\Gamma \cap \mathbb{C}_\nu^{n-p+1}$ n'est réelle analytique.*

Alors Γ est le bord d'une p-chaîne holomorphe de masse localement finie au sens des courants dans $\mathbb{C}^n \setminus Y$.

Preuve. — D'après le théorème de Dolbeault-Henkin généralisé [4], il suffit de montrer que Γ est maximalement complexe. On fixe $\nu_0 \in V_1$, il suffit de prouver que Γ est maximalement complexe en tout point de $\Gamma \cap \mathbb{C}^{n-p+1}_{\nu_0}$. Par la méthode de projection, on ramène le problème vers le cas où $n = p + 1$. Soit Π une projection générique de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^{n-1}$ vérifiant $\Pi(\mathbb{C}^2_{\nu_0}) \simeq \mathbb{C}$. Posons $\Lambda = \Pi(\mathbb{C}^2_{\nu_0})$. Alors au voisinage de Λ, $\Pi(\Gamma)$ est $\mathcal{C}^2$ par morceaux et Γ est définie comme le graphe d'une fonction bornée f au dessus de $\Pi(\Gamma)$ (sauf sur les singularités). La proposition 1 s'applique encore dans ce cas, f vérifie donc (1) en tout point régulier de $\Pi(\Gamma) \cap \Lambda$. Par conséquent, Γ est maximalement complexe en tout point de $\Gamma \cap \mathbb{C}^2_{\nu_0}$. □

Bibliographie

[1] Agranovski (M.L.), Semenov (A.M.). — *Boundary analogues of Hartog's theorem*, Sibirian. Math. J., **32** (1991), pp. 168-170.

[2] Dinh (T.C.). — *Enveloppe polynomiale d'un compact de longueur finie et chaînes holomorphes à bord rectifiable*, Acta Mathematica, **180:1** (1998), pp. 31-67.

[3] Dinh (T.C.). — *Orthogonal measures on the boundary of a Riemann surface and polynomial hull of compacts of finite length*, Journal of Functional Analysis, **157** (1998), pp. 624-649.

[4] Dinh (T.C.). — *Problème du bord dans l'espace projectif complexe*, Ann. Inst. Fourier, **48:5** (1998), pp. 1483-1512.

[5] Dinh (T.C.). — *Sur la caractérisation du bord d'une chaîne holomorphe dans l'espace projectif*, à paraître dans Bull. S.M.F..

[6] Dolbeault (P.) et Henkin (G.). — *Chaînes holomorphes de bord donné dans* $\mathbb{CP}^n$, Bull. Soc. Math. de France, **125** (1997), pp. 383-445.

[7] Federer (F.). — *Geometric Measure Theory, Grundlenhren der Math. Wiss*, **285**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, (1988).

[8] Globevnik (J.), Stout (E.L.). — *Boundary Morera theorems for holomorphic functions of several complex variables*, Duke Math. J., **64** (1991), pp. 571-615.

[9] Globevnik (J.), Stout (E.L.). — *Discs and the Morera propriety*, Prépublication (1998).

[10] Harvey (R.). — *Holomorphic chains and their boundaries*, Proc. Symp. Pure Math., **30**, vol. 1 (1977), pp. 309-382.

[11] Harvey (R.) and Lawson (B.). — *On boundaries of complex analytic varieties I*, Ann. of Math., **102** (1975), pp. 233–290.

[12] Henkin (G.). — *The Abel-Radon transform and several complex variables*, Ann. of Math. Stud., **7** (1995), pp. 223-275.

[13] Kytmanov (A.M.), Myslivets (S.G.). — *On a certain boundary analogue of the Morera theorem*, Sibirian Math. J., **36** (1995), n° 6, pp. 1171-1174.

[14] Rudin (W.). — *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^N$, Springer, New York, 1980.

[15] STOLZENBERG (G.). — *Uniform approximation on smooth curves*, Acta Math., **115** (1966), pp. 185–198.

[16] STOUT (E.L.). — *The boundary values of holomorphic functions of several complex variables*, Duke Math. J., **44** (1977), pp. 105-108.

[17] WERMER (J.). — *The hull of a curve in* $\mathbb{C}^n$, Ann. of Math., **68** (1958), pp. 550–561.