ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

ABDALLAH NABAJI

Construction de solutions ramifiées autour de deux hypersurfaces caractéristiques simples pour des opérateurs quasi-linéaires

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 8, nº 4 (1999), p. 629-648

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1999_6_8_4_629_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VIII, n° 3, 1999
pp. 629–648

Construction de solutions ramifiées autour de deux hypersurfaces caractéristiques simples pour des opérateurs quasi-linéaires (*)

ABDALLAH NABAJI (1)

RÉSUMÉ. — Considérons dans $\mathbb{C}^{n+1}$ un opérateur différentiel quasi-linéaire d'ordre deux à caractéristiques simples : $P(x,D)u = P_p(x,D)u + f(x,D^A u)$ où P_p est la partie principale de P, A représente les dérivées de u d'ordre un et f une fonction holomorphe au voisinage de l'origine. Soit $q \in \mathbb{N}^*$, on suppose que : $P_p(x,D)u - P_{lin}(x,D)u = O(u^q)$ où $P_{lin}(x,D)$ est la partie linéarisée, au voisinage de $u=0$. On étudie le problème $P(x,D)u(x) = v(x)$ où v est une fonction ramifiée autour des deux hypersurfaces caractéristiques simples $K_i : k_i(x) = 0$, $(i = 1,2)$ et dont le comportement au voisinage de $K_1 \cup K_2$ est de la forme : $|v(x)| \leqslant c\ |k_1(x)|^{a_1}|k_2(x)|^{a_2}$, $a_1, a_2 \geqslant 1/q$. On montre alors que u est ramifiée autour de $K_1 \cup K_2$ et que $|u(x)| \leqslant c\ |k_1(x)|^{a_1+1}|k_2(x)|^{a_2+1}$.

ABSTRACT. — We consider in $\mathbb{C}^{n+1}$ a quasilinear differentiel operator of second order with simple characteristic hypersurfaces : $P(x,D)u = P_p(x,D)u + f(x,D^A u)$ where P_p is the principal part of P, A represent the derivatifs of order 1 of u and f is a holomorphic function in a neighbor of 0. Let $q \in \mathbb{N}^*$, we suppose that : $P_p(x,D)u - P_{lin}(x,D)u = O(u^q)$ where $P_{lin}(x,D)$ is the linearzed part of P near $u=0$. We study the problem $P(x,D)u(x) = v(x)$ where v is a ramified function around two simple characteristic hypersurfaces, $K_i : k_i(x) = 0$, $(i = 1,2)$, and $|v(x)| \leqslant c\ |k_1(x)|^{a_1}|k_2(x)|^{a_2}$, $a_1, a_2 \geqslant 1/q$. We get solutions u witch are ramified around two simple characteristic hypersurfaces and $|u(x)| \leqslant c\ |k_1(x)|^{a_1+1}|k_2(x)|^{a_2+1}$.

(*) Reçu le 27 janvier 1999, accepté le 15 septembre 1999

(1) Équipe : modélisation, E.D.P. et Analyse numérique.
F.S.T. Mohammédia B.P. 146 Mohammédia, Maroc
E-mail: nabaji@uh2m.ac.ma

0. Introduction

Cet article a pour objet la construction de solution ramifiée autour de deux hypersurfaces caractéristiques simples. On supposera que ces deux hypersurfaces caractéristiques sont indépendantes du second membre.

Pour fixer les idées, considérons dans $\mathbb{C}^{n+1}$ un opérateur différentiel quasi-linéaire d'ordre deux :

$$P(x,D)u = P_p(x,D)u + f(x, D^A u) \tag{1}$$

où $P_p = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x, D^A u) D^\alpha u$ est la partie principale de P et A représente les dérivées de u d'ordre un. On suppose que la partie principale moins la partie linéarisée, au voisinage de $u = 0$, de P est d'ordre q où $q \in \mathbb{N}^*$:

$$P_p(x,D)u - P_{lin}(x,D)u = O(u^q).$$

Supposons l'hyperplan $S : x_0 = 0$ non caractéristique et soient $K_i : k_i(x) = 0$, $(i = 1, 2)$ deux hypersurfaces caractéristiques simples et transverses de $P_{lin}(x, D)$, on considère alors le problème

$$P(x,D)u = v \tag{2}$$

où v est une fonction dont le support singulier est $K_1 \cup K_2$. On se propose de démontrer que le support singulier de u est $K_1 \cup K_2$. Comme dans [7], [11] et [13] des hypothèses de croissance sont nécessaires pour traiter ce problème. On supposera donc que v a pour comportement au voisinage de $K_1 \cup K_2$: $|v(x)| \leqslant c\ |k_1(x)|^{a_1} |k_2(x)|^{a_2}$ où $a_1, a_2 \geqslant 1/q$ et on montrera alors que u est ramifiée et que $|u(x)| \leqslant c\ |k_1(x)|^{a_1+1} |k_2(x)|^{a_2+1}$ (théorème 1.1 et 1.2).

Pour des opérateurs semi-linéaires d'ordre deux, dont la partie non linéaire est polynomiale, E. Leichtnam [9] a étudié le problème de Cauchy avec des données singulières et a construit des solutions ramifiées. Lorsque la partie non linéaire de l'opérateur semi-linéaire d'ordre deux est quelconque A. Nabaji et C. Wagschal [11] ont étudié le même problème et ont construit des solutions singulières dont le comportement est

$$|u(x)| \leqslant c\ (max(|k_1(x)|, |k_2(x)|))^{a+2}\ a \geqslant 0,$$

lorsque $|v(x)| \leqslant c\,(max(|k_1(x)|, |k_2(x)|))^a$. Rappelons que pour des équations linéaires d'ordre m, le problème de construction de solutions ramifiées d'un type plus général que celui de [9] et [11] a été étudié par E. Leichtnam [8] et récemment par P. Pongérard et C. Wagschal [14].

Enfin le problème de construction de solutions ramifiées autour d'une hypersurface caractéristique simple qui ne dépend pas du second membre, a été traitée, avec $q = 1$, dans [4], [7], [11] et [13].

Dans [7] l'auteur a traité en plus le cas ou l'hypersurface caractéristique dépend du second membre.

La méthode d'étude du problème (2) est celle qui a été développée dans [18] , [11] et [13]; elle consiste essentiellement à réduire ce problème à un problème integro-differentiel et ceci en cherchant une solution de la forme $D_{t_1}^{-1} D_{t_2}^{-1} u(k_1(x), k_2(x), x)$ où $D_{t_1}^{-1}$, $D_{t_2}^{-1}$ sont deux inverses à droite des opérateurs de dérivation D_{t_1} et D_{t_2} (formules (2.1) et (2.2)). Il suffit alors de résoudre le problème

$$P(x, D) D_{t_1}^{-1} D_{t_2}^{-1} u = v. \tag{3}$$

Nous montrons ensuite que cette équation admet une unique solution (proposition 2.1), ceci s'obtient en montrant que l'équation (3) est équivalente à :

$$u = \mathcal{A}u + \mathcal{F}_2 u + \mathcal{F}_1 u + v \tag{4}$$

où $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_1$ résultent respectivement de P_{lin}, $P_p - P_{lin}$ et f.

Ensuite nous utilisons la fonction majorante de Lax [6] et les conditions de croissance pour construire une algèbre de Banach où l'équation (4) admet un point fixe.

1. Résultats

Les coordonnées d'un point x de $\mathbb{C}^{n+1}$ seront notées $(x_0, x_1, ..., x_n)$.

Si $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ est un multi-indice à composantes entières, on appelle longueur de α l'entier $|\alpha| = \sum_{j=0}^{n} |\alpha_j|$. Nous poserons $\alpha! = \prod_{j=0}^{n} \alpha_j!$ et pour $\xi = (\xi_0, ..., \xi_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ $\xi^\alpha = \prod_{j=0}^{n} \xi_j^{\alpha_j}$. L'opérateur de dérivation par rapport à la variable x_j $(0 \leqslant j \leqslant n)$ sera noté D_j et, si $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$ est un multi-indice de dérivation, nous poserons $D^\alpha u = D_0^{\alpha_0} ... D_n^{\alpha_n} u$. On pose

$$A = \{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}; |\alpha| \leqslant 1\}, \quad n' = \text{ Card } A$$

et

$$D^A u = (D^\alpha u)_{\alpha \in A}, y = (y_\alpha)_{\alpha \in A} \in \mathbb{C}^{n'}.$$

On considère un opérateur différentiel quasi-linéaire du second ordre

$$P(x, D)u = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x, D^A u) D^\alpha u + f(x, D^A u) \tag{1.1}$$

où les fonctions $a_\alpha(x,y)$ et $f(x,y)$ sont holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n'}$.

Soit $q \in \mathbb{N}^*$, on supposera

$$f(x,0) = 0 \text{ pour tout } x \tag{1.2}$$

et

$$a_\alpha(x,y) - a_\alpha(x,0) = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^{n'} \\ |\beta| = q}} a_{\alpha,\beta}(x,y) y^\beta \text{ pour tout } x \tag{1.3}$$

où les fonctions $a_{\alpha,\beta}$ sont holomorphes au voisinage de $x = 0, y = 0$.

Remarque 1.1. — On remarquera que lorsque $q = 1$, l'hypothèse (1.3) est vrai pour toutes les fonctions a_α holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n'}$. Dans [7] et [13] les auteurs ont considéré le cas où $q = 1$. Notre résultat sera donc plus général.

On pose

$$a(x,D)u = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x,0) D^\alpha u,$$

alors

$$P(x,D)u = a(x,D)u + \sum_{|\alpha|=2} \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^{n'} \\ |\beta| = q}} a_{\alpha,\beta}(x, D^A u)(D^A u)^\beta D^\alpha u + f(x, D^A u).$$

Le symbole principal de $P(x,D)$ est alors donné par :

$$g(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x,0)\xi^\alpha. \tag{1.4}$$

On suppose que l'hyperplan $S : x_0 = 0$ est non caractéristique et que les caractéristiques issues de $T : x_0 = x_1 = 0$ sont simples, c'est-à-dire que l'équation $g(0; \lambda, 1, 0, \ldots, 0) = 0$ admet deux racines λ_1, λ_2 distinctes. On note k_i $(i = 1,2)$ la solution du problème de Cauchy du premier ordre

$$\begin{cases} g(x, grad\, k_i(x)) = 0, \\ k_i(x) = x_1 \text{ pour } x_0 = 0 \\ grad\, k_i(0) = (\lambda_i, 1, 0, \ldots, 0) \end{cases}$$

et $K_i : k_i(x) = 0$ les hypersurfaces caractéristiques issues de T.

Soit v une fonction holomorphe ramifiée autour de $K_1 \cup K_2$. En notant $\mathcal{R}_\delta$ le revêtement universel du disque pointé $\dot{D}_\delta = \{t \in \mathbb{C}, 0 < |t| < \delta\}$ ($\delta > 0$), ceci signifie que v est de la forme $v(x) = \hat{v}(k_1(x), k_2(x), x)$ où $\hat{v} : \mathcal{R}_\delta^2 \times \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe, Ω désignant un voisinage ouvert connexe de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$. Quitte à réduire Ω, on peut supposer les fonctions k_i holomorphes dans Ω et telles que $|k_i(x)| < \delta$ pour $x \in \Omega$, la fonction v est alors définie et holomorphe sur le revêtement universel de $\Omega - K_1 \cup K_2$.

On se propose de construire des solutions de l'équation

$$P(x, D)u = v \tag{1.5}$$

présentant des singularités sur $K_1 \cup K_2$. Pour obtenir un tel résultat, des hypothèses de croissance seront nécessaires. En plus, la présence de dérivées d'ordre deux dans la partie non linéaire de l'opérateur $P(x, D)$ nécessite, comme dans [19] et [13], une estimation de toutes les dérivées de $u(t_1, t_2, x)$ par rapport aux variables t_1 et t_2.

Soit $\pi : \mathcal{R}_\delta \to \dot{D}_\delta$ la surjection canonique. On notera $|\bullet| : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+^*$ la fonction $|t| = |\pi(t)|$ et on introduit la classe de fonctions suivantes :

DÉFINITION 1.1. — *Soient $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ et Ω un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$. On note $\mathcal{G}^{a_1,a_2}(\mathcal{R}_\delta^2 \times \Omega)$ l'espace des fonctions $u : \mathcal{R}_\delta^2 \times \Omega \mapsto \mathbb{C}^{n+1}$ holomorphes telles qu'il existe une constante $c \geqslant 0$, tel que pour tout $(t_1, t_2, x) \in \mathcal{R}_\delta^2 \times \Omega$ et $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$*

$$|D_{t_1}^{p_1} D_{t_2}^{p_2} u(t_1, t_2, x)| \leqslant c^{p_1+p_2+1} p_1! p_2! |t_1|^{a_1 - p_1} |t_2|^{a_2 - p_2}. \tag{1.6}$$

On a alors le théorème

THÉORÈME 1.1. — *Soient $a_1, a_2 \geqslant 1/q$ et Ω un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$, il existe un voisinage ouvert Ω' de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$ tel que, pour toute fonction $v \in \mathcal{G}^{a_1,a_2}(\mathcal{R}_\delta^2 \times \Omega)$, il existe $\delta_1 > 0$ et une solution $u \in \mathcal{G}^{a_1+1,a_2+1}(\mathcal{R}_{\delta_1}^2 \times \Omega')$ du problème (1.5).*

Remarque 1.2. — Si $u \in \mathcal{G}^{a_1,a_2}(\mathcal{R}_\delta^2 \times \Omega)$, alors

$$|u(t_1, t_2, x)| \leqslant c|t_1|^{a_1}|t_2|^{a_2} \text{ pour tout } (t_1, t_2, x) \in \mathcal{R}_\delta^2 \times \Omega.$$

Notons $\mathcal{H}^{a_1,a_2}(\mathcal{R}_\delta^2 \times \Omega)$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions $u : \mathcal{R}_\delta^2 \times \Omega \mapsto \mathbb{C}$ holomorphes telles qu'il existe une constante $c \geqslant 0$,

$$|u(t_1, t_2, x)| \leqslant c|t_1|^{a_1}|t_2|^{a_2} \text{ pour tout } (t_1, t_2, x) \in \mathcal{R}_\delta^2 \times \Omega. \tag{1.7}$$

La remarque 1.1 se traduit alors par $\mathcal{G}^{a_1,a_2}(\mathcal{R}_\delta^2 \times \Omega) \subset \mathcal{H}^{a_1,a_2}(\mathcal{R}_\delta^2 \times \Omega)$. Réciproquement, on a le lemme suivant

LEMME 1.1. — *L'espace $\mathcal{H}^{a_1,a_2}(\mathcal{R}_\delta^2 \times \Omega)$ est inclus dans l'espace $\mathcal{G}^{a_1,a_2}(\mathcal{R}_{\delta'}^2 \times \Omega)$ pour tout $0 < \delta' < \delta$.*

Preuve. — Soit $0 < \delta' < \delta$, il existe $0 < \lambda < 1$ tel que, pour tout $t \in \mathcal{R}_{\delta'}$, le disque centré au point t et de rayon $\epsilon = \lambda|t|$ soit tracé dans $\mathcal{R}_\delta$. Si γ_i désigne le bord du disque de centre t_i est de rayon $\epsilon_i = \lambda|t_i|$, on a

$$D_{t_1}^{p_1} D_{t_2}^{p_2} u(t_1, t_2, x) = \frac{-p_1!p_2!}{4\pi^2} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{u(\tau_1, \tau_2, x)}{(\tau_1 - t_1)^{p_2+1}(\tau_2 - t_2)^{p_2+1}} d\tau_1 d\tau_2$$

et, vu que $u \in \mathcal{H}^{a_1,a_1}(\mathcal{R}_\delta^2 \times \Omega)$, il existe $c \geqslant 0$ tel que

$$|D_{t_1}^{p_1} D_{t_2}^{p_2} u(t_1, t_2, x)| \leqslant c \frac{p_1!p_2!}{\epsilon_1{}^{p_1} \epsilon_2{}^{p_2}} \sup_{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi} |t_1 + \epsilon_1 e^{i\varphi}|^{a_1} \sup_{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi} |t_2 + \epsilon_2 e^{i\varphi}|^{a_2}$$

on en déduit qu'il existe $c > 0$, tel que

$$\forall p_1, p_2 \in \mathbb{N}, |D_{t_1}^{p_1} D_{t_2}^{p_2} u(t_1, t_2, x)| \leqslant c^{p_1+p_2+1} p_1!p_2! |t_1|^{a_1-p_1} |t_2|^{a_2-p_2}.$$

Q.E.D.

Du théorème 1.1 on déduit alors le

THÉORÈME 1.2. — *Soient $a_1, a_2 \geqslant 1/q$ et Ω un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$, il existe un voisinage ouvert Ω' de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$ tel que, pour toute fonction $v \in \mathcal{H}^{a_1,a_2}(\mathcal{R}_\delta^2 \times \Omega)$, il existe $\delta_1 > 0$ et une solution $u \in \mathcal{H}^{a_1+1,a_2+1}(\mathcal{R}_{\delta_1}^2 \times \Omega')$ du problème (1.5).*

Remarque 1.3. — Lorsque les coefficients a_α sont des fonctions holomorphes quelconque, c'est-à-dire $q = 1$, les hypothèses de régularité minimales du théorème 1.1 et 1.2 sont les mêmes que celles exprimées dans [7] et [13] (pour le cas d'une ramification autour d'une hypersurface caractéristique simple qui ne dépend pas du second membre).

2. Réduction

Définissons d'abord des inverses à droite des opérateurs de dérivation D_{t_1} et D_{t_2}, $t_i \in \mathcal{R}$. Si $u \in \mathcal{H}^{a_1,a_2}(\mathcal{R}_\delta^2 \times \Omega)$ et $a_i > -1$, on pose

$$D_{t_1}^{-1} u(t_1, t_2, x) = \int_0^{t_1} u(\tau, t_2, x)\, d\tau = \int_0^1 u(st_1, t_2, x) t_1\, ds \tag{2.1}$$

et

$$D_{t_2}^{-1} u(t_1, t_2, x) = \int_0^{t_2} u(t_1, \tau, x)\, d\tau = \int_0^1 u(t_1, st_2, x) t_2\, ds. \tag{2.2}$$

Remarque 2.1. — Les opérateurs D_{t_j} et $D_{t_i}^{-1}$, $i \neq j$ commutent, ainsi que $D_{t_1}^{-1}$ et $D_{t_2}^{-1}$.

Si u vérifie (1.6), on a

$$|D_{t_2}^{-1} D_{t_1}^{p_1} u(t_1, t_2, x)| \leqslant \frac{c^{p_1+1}}{a_2+1} p_1! \, |t_1|^{a_1-p_1} |t_2|^{a_2+1}$$

et pour $p_2 \geqslant 1$

$$|D_{t_2}^{p_2-1} D_{t_1}^{p_1} u(t_1, t_2, x)| \leqslant c^{p_1+p_2} p_1!(p_2-1)! \, |t_1|^{a_1-p_1} |t_2|^{a_2+1-p_2},$$

ce qui prouve que la fonction $D_{t_2}^{-1} u$ appartient a $\mathcal{G}^{a_1, a_2+1}(\mathcal{R}_\delta^2 \times \Omega)$ et de même on a $D_{t_1}^{-1} u \in \mathcal{G}^{a_1+1, a_2}(\mathcal{R}_\delta^2 \times \Omega)$.

Nous chercherons une solution de (1.5) de la forme

$$\mathcal{U}(k_1(x), k_2(x), x) = D_{t_1}^{-1} D_{t_2}^{-1} u(k_1(x), k_2(x), x).$$

Pour toute fonction holomorphe $u : \mathcal{R}_\delta^2 \times \Omega \to \mathbb{C}$, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} a(x, D)\mathcal{U}(k_1(x), k_2(x), x) = [a_0(x) + P_1(x, D) D_{t_1}^{-1} + \\ + Q_1(x, D) D_{t_2}^{-1} + P_2(x, D) D_{t_1}^{-1} D_{t_2}^{-1}] u(t_1, t_2, x) \text{ pour } t_i = k_i(x) \end{array} \right. \tag{2.3}$$

où P_l et Q_l sont des opérateurs différentiels linéaires d'ordre $\leqslant l$ et la fonction holomorphe a_0 est donnée par la formule

$$a_0(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial g}{\partial \xi_j}(x, Dk_1(x)) \times D_j k_2(x). \tag{2.4}$$

Cette fonction est non nulle au voisinage de l'origine. En effet,

$$a_0(0) = \frac{\partial g}{\partial \xi_0}(0, Dk_1(0))\lambda_2 + \frac{\partial g}{\partial \xi_1}(0, Dk_1(0))$$

et d'après l'identité d'Euler

$$\frac{\partial g}{\partial \xi_0}(0, Dk_1(0))\lambda_1 + \frac{\partial g}{\partial \xi_1}(0, Dk_1(0)) = 0,$$

d'où

$$a_0(0) = \frac{\partial g}{\partial \xi_0}(0, Dk_1(0))(\lambda_2 - \lambda_1)$$

quantité non nulle vu les hypothèses.

Quant au terme non-linéaire, on remarque que la fonction $\mathcal{U}(k_1(x), k_2(x), x)$ et ses dérivées premières s'expriment sous forme de combinaison linéaire à coefficients fonctions holomorphes de x des fonctions suivantes (calculées en $t_i = k_i(x)$)

$$D_{t_i}^{-1}u(t_1,t_2,x),\ D_{t_1}^{-1}D_{t_2}^{-1}u(t_1,t_2,x),\ D_jD_{t_1}^{-1}D_{t_2}^{-1}u(t_1,t_2,x). \tag{2.5}$$

Notons $z_1 = (z_{1,j})$ l'ensemble des fonctions (2.5).

Les dérivées secondes de la fonction $\mathcal{U}(k_1(x), k_2(x), x)$ s'expriment sous forme de combinaison linéaire à coefficients fonctions holomorphes de x des fonctions suivantes

$$D_jD_{t_i}^{-1}u,\ D_jD_iD_{t_1}^{-1}D_{t_2}^{-1}u,\ u,\ D_{t_1}D_{t_2}^{-1}u,\ D_{t_2}D_{t_1}^{-1}u. \tag{2.6}$$

Nous notons $z_2 = (z_{2,\kappa})$ l'ensemble des fonctions (2.6).

On a alors

$$\sum_{|\alpha|=2}\ \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^{n'}\\ |\beta|=q}} a_{\alpha,\beta}(x, D^A\mathcal{U})(D^A\mathcal{U})^\beta D^\alpha\mathcal{U} = \sum_{\substack{\kappa\\ \beta\in\mathbb{N}^{n+4}, |\beta|=q}} h_{\kappa,\beta}(x, z_1)z_1^\beta z_{2,\kappa}$$

où les fonctions $h_{\kappa,\beta}$ sont holomorphes au voisinage de $x = 0$, $z_1 = 0$. Nous noterons $\mathcal{F}_i : u \mapsto \mathcal{F}_iu$ les applications

$$(\mathcal{F}_1u)(t_1,t_2,x) = f(x, z_1) \tag{2.7}$$

et

$$(\mathcal{F}_2u)(t_1,t_2,x) = \sum_{\substack{\kappa\\ |\beta|=q}} h_{\kappa,\beta}(x, z_1)z_1^\beta z_{2,\kappa}. \tag{2.8}$$

Le problème (1.5) s'écrit (modulo un changement de notation)

$$u(t_1,t_2,x) = (\mathcal{A}u)(t_1,t_2,x) + (\mathcal{F}_1u)(t_1,t_2,x) + (\mathcal{F}_2u)(t_1,t_2,x) + v(t_1,t_2,x) \tag{2.9}$$

où $\mathcal{A}$ est l'application linéaire

$$(\mathcal{A}u)(t_1,t_2,x) = (P_1(x,D)D_{t_1}^{-1} + Q_1(x,D)D_{t_2}^{-1} + P_2(x,D)D_{t_1}^{-1}D_{t_2}^{-1})u(t_1,t_2,x).$$

Nous démontrons alors la

PROPOSITION 2.1. — *Soient $a_1, a_2 \geqslant 1/q$ et Ω un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$, il existe un voisinage ouvert Ω' de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$ tel que, pour toute fonction $v \in \mathcal{G}^{a_1,a_2}(\mathcal{R}_\delta^2 \times \Omega)$, il existe $\delta_1 > 0$ et une unique solution $u \in \mathcal{G}^{a_1,a_2}(\mathcal{R}_{\delta_1}^2 \times \Omega')$ du problème (2.9).*

3. Algèbres de Banach

La démonstration de la proposition 2.1 repose sur le théorème du point fixe dans des espaces de Banach définis de la façon suivante. On utilise la fonction majorante de Lax [6] déjà utilisée dans [11], [13] et [18], on pose $\theta(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{(n+1)^2}$ et pour $R > 0$, $\varphi_R(\xi) = \theta(\xi/R)$. Nous utiliserons la proposition 2.1 et les lemmes 2.4 et 9.2 de [18].

PROPOSITION 3.1.— *Il existe une constante $c_0 \geqslant 0$ telle que*

$$\varphi_R^2(\xi) \ll c_0\, \varphi_R(\xi) \tag{3.1}$$

LEMME 3.2.— *Soit $\eta > 1$, il existe une constante $c = c(\eta) \geqslant 0$ telle que*

$$\frac{\eta R}{\eta R - \xi} \ll c\, \varphi_R(\xi).$$

Si a est une fonction holomorphe et bornée dans le polydisque

$$\Delta_{\eta R} = \{x \in \mathbb{C}^{n+1};\, \max_{0 \leqslant j \leqslant n} |x_j| < \eta R\},$$

on a d'après les inégalités de Cauchy

$$a \ll M \frac{\eta R}{\eta R - \xi} \ll M\, c(\eta) \varphi_R(\xi) \tag{3.2}$$

où $\xi = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$ et $M = \sup_{x \in \Delta_{\eta R}} |a(x)|$.

LEMME 3.3.— *Soit $\eta > 1$, il existe une constante $c = c(\eta) \geqslant 0$ telle que*

$$\frac{\eta R}{\eta R - \xi} \ll c \eta^p \frac{R^p}{p!} D^p \varphi_R(\xi) \text{ pour tout } p \geqslant 0.$$

Le lemme 4.6 de [11] peut s'écrire ainsi

LEMME 3.4.— *Il existe une constante $c \geqslant 0$ telle que*

$$D^p \varphi_R(\xi) \ll c R D^{p+1} \varphi_R(\xi) \text{ pour tout } p \geqslant 0. \tag{3.3}$$

Considérons une fonction $u \in \mathcal{G}^{a_1,a_2}(\mathcal{R}_\delta^2 \times \Omega)$ et soit $\eta > 1$, $R > 0$ tel que Ω contienne le polydisque $\Delta_{\eta R}$. D'après les inégalités de Cauchy, si u vérifie (1.6) on a pour tout $t_1, t_2 \in \mathcal{R}_\delta$ et $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$,

$$D_{t_1}^{p_1} D_{t_2}^{p_2} u(t_1, t_2, x) \ll c^{p_1+p_2+1} p_1! p_2! |t_1|^{a_1 - p_1} |t_2|^{a_2 - p_2} \frac{\eta R}{\eta R - \xi},$$

et d'après le lemme 3.3, il existe donc une constante $c \geqslant 0$ telle que

$$D_{t_1}^{p_1} D_{t_2}^{p_2} u(t_1, t_2, x) \ll c^{p_1+p_2+1} |t_1|^{a_1-p_1} |t_2|^{a_2-p_2} D^{p_1+p_2} \varphi_R(\xi). \tag{3.4}$$

Réciproquement, soit u une fonction holomorphe au voisinage de $\mathcal{R}_\delta^2 \times \{0\}$ vérifiant (3.4); la fonction u est holomorphe dans $\mathcal{R}_\delta^2 \times \Omega_R$ où $\Omega_R = \{x \in \mathbb{C}^{n+1}; |x_0| + |x_1| + \cdots + |x_n| < R\}$ et, pour tout $(t_1, t_2, x) \in \mathcal{R}_\delta^2 \times \Omega_r$, $0 < r < R$,

$$|D_{t_1}^{p_1} D_{t_2}^{p_2} u(t_1, t_2, x)| \leqslant c^{p_1+p_2+1} |t_1|^{a_1-p_1} |t_2|^{a_2-p_2} D^{p_1+p_2} \varphi_R(r),$$

où $D^{p_1+p_2}\varphi_R(r) \leqslant c^{p_1+p_2+1}(p_1 + p_2)! \leqslant (2c)^{p_1+p_2+1} p_1! p_2!$, ce qui prouve que u appartient à l'espace $\mathcal{G}^{a_1,a_2}(\mathcal{R}_\delta^2 \times \Omega_r)$. Ceci conduit à la définition suivante.

DÉFINITION 3.1. — *Soient $\delta > 0$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ et $R, L, \omega > 0$ tels que $2\omega\delta < R$. On note $\mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$ l'ensemble des fonctions u holomorphes au voisinage de $\mathcal{R}_\delta^2 \times \{0\}$ telles qu'il existe une constante $c \geqslant 0$ telle que, pour tout $t_1, t_2 \in \mathcal{R}_\delta$ et $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$, on a*

$$D_{t_1}^{p_1} D_{t_2}^{p_2} u(t_1, t_2, x) \ll c L^{p_1+p_2} |t_1|^{a_1-p_1} |t_2|^{a_2-p_2} D^{p_1+p_2} \varphi_R(\omega(|t_1| + |t_2|) + \xi). \tag{3.5}$$

Il est clair que $\mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$ est un espace vectoriel et que la plus petite constante c pour laquelle (3.5) a lieu est une norme sur cet espace vectoriel.

Note. — Nous noterons indifféremment c toute constante qui ne dépend pas des paramètres δ, ω et L.

Grâce à un raisonnement analogue à celui fait pour le lemme 4.2 de [11], on vérifie que toute fonction de l'espace $\mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$ est holomorphe sur l'ouvert

$$\mathcal{U} = \{(t_1, t_2, x) \in \mathcal{R}_\delta^2 \times \mathbb{C}^{n+1}; \omega(|t_1| + |t_2|) + |x_0| + |x_1| + \cdots + |x_n| < R\}.$$

Remarque 3.1. — Grâce à un raisonnement analogue à celui fait pour la proposition 4.3 de [11], on vérifie que $\mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$ est un espace de Banach.

Remarque 3.2. — Si $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ et $a_i \leqslant b_i$, alors $\mathcal{G}^{b_1,b_2}(\delta, L, \omega) \subset \mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$ et l'injection canonique est linéaire continue de norme $\leqslant \delta^{b_1+b_2-a_1-a_2}$.

PROPOSITION 3.5. — *Soient $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ et $(u,v) \in (\mathcal{G}^{a_1,a_2} \times \mathcal{G}^{b_1,b_2})$ (δ, L, ω), alors $uv \in \mathcal{G}^{a_1+b_1,a_2+b_2}(\delta, L, \omega)$ et*

$$||uv||_{\mathcal{G}^{a_1+b_1,a_2+b_2}} \leqslant c_0 \, ||u||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}} \, ||v||_{\mathcal{G}^{b_1,b_2}} \tag{3.6}$$

où c_0 est la constante telle que $\varphi_R^2 \ll c_0 \varphi_R$.

Preuve. — Pour tout $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$, on a

$$D_{t_1}^{p_1} D_{t_2}^{p_2}(uv) = \sum_{i=0}^{p_1} \sum_{j=0}^{p_2} \binom{p_1}{i} \binom{p_2}{j} D_{t_1}^{p_1-i} D_{t_2}^{p_2-j} u D_{t_1}^{i} D_{t_2}^{j} v,$$

d'où

$$D_{t_1}^{p_1} D_{t_2}^{p_2}(uv) \ll ||u|| \, ||v|| L^{p_1+p_2} |t_1|^{a_1+b_1-p_1} |t_2|^{a_2+b_2-p_2}$$

$$\sum_{i=0}^{p_1} \sum_{j=0}^{p_2} \binom{p_1}{i} \binom{p_2}{j} (D^{p_1+p_2-i-j} \varphi_R D^{i+j} \varphi_R)(\omega(|t_1| + |t_2|) + \xi)$$

et, d'après (3.1), on a

$$\sum_{i=0}^{p_1} \sum_{j=0}^{p_2} \binom{p_1}{i} \binom{p_2}{j} (D^{p_1+p_2-i-j} \varphi_R D^{i+j} \varphi_R)(\omega(|t_1| + |t_2|) + \xi) \ll$$

$$c_0 \, D^{p_1+p_2} \varphi_R(\omega(|t_1| + |t_2|) + \xi),$$

ce qui permet de conclure. Q.E.D.

Si $u, v \in \mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$ alors $uv \in \mathcal{G}^{2a_1,2a_2}(\delta, L, \omega) \subset \mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$ lorsque $a_1, a_2 \geqslant 0$. On en déduit que $\mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$ est une algèbre de Banach.

Nous aurons besoin du lemme suivant

LEMME 3.6. — *Soient $F(x,u)$ une fonction holomorphe et bornée par M sur un polydisque centré en $0 \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^q$ de rayon ηR, $R > 0$, $\eta > 1$ et $u_1, ..., u_q \in \mathcal{G}^{0,0}(\delta, L, \omega)$ telles que $c_0 ||u_i||_{\mathcal{G}^{0,0}} < R$, alors $v = F(x, u_1, ..., u_q) \in \mathcal{G}^{0,0}(\delta, L, \omega)$ et*

$$||v|| \leqslant c M \prod_{i=1}^{q} \frac{R}{R - c_0 ||u_i||}$$

où la constante c ne dépend que de η.

Preuve. — Pour tout $t_1, t_2 \in \mathcal{R}_\delta$, on a

$$u_i \ll ||u_i||\varphi_R(\omega(|t_1| + |t_2|) + \xi)$$

d'où

$$|u_i(t,0)| \leqslant ||u_i||\varphi_R(\omega(|t_1| + |t_2|)) \leqslant ||u_i||\varphi_R(R);$$

de la relation $\varphi_R^2 \ll c_0\varphi_R$, on déduit $\varphi_R(R) \leqslant c_0$, d'où $|u_i(t,0)| \leqslant c_0||u_i|| < R$. Ceci prouve que la fonction $v = F(x, u_1, ..., u_q)$ est bien définie et holomorphe au voisinage de $\mathcal{R}_\delta^2 \times \{0\}$ et on a

$$v = F(x, u_1, ..., u_q) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^q} F_\alpha(x) u_1^{\alpha_1} ... u_q^{\alpha_q},$$

où les fonctions F_α sont holomorphes, bornées par $MR^{-|\alpha|}$ sur le polydisque $\Delta_{\eta R}$ et donc appartiennent à l'espace $\mathcal{G}^{0,0}(\delta, L, \omega)$ et de norme $\leqslant cMR^{-|\alpha|}$ où $c = c(\eta)$ d'après le lemme 3.2. Lorsque $\alpha \neq 0$, on a d'après la proposition 3.5 $u^\alpha \in \mathcal{G}^{0,0}(\delta, L, \omega)$ et $||u^\alpha|| \leqslant c_0^{|\alpha|-1} \prod_{i=1}^q ||u_i||^{\alpha_i}$, d'où $F_\alpha u^\alpha \in \mathcal{G}^{0,0}(\delta, L, \omega)$ et

$$||F_\alpha u^\alpha|| \leqslant cM \prod_{i=1}^q \left(\frac{c_0||u_i||}{R}\right)^{\alpha_i}.$$

Cette inégalité vaut encore pour $\alpha = 0$. Ceci montre que la famille $(F_\alpha u^\alpha)$ est absolument sommable dans l'espace $\mathcal{G}^{0,0}(\delta, L, \omega)$ et par conséquent

$$||v|| \leqslant cM \prod_{i=1}^q \frac{R}{R - c_0||u_i||}.$$

Q.E.D.

Nous imposerons d'abord à $R > 0$ de vérifier la propriété suivante : tous les coefficients des opérateurs apparaissant dans $\mathcal{A}$ sont holomorphes et bornés sur le polydisque $\Delta_{\eta R}$ où $\eta > 1$.

PROPOSITION 3.7. — *Soient $a_1, a_2 > -1$, $\omega \geqslant 1$, $L \geqslant 1$ et $0 < \delta \leqslant 1$ alors l'application $\mathcal{A}$ induit un endomorphisme de l'espace $\mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$ dont la norme est $\leqslant c$ max(ω^{-1}, L^{-1}) et la constante c ne dépend que de η, R et de la borne supérieure sur $\Delta_{\eta R}$ des coefficients des opérateurs P_1, Q_1 et P_2, figurant dans $\mathcal{A}$.*

Preuve. — Il s'agit de vérifier la proposition pour des opérateurs de la forme $a(x)D^\alpha D_{t_i}^{-1}$ et $a(x)D^\beta D_{t_1}^{-1} D_{t_2}^{-1}$ où $|\alpha| \leqslant 1$, $|\beta| \leqslant 2$ et $a(x)$ est une fonction holomorphe et bornée sur $\Delta_{\eta R}$. Soit $u \in \mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$, on a $D_{t_1}^{p_1} D_{t_2}^{p_2} D^\alpha D_{t_1}^{-1} u = D^\alpha D_{t_1}^{p_1-1} D_{t_2}^{p_2} u$.

Si $p_1 \geqslant 1$, on a

$$D_{t_1}^{p_1-1} D_{t_2}^{p_2} u \ll ||u|| \; L^{p_1+p_2-1} |t_1|^{a_1-p_1+1} |t_2|^{a_2-p_2} D^{p_1+p_2-1} \varphi_R(\omega(|t_1|+|t_2|)+\xi).$$

En dérivant, on obtient

$$D^\alpha D_{t_1}^{p_1-1} D_{t_2}^{p_2} u \ll c \; ||u|| \; L^{p_1+p_2-1} |t_1|^{a_1-p_1+1} |t_2|^{a_2-p_2} D^{p_1+p_2} \varphi_R(\omega(|t_1|+|t_2|)+\xi)$$

en effet, si $|\alpha| = 1$ ceci est vrai avec $c = 1$ et si $|\alpha| = 0$ on a, d'après (3.3) $D^{p_1+p_2-1}\varphi_R \ll c \; D^{p_1+p_2}\varphi_R$. Or $|t_1| < \delta \leqslant 1$, d'où

$$D_{t_1}^{p_1} D_{t_2}^{p_2} D^\alpha D_{t_1}^{-1} u \ll c \; L^{-1} ||u|| \; L^{p_1+p_2} |t_1|^{a_1-p_1} |t_2|^{a_2-p_2} D^{p_1+p_2} \varphi_R(\omega(|t_1|+|t_2|)+\xi).$$

Si $p_1 = 0$, on a

$$D_{t_2}^{p_2} u \ll ||u|| \; L^{p_2} |t_2|^{a_2-p_2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\omega^j |t_1|^{a_1+j}}{j!} D^{p_2+j} \varphi_R(\omega|t_2|+\xi)$$

d'où

$$D_{t_1}^{-1} D_{t_2}^{p_2} u \ll ||u|| \; L^{p_2} |t_2|^{a_2-p_2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j+1}{a_1+j+1} \frac{\omega^j |t_1|^{a_1+j+1}}{(j+1)!} D^{p_2+j} \varphi_R(\omega|t_2|+\xi)$$

et $sup_{j\geqslant 0} \frac{j+1}{a_1+j+1}$ étant fini, on en déduit que

$$D_{t_1}^{-1} D_{t_2}^{p_2} u \ll c \; ||u|| \; L^{p_2} |t_1|^{a_1} |t_2|^{a_2-p_2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\omega^j |t_1|^{j+1}}{(j+1)!} D^{p_2+j} \varphi_R(\omega|t_2|+\xi).$$

En dérivant, en obtient

$$D^\alpha D_{t_1}^{-1} D_{t_2}^{p_2} u \ll c \; ||u|| \; L^{p_2} |t_1|^{a_1} |t_2|^{a_2-p_2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\omega^j |t_1|^{j+1}}{(j+1)!} D^{p_2+j+|\alpha|} \varphi_R(\omega|t_2|+\xi)$$

il existe, donc une constante $c \geqslant 0$ telle que

$$\begin{aligned} D_{t_2}^{p_2} D^\alpha D_{t_1}^{-1} u &\ll ||u|| \; L^{p_2} |t_1|^{a_1} |t_2|^{a_2-p_2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\omega^j |t_1|^{j+1}}{(j+1)!} D^{p_2+j+1} \varphi_R(\omega|t_2|+\xi) \\ &\ll \frac{c}{\omega} ||u|| \; L^{p_2} |t_1|^{a_1} |t_2|^{a_2-p_2} D^{p_2} \varphi_R(\omega(|t_1|+|t_2|)+\xi). \end{aligned}$$

Ceci prouve que $D^\alpha D_{t_1}^{-1} u$ appartient à l'espace $\mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$ et que sa norme est $\leqslant c \max(L^{-1}, \omega^{-1})||u||$. Quant à la fonction a, elle appartient à l'espace $\mathcal{G}^{0,0}(\delta, L, \omega)$ et la proposition 3.5 permet de conclure.

On a évidemment le même résultat pour l'opérateur $a(x) D^\alpha D_{t_2}^{-1}$.

Soit $\beta \in \mathbb{N}$ tel que $|\beta| \leqslant 2$, on peut écrire $\beta = \alpha + \alpha'$ tel que $|\alpha|, |\alpha'| \leqslant 1$ et

$$D^\beta D_{t_1}^{-1} D_{t_2}^{-1} u = D^{\alpha'} D_{t_2}^{-1} D^\alpha D_{t_1}^{-1} u.$$

Donc $a(x) D^\beta D_{t_1}^{-1} D_{t_2}^{-1} u \in \mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$ et

$$||a(x) D^\beta D_{t_1}^{-1} D_{t_2}^{-1} u|| \leqslant c\ (max(L^{-1}, \omega^{-1}))^2 ||u|| \leqslant c\ max(L^{-1}, \omega^{-1}) ||u||,$$

vu que $L, \omega \geqslant 1$. Q.E.D.

LEMME 3.8. — *Soient $a_1, a_2 > -1$, $\omega \geqslant 1$, $0 < \delta \leqslant 1$ et $L \geqslant 1$ alors les opérateurs $D_{t_i}^{-1}$, $D_{t_1}^{-1} D_{t_2}^{-1}$, $D_j D_{t_1}^{-1} D_{t_2}^{-1}$ induisent des endomorphismes de l'espace $\mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$ de norme plus petite que $c\ \delta$.*

Preuve. — Soit $u \in \mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$, on a $D_{t_1}^{p_1} D_{t_2}^{p_2} D_{t_1}^{-1} u = D_{t_1}^{p_1 - 1} D_{t_2}^{p_2} u$.

Si $p_1 \geqslant 1$, on a

$$D_{t_1}^{p_1-1} D_{t_2}^{p_2} u \ll ||u||\ L^{p_1+p_2-1} |t_1|^{a_1 - p_1 + 1} |t_2|^{a_2 - p_2} D^{p_1+p_2-1} \varphi_R(\omega(|t_1| + |t_2|) + \xi)$$

vu (3.3), il existe une constante $c \geqslant 0$ telle que

$$D_{t_1}^{p_1-1} D_{t_2}^{p_2} u \ll c\ |t_1|\ ||u||\ L^{p_1+p_2-1} |t_1|^{a_1 - p_1} |t_2|^{a_2 - p_2} D^{p_1+p_2} \varphi_R(\omega(|t_1| + |t_2|) + \xi)$$

d'où

$$D_{t_1}^{p_1} D_{t_2}^{p_2} D_{t_1}^{-1} u \ll c\ \delta\ ||u||\ L^{p_1+p_2} |t_1|^{a_1 - p_1} |t_2|^{a_2 - p_2} D^{p_1+p_2} \varphi_R(\omega(|t_1| + |t_2|) + \xi).$$

Si $p_1 = 0$, on a

$$\begin{aligned} D_{t_1}^{-1} D_{t_2}^{p_2} u &\ll ||u||\ L^{p_2} |t_2|^{a_2 - p_2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\omega^j |t_1|^{a_1 + j + 1}}{j!(a_1 + j + 1)} D^{p_2 + j} \varphi_R(\omega |t_2| + \xi) \\ &\ll ||u||\ L^{p_2} |t_1|^{a_1 + 1} |t_2|^{a_2 - p_2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\omega^j |t_1|^j}{j!} D^{p_2 + j} \varphi_R(\omega |t_2| + \xi) \\ &\ll \delta\ ||u||\ L^{p_2} |t_1|^{a_1} |t_2|^{a_2 - p_2} D^{p_2} \varphi_R(\omega(|t_1| + |t_2|) + \xi). \end{aligned}$$

Ceci prouve que $D_{t_1}^{-1}u$ appartient à l'espace $\mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$ et que sa norme est $\leqslant c\ \delta||u||$. On a évidemment le même résultat pour l'opérateur $D_{t_2}^{-1}$. Il en résulte que $D_{t_1}^{-1}D_{t_2}^{-1}$ induit un endomorphisme de $\mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$ de norme $\leqslant c\ \delta^2 \leqslant c\ \delta$. De la proposition 3.7, on déduit que $D_{t_1}^{-1}D_j$ est un endomorphisme de $\mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$ de norme $\leqslant c\ max(\omega^{-1}, L^{-1}) \leqslant c$, vu $\omega, L \geqslant 1$, donc $D_{t_1}^{-1}D_{t_2}^{-1}D_j$ est un endomorphisme de $\mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$ de norme $\leqslant c\ \delta$. Q.E.D.

LEMME 3.9. — *Soient $a_1, a_2 > -1$, $\omega \geqslant 1$, $L \geqslant 1$ et $0 < \delta \leqslant 1$ alors les opérateurs $D_{t_1}D_{t_2}^{-1}$ et $D_{t_2}D_{t_1}^{-1}$ induisent des opérateurs linéaires et continus de l'espace $\mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$ dans $\mathcal{G}^{a_1-1,a_2-1}(\delta, L, \omega)$ dont la norme est $\leqslant c\ L$.*

Preuve. — Soit $u \in \mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$, on a $D_{t_1}^{p_1}D_{t_2}^{p_2}D_{t_2}D_{t_1}^{-1}u = D_{t_1}^{p_1-1}$ $D_{t_2}^{p_2+1}u$.

Si $p_1 \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} & D_{t_1}^{p_1-1}D_{t_2}^{p_2+1}u \\ & \quad \ll ||u||\ L^{p_1+p_2}|t_1|^{a_1-p_1+1}|t_2|^{a_2-p_2-1}D^{p_1+p_2}\varphi_R(\omega(|t_1|+|t_2|)+\xi) \\ & \quad \ll |t_1|^2||u||\ L^{p_1+p_2}|t_1|^{a_1-1-p_1}|t_2|^{a_2-1-p_2}D^{p_1+p_2}\varphi_R(\omega(|t_1|+|t_2|)+\xi) \\ & \quad \ll L\ ||u||\ L^{p_1+p_2}|t_1|^{a_1-1-p_1}|t_2|^{a_2-1-p_2}D^{p_1+p_2}\varphi_R(\omega(|t_1|+|t_2|)+\xi) \end{aligned}$$

vu que $L \geqslant 1$ et $|t_1| < \delta \leqslant 1$.

Si $p_1 = 0$, on a

$$\begin{aligned} & D_{t_1}^{-1}D_{t_2}^{p_2+1}u \\ & \quad \ll c||u||\ L^{p_2+1}|t_2|^{a_2-1-p_2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\omega^j|t_1|^{a_1+j+1}}{(j+1)!}D^{p_2+1+j}\varphi_R(\omega|t_2|+\xi) \\ & \quad \ll c||u||\ L^{p_2+1}|t_1|^{a_1}|t_2|^{a_2-1-p_2}\ D^{p_2}\varphi_R(\omega(|t_1|+|t_2|)+\xi) \\ & \quad \ll cL\ ||u||\ L^{p_2}|t_1|^{a_1-1}|t_2|^{a_2-1-p_2}D^{p_2}\varphi_R(\omega(|t_1|+|t_2|)+\xi). \end{aligned}$$

De même pour l'opérateur $D_{t_1}D_{t_2}^{-1}$. Q.E.D.

4. Preuve de la proposition 2.1

D'après (1.2), on peut écrire

$$\mathcal{F}_1(u) - \mathcal{F}_1(u') = \sum_j h_{1,j}(x, z_1, z_1')(z_{1,j} - z_{1,j}')$$

et d'après (2.8), on peut écrire

$$\mathcal{F}_2(u) - \mathcal{F}_2(u') = \sum_{\beta,\kappa} h_{2,\beta,\kappa}(x, z_1, z_1')(z_{2,\kappa} - z'_{2,\kappa})z_1^\beta +$$
$$+ \sum_{\beta,\kappa} k_{1,\beta,\kappa}(x, z_1, z_1')(z_1^\beta - z_1'^\beta)z'_{2,\kappa} + \sum_{\beta,\kappa,j} k_{2,\beta,\kappa,j}(x, z_1, z_1')(z_{1,j} - z'_{1,j})z_1'^\beta z'_{2,\kappa}$$

où les fonctions $h_{1,j}$, $h_{2,\beta,\kappa}$, $k_{1,\beta,\kappa}$ et $k_{2,\beta,\kappa,j}$ sont holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+4} \times \mathbb{C}^{n+4}$. On peut supposer que ces fonctions sont holomorphes et bornées sur le polydisque de rayon ηR de l'espace $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+4} \times \mathbb{C}^{n+4}$. On pose

$$\mathcal{V} : u \mapsto \mathcal{A}(u) + \mathcal{F}_1(u) + \mathcal{F}_2(u) + v \tag{4.1}$$

Le problème (2.9) s'écrit alors

$$u = \mathcal{V}(u) \tag{4.2}$$

et il s'agit donc de démontrer que l'application $\mathcal{V}$ admet un point fixe.

On a alors la

PROPOSITION 4.1. — *Soient $a_1, a_2 \geqslant 1/q$ et $r > 0$, il existe $0 < \delta_0 \leqslant 1$ tel que, pour tout $0 < \delta \leqslant \delta_0$ et toutes fonctions $u, u' \in \mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$, telles que $||u||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}}$, $||u'||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}} \leqslant r$, les fonctions $\mathcal{F}_i(u)$ et $\mathcal{F}_i(u')$, $i = 1, 2$, sont bien définies, appartiennent à l'espace $\mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$ et*

$$||\mathcal{F}_i(u) - \mathcal{F}_i(u')||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}} \leqslant c L \delta ||u - u'||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}}, \quad i = 1, 2. \tag{4.3}$$

La proposition 2.1 s'en déduit aisément de la façon suivante :

On choisit $L, \omega \geqslant 1$ suffisamment grand pour que $v \in \mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$ et la norme de l'endomorphisme $\mathcal{A}$ soit $\leqslant 1/6$, puis on choisit $0 < \delta_1 \leqslant \delta_0$ tel que $2\omega\delta_1 < R$ et $c L \delta_1 \leqslant 1/6$.

Soit $r \geqslant 2||v||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}}$, alors si u appartient à la boule fermée $B'(0; r)$ de centre 0 et de rayon r de l'espace $\mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta_1, L, \omega)$, on a

$$||\mathcal{V}(u)||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}}$$
$$\leqslant ||\mathcal{A}(u)||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}} + ||\mathcal{F}_1(u)||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}} + ||\mathcal{F}_2(u)||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}} + ||v||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}} \leqslant \frac{3r}{6} + \frac{r}{2}$$

d'où $||\mathcal{V}(u)||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}} \leqslant r$; ceci prouve que $\mathcal{V}(B'(0; r)) \subset B'(0; r)$ et, d'après (4.3) et le lemme 3.7,

$$||\mathcal{V}(u) - \mathcal{V}(u')||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}} \leqslant \frac{1}{6}||u - u'||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}} + \frac{1}{6}||u - u'||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}} + \frac{1}{6}||u - u'||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}};$$

ceci prouve que $\mathcal{V} : B'(0;r) \to B'(0;r)$ est une contraction stricte, la proposition 2.1 résulte donc du théorème du point fixe.

Preuve de la proposition 4.1. — Soient $u, u' \in \mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$ où $0 < \delta \leqslant \delta_0$ tels que $||u||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}} \leqslant r$ et $||u'||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}} \leqslant r$, le lemme 3.8 montre que $z_{1,j}, z'_{1,j} \in \mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$ et

$$||z_{1,j}||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}} \leqslant c\,\delta\,||u||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}} \leqslant c\delta_0 r \text{ et } ||z'_{1,j}||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}} \leqslant c\,\delta\;||u'||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}} \leqslant c\,\delta_0\, r. \tag{4.4}$$

On choisit δ_0 tel que $0 < \delta_0 \leqslant 1$ et

$$\frac{cc_0\delta_0 r}{R} \leqslant 1/2.$$

Si F est l'une des fonctions $h_{1,j}$, $h_{2,\beta,\kappa}$, $k_{1,\beta,\kappa}$ et $k_{2,\beta,\kappa,j}$, le lemme 3.6 montre que $F(x, z_1, z'_1) \in \mathcal{G}^{0,0}(\delta, L, \omega)$ et qu'il existe une constante $c \geqslant 0$ indépendante de δ_0 telle que

$$||F(x, z_1, z'_1)||_{\mathcal{G}^{0,0}} \leqslant c \tag{4.5}$$

ceci montre que les fonctions $\mathcal{F}_i(u)$ et $\mathcal{F}_i(u')$ sont bien définies.

D'une part, le lemme 3.8 montre que

$$||z_{1,j} - z'_{1,j}||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}} \leqslant c\,\delta\;||u - u'||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}} \tag{4.6}$$

et la proposition 3.5 prouve, vu les inégalités (4.5) et (4.6), que $h_{1,j}(x, z_1, z'_1)$ $(z_{1,j} - z'_{1,j}) \in \mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$ et que

$$||h_{1,j}(x, z_1, z'_1)(z_{1,j} - z'_{1,j})||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}} \leqslant c\,\delta||u - u'||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}},$$

d'où $\mathcal{F}_1(u) - \mathcal{F}_1(u')$ appartient à l'espace $\mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$ et

$$||\mathcal{F}_1(u) - \mathcal{F}_1(u')||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}} \leqslant c\,\delta||u - u'||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}}.$$

Or d'après (1.2), on a $\mathcal{F}_1(u) = 0$ si $u = 0$ et donc en prenant $u = 0$ ou $u' = 0$, ceci prouve, vu l'inégalité précédente, que les fonctions $\mathcal{F}_1(u), \mathcal{F}_1(u')$ appartiennent à l'espace $\mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$.

D'autre part, d'après la proposition 3.5 et l'inégalité (4.4) z_1^β et $z_1'^\beta$ appartiennent à l'espace $\mathcal{G}^{qa_1,qa_2}(\delta, L, \omega)$, vu que $|\beta| = q$, et

$$||z_1^\beta||_{\mathcal{G}^{qa_1,qa_2}} \leqslant c\,\delta^q\;||u||^q_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}} \leqslant c\,\delta \text{ et } ||z_1'^\beta||_{\mathcal{G}^{qa_1,qa_2}} \leqslant c\,\delta^q\;||u'||^q_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}} \leqslant c\,\delta. \tag{4.7}$$

On a la formule

$$z_1^\beta - z_1'^\beta = \sum_j (z_{1,j} - z'_{1,j}) P_j(z_1, z'_1)$$

où P_j est un polynôme homogène de degré $q-1$. On obtient, vu la proposition 3.5 et (4.4), que

$$||z_1^\beta - z_1'^\beta||_{\mathcal{G}^{qa_1,qa_2}} \leqslant c\delta ||u-u'||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}}. \tag{4.8}$$

La remarque 3.2 montre que si $z_{2,\kappa}$ est la fonction u alors $z_{2,\kappa} \in \mathcal{G}^{a_1-1,a_2-1}(\delta, L, \omega)$ et

$$||z_{2,\kappa}||_{\mathcal{G}^{a_1-1,a_2-1}} \leqslant c\,||u||_{\mathcal{G}^{a_1-1,a_2-1}}. \tag{4.9}$$

La proposition 3.7 montre que si $z_{2,\kappa}$ est l'une des fonctions $D_j D_{t_i}^{-1} u$, $D_j D_i D_{t_1}^{-1} D_{t_2}^{-1} u$ alors $z_{2,\kappa}$ appartient à l'espace $\mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$, donc à l'espace $\mathcal{G}^{a_1-1,a_2-1}(\delta, L, \omega)$ et

$$||z_{2,\kappa}||_{\mathcal{G}^{a_1-1,a_2-1}} \leqslant c\,||u||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}}. \tag{4.10}$$

Le lemme 3.9 montre que si $z_{2,\kappa}$ est l'une des fonctions $D_{t_1}^{-1} D_{t_2}^{-1} u$, $D_{t_2} D_{t_1}^{-1} u$, alors $z_{2,\kappa} \in \mathcal{G}^{a_1-1,a_2-1}(\delta, L, \omega)$ et

$$||z_{2,\kappa}||_{\mathcal{G}^{a_1-1,a_2-1}} \leqslant cL\,||u||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}}. \tag{4.11}$$

De même, $z'_{2,\kappa} \in \mathcal{G}^{a_1-1,a_2-1}(\delta, L, \omega)$ et

$$||z'_{2,\kappa}||_{\mathcal{G}^{a_1-1,a_2-1}} \leqslant cL\,||u'||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}}, \tag{4.12}$$

$$||z_{2,\kappa} - z'_{2,\kappa}||_{\mathcal{G}^{a_1-1,a_2-1}} \leqslant cL\,||u-u'||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}}. \tag{4.13}$$

Les inégalités (4.7)-(4.13) prouvent, vu la proposition 3.5, que

$$h_{2,\beta,\kappa}(x, z_1, z_1')(z_{2,\kappa} - z'_{2,\kappa}) z_1^\beta \text{ et } k_{1,\beta,\kappa}(x, z_1, z_1')(z_1^\beta - z_1'^\beta) z'_{2,\kappa}$$

appartiennent à $\mathcal{G}^{(q+1)a_1-1,(q+1)a_2-1}(\delta, L, \omega)$, donc à l'espace $\mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$ puisque $(q+1)a_i - 1 \geqslant a_i$ et que

$$||h_{2,\beta,\kappa}(x, z_1, z_1')(z_{2,\kappa} - z'_{2,\kappa}) z_1^\beta||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}} \leqslant cL\,\delta ||u-u'||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}},$$

$$||k_{1,\beta,\kappa}(x, z_1, z_1')(z_1^\beta - z_1'^\beta) z'_{2,\kappa}||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}} \leqslant cL\,\delta ||u-u'||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}}.$$

De même

$$k_{2,\beta,\kappa,j}(x, z_1, z_1')(z_{1,j} - z'_{1,j}) z'_{2,\kappa} z_1'^\beta \in \mathcal{G}^{(q+2)a_1-1,(q+1)a_2-1}(\delta, L, \omega) \subset \mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta, L, \omega)$$

puisque $(q+2)a_i - 1 \geqslant a_i$ et que

$$||k_{2,\beta,\kappa,j}(x,z_1,z_1')(z_{1,j}-z_{1,j}')z_{2,\kappa}'z_1'^{\beta}||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}} \leqslant c\,L\,\delta||u-u'||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}}.$$

D'où $\mathcal{F}_2(u)-\mathcal{F}_2(u')$ appartient à l'espace $\mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta,L,\omega)$ et

$$||\mathcal{F}_2(u)-\mathcal{F}_2(u')||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}} \leqslant c\,L\,\delta||u-u'||_{\mathcal{G}^{a_1,a_2}}.$$

En prenant $u=0$ ou $u'=0$, ceci prouve que les fonctions $\mathcal{F}_2(u),\mathcal{F}_2(u')$ appartiennent à l'espace $\mathcal{G}^{a_1,a_2}(\delta,L,\omega)$. Q.E.D.

Bibliographie

[1] BJORK (J.). — *Rings of Differential Operators*, North-Holland Publishing Company Amsterdam, 1979.

[2] DELIGNE (P.). — *Equations différentielles à points singuliers réguliers*, Springer Lecture Notes, vol. 163, Berlin, 1970.

[3] HAMADA (Y.), LERAY (J.) et WAGSCHAL (C.). — *Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : problème de Cauchy ramifié; hyperbolicité partielle*, J. Math. pures et appl., 55, 1976, p. 297-352.

[4] ISHII (T.). — *On Propagation of Regular Singularities for Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 37, 1990, p. 377-424.

[5] KOBAYASHI (T). — *Propagation of Singularities for a First Order Semi-Linear System in $\mathbb{C}^{n+1}$*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 4, 1985, p. 173-189.

[6] LAX (P.D.). — *Non Linear Hyperboliques Equations*, Comm. Pure Appl. Math., vol. 6, 1953, p. 231-258.

[7] LEICHTNAM (E.). — *Construction de solutions singulières pour des équations aux dérivées partielles non linéaires*, Ann. scien. Éc. Norm.Sup., 20, 1987, p.137-170.

[8] LEICHTNAM (E.). — *Le problème de Cauchy ramifié*, Ann. scien. Éc. Norm. Sup., 23, 1990, p. 367-443.

[9] LEICHTNAM (E.). — *Le problème de Cauchy ramifié semi-linéaire d'ordre deux*, Ann. scien. Éc. Norm. Sup., 24, 1991, p. 189-214.

[10] NABAJI (A.) et WAGSCHAL (C.). — *Problème de Cauchy ramifié pour des opérateurs semi-linéaires du second ordre à caractéristiques simples*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 314, p. 523-526, 1992.

[11] NABAJI (A.) et WAGSCHAL (C.). — *Singularités à croissance lente*, J. Math. pures et appl., vol. 72, 1993, p. 335-375.

[12] NABAJI (A.). — *Construction de solutions singulières pour un opérateurs quasi-linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 317, Série I p. 177-180, 1993.

[13] NABAJI (A.). — *Construction de solutions singulières pour un opérateurs quasi-linéaires*, Bull. Sci. math. 1995, 119, p. 509-527.

[14] PONGÉRARD (P.) et WAGSCHAL (C.). — *Ramification non abélienne*, J. Math. pures et appl., 77, 1998, p. 51-88.

[15] WAGSCHAL (C.). — *Problème de Cauchy analytique à données méromorphes*, J. Math. pures et appl., 51, 1972, p. 375-397.

[16] WAGSCHAL (C.). — *Une généralisation du problème de Goursat pour des systèmes d'équations intégro-différentielles holomorphes ou partiellement holomorphes*, J. Math. pures et appl., 53, 1974, p. 99-132.

[17] WAGSCHAL (C.). — *Sur le problème de Cauchy ramifié*, J. Math. pures et appl., 53, 1974, p. 147-164.

[18] WAGSCHAL (C.). — *Le problème de Goursat non linéaire*, J. Math. pures et appl., 58, 1979, p. 309-337.

[19] WAGSCHAL (C.). — *Problème de Cauchy ramifié à caractéristiques multiples holomorphes de multiplicité variable*, J. Math. pures et appl., 62, 1983, p. 99-127.