ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

TIEN-CUONG DINH

Remarque sur les fonctions ayant le même ensemble de Julia

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 9, nº 1 (2000), p. 55-70

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_2000_6_9_1_55_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse
Vol. IX, n° 1, 2000
pp. 55–70

Remarque sur les fonctions ayant le même ensemble de Julia [*]

TIEN-CUONG DINH [1]

RÉSUMÉ. — Soient f et g deux fonctions rationnelles possédant le même ensemble de Julia J_f. Supposons que f admet un point périodique indifférent rationnel et l'ensemble critique de f est disjoint de J_f. Alors soit J_f est égal à un cercle ou à un arc d'un cercle pour une certaine coordonnée, soit f et g vérifient une équation du type:

$$f^{m_1} \circ g \circ f^{m_2} \circ g \circ \cdots \circ f^{m_n} \circ g = f^m.$$

ABSTRACT. — Let f and g be two rationnal functions having the same Julia set J_f. Let us suppose that f has a rational indifferent periodic point and that the critical set of f is disjoint of J_f. Then or J_f has to be equal to a circle, an arc of a circle for some coordinate or f and g has to verify an equation of the type:

$$f^{m_1} \circ g \circ f^{m_2} \circ g \circ \cdots \circ f^{m_n} \circ g = f^m.$$

1. Introduction

On note $\mathbb{P}^1 := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la droite projective complexe. On appelle *fonction rationnelle* tout quotient $f = P/Q$ où P et Q sont deux polynômes sans facteur commun. *Le degré* de f est le maximum des degrés de P et de Q. La fonction f définit un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^1$. Par la suite, on

(*) Reçu le 9 novembre 1999, accepté le 8 février 2000
(1) Mathématique-Bâtiment 425, UMR 8628, Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex (France).
e-mail: TienCuong.Dinh@math.u-psud.fr.

note $fg := f \circ g$, $f^k := f \circ \cdots \circ f$ (k fois) et $f^0 :=$ Id pour toutes fonctions rationnelles f et g. Supposons que $\deg f \geqslant 2$ et $\deg g \geqslant 2$.

On appelle *ensemble de Fatou* de f l'ouvert maximal F_f où la suite $\{f^k\}_{k=1}^{\infty}$ est équicontinue. *L'ensemble de Julia* J_f est le complémentaire de F_f. Ces deux ensembles jouent rôle crucial dans l'étude de la dynamique de f. L'ensemble J_f est le plus petit ensemble infini, fermé et *complètement invariant*, i.e. $f^{\pm 1}(J_f) = J_f$. Par conséquent, soit il est égal à $\mathbb{P}^1$, soit il est d'intérieur vide. De plus, aucun point de J_f n'est isolé [2, 4.2].

Un point $z \in \mathbb{P}^1$ est dit *périodique* s'il existe un entier positif n tel que $f^n(z) = z$. Ce point est appelé *répulsif* (resp. *attractif, indifférent* et *indifférent rationnel*) si la dérivée de f^n en z est de module strictement plus grand que 1 (resp. de module strictement plus petit que 1, de module 1 et une racine de l'unité). D'après un théorème de Fatou, l'ensemble des points périodiques non répulsifs est fini [2, p.210]. L'ensemble des points périodiques répulsifs est infini et dense dans J_f [4, 2, p.70]. Un point z est appelé *prépériodique* (resp. *prépériodique répulsif, ...*) s'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(z)$ soit périodique (resp. périodique répulsif, ...).

Dans cet article, on s'intéresse à déterminer les fonctions rationnelles possédant le même ensemble de Julia. On peut montrer facilement que l'ensemble de Julia de f^k est égal à J_f pour tout $k \geqslant 1$. Dans [7, 10], Fatou et Julia ont montré que si f et g sont permutables ($fg = gf$), alors $J_f = J_g$ (*voir* également [9, 2, 4.2.9]). Il est aussi facile de prouver que dans ce cas f et g admettent une infinité de points périodiques communs. Si f, g sont permutables et si elles possèdent deux suites d'itérés disjointes alors l'une des conditions suivantes est vraie [12, 6]:

1. $J_f = J_g = \mathbb{P}^1$;

2. f et g sont conjuguées simultanément aux applications du type λz^d, i.e. il existe un automorphisme holomorphe σ de $\mathbb{P}^1$ tel que $\sigma f \sigma^{-1} = \lambda_1 z^{d_1}$ et $\sigma g \sigma^{-1} = \lambda_2 z^{d_2}$ où d, d_1, d_2 sont des entiers relatifs et λ, λ_1 et λ_2 sont des racines de l'unité.

3. f et g sont conjuguées simultanément aux applications du type $\pm \mathrm{T}_d$ où T_d est le *polynôme de Tchebychev* de degré $d \geqslant 2$ défini par $\mathrm{T}_d(\cos x) := \cos(dx)$.

L'ensemble de Julia de l'application λz^d pour $|\lambda| = 1$ et $|d| \geqslant 2$ est le cercle unité. L'ensemble de Julia des applications $\pm \mathrm{T}_d$ pour $d \geqslant 2$ est le segment $[-1, 1]$. Tous les couples de polynômes dont les ensembles de Julia coïncident, sont déterminés (*voir* par exemple [1, 13]). Pour les fonctions rationnelles, ce problème est résolu par Levin et Przytycki dans le cas où aucune composante périodique de l'ensemble de Fatou n'est un domaine parabolique, un disque de Siegel ou un annneau de Herman [11].

Notons C_f l'ensemble des points critiques de f. Notre résultat principal est le théorème suivant:

THÉORÈME 1. — *Soient f, g deux fonctions rationnelles définies sur $\mathbb{P}^1$ de degrés $\geqslant 2$ telles que $J_f = J_g$. Supposons que le cône tangent de J_f en un de ses points est une réunion finie de demi-droites réelles et que tout point de $C_f \cap J_f$ est prépériodique répulsif. Alors l'une des conditions suivantes est vraie:*

1. *$J_f = J_g$ est un cercle ou un arc d'un cercle pour une certaine coordonnée de $\mathbb{P}^1$;*
2. *il existe $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^+$ vérifiant $f^{m_1}g \ldots f^{m_k}g = f^m$.*

Exemple. — Soient h une fonction rationnelle, p un entier positif et $\alpha \neq 1$ une racine p-ième de l'unité. Posons $f(z) := h(z^p)$ et $g := \alpha h(z^p)$. Il est clair que $J_f = J_g$ et que les suites d'itérés de f et de g sont disjointes. Mais on a $fg = f^2 \neq gf$. Si $h(1) = 1$, $ph'(1) = 1$ et si le développement de Taylor de f en 1 est de la forme

$$f(z) = 1 + (z-1) + a(z-1)^{n+1} + \cdots$$

avec $a \neq 0$ alors le point 1 sera un point fixe indifférent rationnel de f. Le cône tangent de J_f en 1 est une réunion de n demi-droites. De plus, lorsque $n \geqslant 3$, J_f n'est pas contenu dans une courbe ou un arc réel analytique (*voir* le lemme 7).

Remerciement. — Je tiens à remercier le référé pour ses nombreux remarques.

2. Démonstration du théorème principal

Soit f une fonction holomorphe non constante définie dans un voisinage U de $0 \in \mathbb{C}$ telle que $f(0) = 0$. Un sous-ensemble $J \subset U$ est appelé *invariant* (resp. *complètement invariant*) par f au voisinage de 0 s'il existe un voisinage $V \subset U$ de 0 tel que $f(J) \cap V = J \cap V$ (resp. $f^{\pm 1}(J) \cap V = J \cap V$). Il est clair que J est complètement invariant si et seulement si $f^{\pm 1}(J) \cap V \subset J$.

Un ensemble $J \subset \mathbb{C}$ est dit *analytiquement laminé* en z si $J \cap V = \sigma^{-1}(K)$ où $V \subset \mathbb{C}$ est un voisinage de z, K est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $\sigma : V \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle analytique de rang maximal en tout point. L'ensemble J est *analytiquement laminé* dans un ouvert U s'il l'est en tout point de U. On montre facilement que J possède deux laminations analytiques différentes en $z \in J$ si et seulement si z appartient à l'intérieur de J.

PROPOSITION 1.— *Soient f, g deux fonctions holomorphes inversibles définies dans un voisinage U de 0 telles que $f(0) = g(0) = 0$ et $|f'(0)| \neq 1$. Soit $J \subset U$ un fermé complètement invariant par f et par g au voisinage de 0. Alors l'une des deux conditions suivantes est vraie:*

1. *il existe un voisinage $V \subset U$ de 0 tel que J soit analytiquement laminé dans $V \setminus \{0\}$;*
2. *il existe $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 - (0, 0)$ tel que $f^m = g^n$.*

Il existe une application holomorphe φ, dite *de Poincaré*, définie dans un petit disque D centré en 0, telle que $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ et $\varphi^{-1} f \varphi(t) = \lambda t$ pour tout $t \in D$, où $\lambda := f'(0) \neq 0$ est de module différent de 1. Sans perdre en généralité, on suppose, pour la suite de la preuve de la proposition 1, que f est linéaire: $f(t) = \lambda t$. Posons $\lambda' := g'(0)$ et fixons un disque $D \subset\subset U$ suffisamment petit de rayon $r_0 > 0$. On peut aussi supposer que $|\lambda| > 1$ car le cas contraire sera traité de même manière en remplaçant f par f^{-1}.

LEMME 1.— *Pour tout $t \in J \cap D$, pour tous entiers relatifs m, n vérifiant $\lambda^m \lambda'^n t \in D$, on a $\lambda^m \lambda'^n t \in J$.*

Preuve.— Soit $r > 0$ suffisamment petit tel que $g^n(D_r) \subset D$ où $D_r := \{t \in \mathbb{C} : \ |t| < r\}$. Posons $t' := \lambda^{-M} t$ pour M suffisamment grand de sorte que $|t'| < r$ et $\lambda'^n t' \in D$. On a $t' \in J$ car J est invariant par f^{-1} au voisinage de 0. Posons $t_k := f^k g^n f^{-k}(t')$. Comme $t' \in J$, t_k appartient à J lorsqu'il appartient à D. On écrit g^n sous la forme d'une série de Taylor convergente:

$$g^n(t) = \lambda'^n t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots$$

On a:

$$f^k g^n f^{-k}(t') = \lambda'^n t' + a_2 \lambda^{-k} t'^2 + a_3 \lambda^{-2k} t'^3 + \cdots$$

Par conséquent, $\lim t_k = \lambda'^n t' \in D$. D'autre part, $J \cap D$ est fermé dans D. On conclut que $\lambda'^n t' \in J$ ou encore $\lambda^{-M} \lambda'^n t \in J$. Finalement, $\lambda^m \lambda'^n t$ appartient à J lorsqu'il appartient à D car J est invariant par $f^{\pm 1}$. □

LEMME 2.— *Supposons que $\lambda^m \lambda'^n \neq 1$ pour tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 - (0, 0)$. Alors la condition 1 de la proposition 1 est vraie.*

Preuve. — Comme $\lambda^m \lambda'^n \neq 1$ pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2 - (0,0)$, le groupe multiplicatif fermé engendré par λ et par λ' contient un sous-groupe à un paramètre réel $\{\lambda_r := \exp(ar) : r \in \mathbb{R}\}$ où $a \neq 0$ est un nombre complexe avec $\mathrm{Re}(a) \geqslant 0$. D'après le lemme précédent, $J \cap D$ est une réunion de courbes réelles analytiques du type $\{t \in D : t = \lambda_r t_0\}$. Alors la condition 1 de la proposition 1 est vraie.

Si a est pure imaginaire, $J \cap D$ est une réunion de cercles centrés en 0.

Si a est un nombre réel, $J \cap D$ est une réunion de rayons de D.

Sinon, $J \cap D$ est une réunion de courbes spirales tendant vers 0. □

D'après le lemme précédent, il suffit de considérer le cas où $\lambda^m = \lambda'^n$ pour certain $(m,n) \neq (0,0)$. On a $n \neq 0$ car $|\lambda| > 1$. Posons $h := f^m g^{-n}$. Supposons que la condition 2 de la proposition 1 est fausse. On peut écrire:

$$h(t) = t + \alpha t^{p+1} + \mathrm{O}(t^{p+2})$$

où $\alpha \neq 0$ et $p \geqslant 1$. Quitte à effectuer un changement de coordonnée du type $t \mapsto \sqrt[p]{-\alpha}\, t$, on peut supposer que $\alpha = -1$.

Posons

$$S_k := \left\{ t \in \mathbb{C}^* : \frac{(2k-1)\pi}{p} < \arg(t) < \frac{(2k+1)\pi}{p} \right\}$$

$$S_k(\epsilon) := \left\{ t \in \mathbb{C}^* : \frac{(2k-1)\pi}{p} + \epsilon < \arg(t) < \frac{(2k+1)\pi}{p} - \epsilon \right\}$$

$$S(\epsilon) := \{ t \in \mathbb{C}^* : -\pi + p\epsilon < \arg(t) < \pi - p\epsilon \}$$

et

$$S := \{ t \in \mathbb{C}^* : \arg(t) \neq \pi \}$$

pour tout $0 \leqslant k \leqslant p-1$ et tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit.

Soient $\Phi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $\Phi(t) := t^{-p}$ et $\Psi_k : S \to S_k$ les branches inverses de Φ. Posons $r_1 := r_0^{-p}$, $S^r := S \cap \{t : |t| > r\}$ pour $r > 0$, $\Lambda := \Phi f \Psi_k$, $h_k := \Phi h \Psi_k$, $J_k := \Phi(J \cap S_k \cap D)$. Alors $\Phi(D \cap S_k) = S^{r_1}$, J_k est un fermé de S^{r_1}, $\Lambda(w) = \lambda^{-p} w$ est indépendant de k, $\Lambda^{-n}(J_k \cap S(\epsilon)) \subset J_k$, $\Lambda^n(J_k \cap S(\epsilon)) \cap S^{r_1} \subset J_k$ lorsque $|\arg(\lambda^n)| < \epsilon$. Pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit, il existe $R_\epsilon > r_1$ tel que h_k soit définie sur $S^{R_\epsilon} \cap S(\epsilon)$ et $h_k(w) = w + p + \mathrm{O}(|w|^{-1/p})$. On a également $h_k(J_k \cap S^{R_\epsilon} \cap S(\epsilon)) \subset J_k$.

LEMME 3. — *Fixons un ϵ suffisamment petit et un $R := R_\epsilon$ suffisamment grand. Si $w_0 \in J_k$ est un point vérifiant $w_0 + c \in S^{R_\epsilon}$ pour tout $c > 0$, alors $w_0 + c \in J_k$ pour tout $c > 0$.*

Preuve. — Soit $\Theta \subset S^R$ un cône fermé de sommet w_0, d'angle $0 < 2\delta < \pi$, dirigé par la demi-droite $\{w_0 + c \text{ avec } c > 0\}$. Soit $C > 0$ une constante vérifiant:

$$|h_k(w) - w - p| < C|w|^{-1/p} \text{ sur } S^R \cap S(\epsilon).$$

On choisit une suite $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ d'entiers positifs vérifiant:

a. $\lim n_j = +\infty$, $\lim \arg(\lambda^{n_j}) = 0$;
b. $\Lambda^{-n_j}(\Theta) \subset S^R \cap S(\epsilon)$ pour tout j;
c. $v_j := |\lambda^{n_j}| > 4CR^{-1/p}p^{-1}\delta^{-1}$ et $0 \leqslant \theta_j := \arg(\lambda^{n_j}) < \min(\epsilon, \delta/4p)$ pour tout j.

Montrons d'abord que pour tout $j \geqslant 1$, on a $\Lambda^{n_j} h_k \Lambda^{-n_j}(\Theta) \subset \Theta$. Soient $s \in \Theta$, $s_1 := \Lambda^{-n_j}(s) = \lambda^{n_j p} s$ et $s_2 := \Lambda^{n_j} h_k \Lambda^{-n_j}(s)$. D'après b., $s_1 \in S^R \cap S(\epsilon)$. Ceci implique que s_2 est bien défini. On a:

$$s_2 = \lambda^{-n_j p} h_k(\lambda^{n_j p} s)$$

et

$$s_2 - s = \lambda^{-n_j p}(p + \gamma_s)$$

avec $|\gamma_s| < C|\lambda|^{-n_j}|s|^{-1/p} < Cv_j^{-1}R^{-1/p}$ car $s \in S^R$.
D'après c., on a:

$$\begin{aligned} |\arg(s_2 - s)| &\leqslant |\arg(\lambda^{-n_j p})| + |\arg(p + iCv_j^{-1}R^{-1/p})| \\ &\leqslant \delta/4 + |\arg(p + ip\delta/4)| \\ &\leqslant \delta/2 \end{aligned}$$

D'où $s_2 \in \Theta$.

On pose m_j la partie entière de $cp^{-1}v_j^p$ et $w_j := [\Lambda^{n_j} h_k \Lambda^{-n_j}]^{m_j}(w_0)$ pour tout $j \geqslant 1$. L'estimation précédente de γ_s nous donne:

$$\begin{aligned} |w_j - w_0 - c| &\leqslant |m_j \lambda^{-n_j p} p - c| + m_j |\lambda|^{-n_j p} C v_j^{-1} R^{-1/p} \\ &\leqslant |m_j v_j^{-p} p \exp(-ip\theta_j) - c| + m_j C v_j^{-(p+1)} R^{-1/p} \\ &\leqslant |m_j v_j^{-p} p \exp(-ip\theta_j) - c\exp(-ip\theta_j)| + \\ &\qquad + |c\exp(-ip\theta_j) - c| + cCp^{-1}R^{-1/p}v_j^{-1} \\ &\leqslant v_j^{-p} p |m_j - cp^{-1}v_j^p| + c|\exp(-ip\theta_j) - 1| + cCp^{-1}R^{-1/p}v_j^{-1} \\ &\leqslant v_j^{-p} p + c|\exp(-ip\theta_j) - 1| + cCp^{-1}R^{-1/p}v_j^{-1} \end{aligned}$$

D'après a., ce dernier terme tend vers 0 quand j tend vers l'infini. Autrement dit, w_j tend vers $w_0 + c$. Comme $w_0 \in J_k$, on a $w_j \in J_k$. Comme J_k est fermé dans S^{r_1}, on a $w_0 + c \in J_k$. $\square$

On choisit un $R' >> R$ de sorte que $w + c \in S^R$ pour tout $c \geqslant 0$ et tout $w \in S' := S(\epsilon) \cap S^{R'}$. Le lemme précédent implique que J est analytiquement laminé dans les $\Psi_k(S')$. En appliquant le lemme précédent aux fonctions f, h^{-1} et à la coordonnée $t' := \sqrt[p]{-1}t$, on déduit que J est analytiquement laminé dans les $\sqrt[p]{-1}\Psi_k(S')$. Lorsque ϵ est suffisamment petit, les ouverts $\Psi_k(S')$ et $\sqrt[p]{-1}\Psi_k(S')$ recouvrent un voisinage de 0 sauf le point 0. Ceci termine la preuve de la proposition 1. $\square$

PROPOSITION 2. — *Soient*

$$f(z) = z + \alpha z^{p+1} + \mathrm{O}(z^{p+2})$$

et

$$g(z) = z + \beta z^{q+1} + \mathrm{O}(z^{q+2})$$

deux fonctions holomorphes définies dans un voisinage U de 0 où $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ et $1 \leqslant p < q$. Soit $J \subset U$ un fermé complètement invariant par f et par g au voisinage de 0. Alors il existe un voisinage $V \subset U$ de 0 tel que J soit analytiquement laminé dans $V \setminus \{0\}$.

Soient $0 \leqslant k \leqslant p - 1$ un entier et $a > 0$ un nombre réel. On définit *les pétales* $\Pi_k(a)$ et $\Pi'_k(a)$ par

$$\Pi_k(a) := \{r \exp(i\theta) :\ 0 < r^p < a(1 + \cos(p\theta)); |2k\pi/p - \theta| < \pi/p\}$$

et

$$\Pi'_k(a) := \{r \exp(i\theta) :\ 0 < r^p < a(1 - \cos(p\theta)); |(2k+1)\pi/p - \theta| < \pi/p\}.$$

Alors pour tout $a > 0$ les pétales $\Pi_k(a)$ et $\Pi'_k(a)$ recouvrent un voisinage de 0 sauf le point 0. Les applications Φ et Ψ_k sont définies dans la preuve de la proposition 1. L'image $\Pi(a)$ de $\Pi_k(a)$ par Φ est indépendante de k:

$$\Pi(a) := \{x + iy :\ y^2 > 1/a^2 - 2x/a\}.$$

D'après [2, 6.5.7], il existe une coordonnée locale t dans laquelle on a:

$$f(t) = t - t^{p+1} + \mathrm{O}(t^{2p+1})$$

et

$$g(t) = t + \gamma t^{q+1} + \mathrm{O}(t^{q+2}).$$

LEMME 4 ([2, pp. 116-122]). — *Soient* $f(t) = t - t^{p+1} + \mathrm{O}(t^{2p+1})$ *une fonction holomorphe définie au voisinage de* 0. *Alors pour tout* k *et tout* $a > 0$ *suffisamment petit:*

1. *l'image de* $\Pi_k(a)$ *par* f *est contenue dans* $\Pi_k(a)$*;*
2. $f^n(w) \to 0$ *localement uniformément sur* $\Pi_k(a)$*;*
3. $\arg f^n(w) \to 2k\pi/p$ *localement uniformément sur* $\Pi_k(a)$*;*
4. *il existe une application holomorphe injective* $u : \Pi(a) \to \Pi(a)$ *telle que* $u(w) - w$ *soit bornée,* $\lim_{|w|\to\infty} u'(w) = 1$ *et telle que* $uvu^{-1} = T$ *sur* $u(\Pi(a))$ *où* $v := \Phi f \Psi_k$ *et* $T(w) := w + p$.

Fixons un a suffisamment petit. Posons $\Pi' := u(\Pi(a))$, $w^{1/p} := \Psi_0(w)$, $l := \Phi g \Psi_k$, $\tau := ulu^{-1}$, $I := \Phi(J \cap \Pi_k(a))$ et $I' := u(I)$. D'après le lemme précédent, pour tout $a' << a$, on a $\Pi(a') \subset \Pi'$. Comme a est petit, τ et τ^{-1} sont définies sur Π'. L'ensemble I' est un fermé *complètement invariant* par T et par τ dans le sens suivant:

$$T^{\pm 1}(I') \cap \Pi' \subset I' \text{ et } \tau^{\pm 1}(I') \cap \Pi' \subset I'.$$

On peut écrire l sous la forme:

$$l(w) = w + \theta w^{-\delta/p} + \mathrm{O}(w^{-(\delta+1)/p})$$

où $\delta := q - p \geqslant 1$ et $\theta \neq 0$.

Selon les propriétés de u et de sa dérivée (*voir* le lemme 4), on a

$$\begin{aligned} \tau(w) &= u\Big(u^{-1}(w) + \theta[u^{-1}(w)]^{-\delta/p} + \mathrm{O}([u^{-1}(w)]^{-(\delta+1)/p})\Big) \\ &= w + [\theta + \mathrm{o}(1)][u^{-1}(w)]^{-\delta/p} + \mathrm{O}(w^{-(\delta+1)/p}) \\ &= w + \theta w^{-\delta/p} + e(w) \end{aligned}$$

où $e(w) = \mathrm{o}(w^{-\delta/p})$.

LEMME 5. — *Pour tout* $w_0 \in I'$ *et tout* $r \in \mathbb{R}$, *si* $w_0 + \theta r$ *appartient à* Π', *il appartient à* I'.

Preuve. — Fixons un r, un $\epsilon > 0$ et un $j \in \mathbb{N}$ vérifiant:

1. $B \subset \Pi'$ où B est la boule fermée de rayon $4|r|(|\theta| + \epsilon)$, de centre $x_0 := w_0 + jp$;
2. $|e(w)| < \epsilon |w|^{-\delta/p}$ pour tout $w \in B$;
3. $|w|^{-\delta/p} < 2(jp)^{-\delta/p}$ pour tout $w \in B$;

4. $|w^{-\delta/p} - (jp)^{-\delta/p}| < 8\delta[|r|(|\theta|+\epsilon)+|w_0|](jp)^{-1-\delta/p}$ pour tout $w \in B$.

La condition 4 est réalisable par le théorème des accroissements finis car la dérivée de la fonction $w^{-\delta/p}$ est égale à $-\delta w^{-1-\delta/p}/p$ et car $|w - jp| \leqslant 4r(|\theta| + \epsilon) + |w_0|$.

Par la suite, on traite le cas où $r > 0$; le cas contraire sera traité de même manière en utilisant la fonction τ^{-1} à la place de τ.

Posons M la partie entière de $(jp)^{\delta/p}r$ et $x_m := \tau^m(x_0)$ pour tout $0 \leqslant m \leqslant M$. On a pour tout $w \in B$:

$$\begin{aligned} |\tau(w) - w| &= |\theta w^{-\delta/p} + e(w)| \\ &\leqslant (|\theta| + \epsilon)|w|^{-\delta/p} \\ &\leqslant 2(|\theta| + \epsilon)(jp)^{-\delta/p} \end{aligned}$$

ce qui implique par récurrence que les x_m sont bien définis et appartiennent à B pour tout $1 \leqslant m \leqslant M$. On a les estimations suivantes:

$$\begin{aligned} |x_{m+1} - x_m - \theta(jp)^{-\delta/p}| &= |\theta x_m^{-\delta/p} - \theta(jp)^{-\delta/p} + e(x_m)| \\ &\leqslant |\theta x_m^{-\delta/p} - \theta(jp)^{-\delta/p}| + |e(x_m)| \\ &\leqslant |\theta||x_m^{-\delta/p} - (jp)^{-\delta/p}| + \epsilon|x_m|^{-\delta/p} \\ &\leqslant \{8\delta|\theta|[r(|\theta| + \epsilon) + |w_0|](jp)^{-1} + 2\epsilon\}(jp)^{-\delta/p}. \end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned} |x_M - w_0 - jp - M\theta(jp)^{-\delta/p}| &= \\ &= |x_M - x_0 - M\theta(jp)^{-\delta/p}| \\ &\leqslant \sum_{m=0}^{M-1} |x_{m+1} - x_m - \theta(jp)^{-\delta/p}| \\ &\leqslant \{8\delta|\theta|[r(|\theta| + \epsilon) + |w_0|](jp)^{-1} + 2\epsilon\}(jp)^{-\delta/p}M \\ &\leqslant \{8\delta|\theta|[r(|\theta| + \epsilon) + |w_0|](jp)^{-1} + 2\epsilon\}r \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |x_M - w_0 - jp - \theta r| &\leqslant |x_M - w_0 - jp - M\theta(jp)^{-\delta/p}| + |\theta r - M\theta(jp)^{-\delta/p}| \\ &\leqslant \{8\delta|\theta|[r(|\theta| + \epsilon) + |w_0|](jp)^{-1} + 2\epsilon\}r + \\ &\qquad + |\theta|(jp)^{-\delta/p}|(jp)^{\delta/p}r - M| \\ &\leqslant \{8\delta|\theta|[r(|\theta| + \epsilon) + |w_0|](jp)^{-1} + 2\epsilon\}r + |\theta|(jp)^{-\delta/p}. \end{aligned}$$

Comme $w_0 \in I'$, on a $x_0 \in I'$ et donc $x_M \in I'$ car I' est invariant par T et par $\tau^{\pm 1}$. Pour j tendant vers l'infini et ϵ tendant vers 0, $x_M - jp$ tend vers

$w_0 + \theta r$. Pour j grand et ϵ petit $x_M - jp \in I'$ car I' est invariant par T^{-1}. La fermeture de I' implique que $w_0 + \theta r \in I'$. □

D'après le lemme 5, I' est analytiquement laminé en w_0. Par conséquent, J est analytiquement laminé dans les $\Pi_k(a')$ pour a' suffisamment petit. Maintenant, on remplace f par f^{-1} et la coordonnée t par $\sqrt[p]{-1}t$. Ces remplacements ne changent pas les formes de f, g et permutent les deux familles de pétales $\{\Pi_k(a')\}$ et $\{\Pi'_k(a')\}$. On en déduit que J est analytiquement laminé dans les $\Pi'_k(a)$. Ceci termine la preuve de la proposition 2 car les $\Pi_k(a')$ et $\Pi'_k(a')$ recouvrent un voisinage de 0 sauf le point 0.

COROLLAIRE 1.— *Soient f, g deux fonctions holomorphes inversibles définies dans un voisinage U de 0 avec $f(0) = g(0) = 0$ et $J \subset U$ un fermé complètement invariant par f et par g au voisinage de 0. Supposons que le cône tangent de J en 0 n'est pas égal à $\mathbb{C}$. Alors l'une des conditions suivantes est vraie:*

1. *il existe un voisinage V de 0 tel que J soit analytiquement laminé dans $V \setminus \{0\}$;*
2. *il existe $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 - (0, 0)$ tel que $f^m = g^n$.*

Preuve.— Supposons que la condition 2 est fausse. D'après la proposition 1, il suffit de traiter le cas où $|f'(0)| = |g'(0)| = 1$. Si 0 n'est pas un point d'accumulation de J, la condition 1 est vraie. Supposons que ce n'est pas le cas. Comme le cône tangent de J en 0 n'est ni vide ni égal à $\mathbb{C}$ et comme cet ensemble J est invariant par f et par g, $f'(0)$ et $g'(0)$ sont des racines de l'unité. Quitte à remplacer f, g par leurs itérés, on peut supposer que $f'(0) = g'(0) = 1$. On écrit:

$$f(z) = z + \alpha z^{p+1} + \mathrm{O}(z^{p+2})$$

et

$$g(z) = z + \beta z^{q+1} + \mathrm{O}(z^{q+2})$$

où $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$ sont des entiers. Sans perdre en généralité, on peut supposer que $p \leqslant q$. En changeant la coordonnée, on peut supposer que $\alpha = -1$. D'après la proposition 2, il nous reste à traiter le cas où $p = q$.

Cas 1.— Supposons que $\beta \in \mathbb{Q}$. Quitte à remplacer g par son itéré, on peut supposer que $\beta \in \mathbb{Z}$. Posons $h := gf^\beta$. Comme la condition 2 est fausse, h s'écrit sous la forme:

$$h(z) = z + \beta' z^{q'+1} + \mathrm{O}(z^{q'+2})$$

avec $\beta' \neq 0$ et $q' > p$.

En appliquant la proposition 2 aux fonctions f, h et à l'ensemble J, on constate que la condition 1 est vraie.

Cas 2. — Supposons maintenant que $\beta \notin \mathbb{Q}$. On utilise les notations de la preuve de la proposition 2. On a:

$$f(t) = t - t^{p+1} + O(t^{2p+1})$$

$$g(t) = t + \beta t^{p+1} + O(t^{p+2})$$

et

$$\tau(w) = w - \beta p + O(w^{-1/p}).$$

LEMME 6. — *Soit w_0 un point de I'.*

1. *Pour tous m, $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant $w_0 + mp + np\beta \in \Pi'$, on a $w_0 + mp + np\beta \in I'$.*
2. *Pour tout $r \in \mathbb{R}$ vérifiant $w_0 + r \in \Pi'$, on a $w_0 + r \in I'$.*

Preuve. — 1. Fixons un $\epsilon > 0$. Choisissons un entier s suffisamment grand vérifiant:

1. $\Pi'' := \{w : \operatorname{Re} w \geqslant sp - |w_0| - |m|p - |n|p - \epsilon\} \subset \Pi'$;
2. $|\tau^{\pm 1}(w) - w \pm p\beta| < \epsilon/|n|$ pour tout $w \in \Pi''$.

Posons $x_0 := w_0 + sp + mp$ et $x_\nu := \tau^{-\mathrm{sign}(n)}(x_{\nu-1})$ pour $\nu = 1, \ldots, |n|$ où $\mathrm{sign}(n)$ est le signe de n. Les x_ν sont bien définis et appartiennent à Π'' car pour tout $1 \leqslant \nu \leqslant |m|$:

$$|s_\nu - s_{\nu-1} - \mathrm{sign}(n)p\beta| = |\tau^{-\mathrm{sign}(n)}(s_{\nu-1}) - s_{\nu-1} - \mathrm{sign}(n)p\beta| \leqslant \epsilon/|n|$$

et

$$\begin{aligned} |s_\nu - w_0 - sp - mp - \mathrm{sign}(n)\nu p\beta| &= |s_\nu - s_0 - \mathrm{sign}(n)\nu p\beta| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\nu} |s_k - s_{k-1} - \mathrm{sign}(n)p\beta| \\ &\leqslant \nu\epsilon/|n|. \end{aligned}$$

Les inégalités précédentes nous donnent:

$$|s_{|n|} - w_0 - sp - mp - np\beta| \leqslant \epsilon.$$

On sait que $w_0 \in I'$, I' est complètement invariant par T et par τ. Donc $s_{|n|} \in I'$. Comme I' est fermé, on a $w_0 + sp + mp + np\beta \in I'$ car c'est la limite de $s_{|n|}$ quand $\epsilon \longrightarrow 0$. L'invariance de I' par T^{-1} implique que $w_0 + mp + np\beta \in I'$.

2. Par hypothèse, le cône tangent de J en 0 n'est pas égal à $\mathbb{C}$. Notons $\tilde{J}$ l'ensemble des points de J du type $\Phi^{-1}u^{-1}(w_0 + mp + np\beta)$ avec $w_0 + mp + np\beta \in I'$. Si $\beta \notin \mathbb{R}$, on vérifie facilement que le cône tangent de $\tilde{J}$ en 0 est égal à $\mathbb{C}$. En effet, les points du réseaux $\{w_0+mp+np\beta\} \cap \Pi'$ tendent vers l'infini dans toutes les directions. Ceci est impossible. Alors β est réel. Comme $\beta \notin \mathbb{Q}$, l'ensemble des points $w_0+mp+np\beta$ est dense dans la droite $w_0 + \mathbb{R}$. D'après 1., $w_0 + r \in I'$ car I' est fermé. □

Le lemme précédent implique que J est analytiquement laminé dans les $\Pi_k(a')$ pour $a' > 0$ suffisamment petit. Comme dans la proposition 2, on remplace f par f^{-1}, g par g^{-1} et la coordonnée t par $\sqrt[\nu]{-1}t$. Ces remplacements ne changent pas les formes de f, g et permutent les deux familles de pétales $\{\Pi_k(a')\}$ et $\{\Pi'_k(a')\}$. On en déduit que I est analytiquement laminé dans les $\Pi'_k(a')$. Ainsi, ceci termine la preuve du corollaire. □

LEMME 7.— *Soit f une fonction rationnelle de degré supérieur ou égal à 2.*

i. Si le cône tangent de J_f en un point périodique répulsif z_0 est une réunion finie de demi-droites, J_f est contenu dans une courbe ou dans un arc réel analytique fermé. De plus, le cône tangent de J_f en tout point est une droite ou une demi-droite.

ii. Si dans un ouvert U de $\mathbb{P}^1$, $J_f \cap U$ est un arc réel de classe C^1, alors J_f est un cercle ou un arc d'un cercle pour une certaine coordonnée.

Preuve. — i. Quitte à remplacer f par l'un de ses itérés, on peut supposer que z_0 est un point fixe. On peut également supposer que $z_0 = 0$. Soient φ l'application de Poincaré de f en 0 et $\lambda := f'(0)$. On a $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ et $\varphi^{-1}f\varphi(t) = \lambda t$ au voisinage de 0. Cette application φ se prolonge en une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{P}^1$ par $\varphi(\lambda^n z) := f^n(\varphi(z))$ car $|\lambda| > 1$. Posons $I := \varphi^{-1}(J_f)$. Alors le cône tangent de I en 0 est une réunion finie de demi-droites. Comme J_f est invariant par f^{-1}, I est invariant par $t \longmapsto \lambda^{-1}t$. Par conséquent, λ est une racine d'un nombre réel et I est contenu dans une réunion finie de demi-droites partant de 0. Comme J_f est répulsif, on peut trouver un $z \neq 0$ suffisamment proche de 0 et un $n \in \mathbb{N}$ tels que $f^n(z) = 0$. Comme z est suffisamment proche de 0, il existe $x \in \mathbb{C}$ vérifiant $\varphi(x) = z$ car l'image de φ contient un voisinage de 0. Posons $y := \lambda^n x$. On a:

$$\varphi(y) = \varphi(\lambda^n x) = f^n(\varphi(x)) = f^n(z) = 0.$$

Comme le cône tangent de I en y est une droite ou une demi-droite, le cône tangent de J_f (et donc de I) en 0 est aussi une droite ou une demi-droite. Par conséquent, I est contenu dans une demi-droite ou dans une droite. Notons $\mathcal{D}$ cette demi-droite ou droite. Il suffit maintenant de montrer que $J_f \subset \varphi([0,y])$. Soit V un voisinage suffisamment petit de 0. Notons V_0 (resp. V_y) la composante connexe de $\varphi^{-1}(V)$ qui contient 0 (resp. y). Notons également $\mathcal{D}_0 := \mathcal{D} \cap V_0$, $\mathcal{D}_y := \mathcal{D} \cap V_y$ et φ_0 (resp. φ_y) la restriction de φ sur V_0 (resp. V_y). Alors $\varphi(\mathcal{D}_0)$ et $\varphi(\mathcal{D}_y)$ sont des courbes ou arcs réels analytiques. On souligne ici que $\varphi(\mathcal{D}_y)$ peut être un arc quand y est un point critique de φ. Comme $I \subset \mathcal{D}$ et comme $I = \varphi^{-1}(J_f)$, on a $I \cap \mathcal{D}_0 = \varphi_0^{-1}(J_f \cap V)$ et $I \cap \mathcal{D}_y = \varphi_y^{-1}(J_f \cap V)$. Alors l'intersection de $\varphi(\mathcal{D}_0)$ et $\varphi(\mathcal{D}_y)$ contient un ensemble non dénombrable $J_f \cap V$.

Si $\varphi(\mathcal{D}_0)$ est une courbe ou si $\varphi(\mathcal{D}_y)$ est un arc, on a $\varphi(\mathcal{D}_y) \subset \varphi(\mathcal{D}_0)$. Par prolongement analytique, on a $\varphi(\mathcal{D}) = \varphi([0,y])$.

Si $\varphi(\mathcal{D}_0)$ est un arc et si $\varphi(\mathcal{D}_y)$ est une courbe, alors $\mathcal{D}$ est une demi-droite. Notons $\mathcal{D}'$ la droite qui contient $\mathcal{D}$, $d_0 := \overline{\mathcal{D}' \setminus \mathcal{D}}$ et $d_y := \overline{\mathcal{D} \setminus [0,y]}$. Si $\varphi(\mathcal{D}_0) = \varphi(d_y \cap V_y)$, alors $\varphi(d_0 \cap V_0) = \varphi([0,y] \cap V_y)$. Par prolongement analytique, on a $\varphi(\mathcal{D}') = \varphi([0,y])$. Sinon, on a $\varphi(d_y \cap V_y) = \varphi(d_0 \cap V_0)$. Par prolongement analytique, on a $\varphi(d_y) = \varphi(d_0)$. Comme $I \cap d_0 = \emptyset$, on a $I \cap d_y = \emptyset$. C'est impossible car d_y contient une infinité de points du type $\lambda^n y$.

Dans tous les cas, J_f est contenu dans la courbe ou l'arc réel analytique $\varphi(\mathcal{D}) = \varphi([0,y])$. Si $z \in J_f$, le cône tangent de J_f en z est une droite ou une demi-droite car le cône tangent de $I = \varphi^{-1}(J)$ en tout point est une droite ou une demi-droite.

ii. Comme l'ensemble des points périodiques répulsifs de f est dense dans J_f, il existe un point $z_0 \in J_f \cap U$ périodique répulsif. D'après i., I est contenu dans une droite réelle d. Comme J_f contient un arc réel passant par 0, I contient un voisinage de 0 dans d. D'autre part, I est invariant par $t \longmapsto \lambda t$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| > 1$. On en déduit que I est égal à d. Comme dans i., on montre que $J_f = \varphi([0,y])$ qui est une courbe ou un arc réel analytique fermé. Cette courbe ou arc est lisse car $I = \varphi^{-1}(J_f)$ est lisse. D'après un théorème de Fatou [14, pp.126-127], J_f est un cercle ou un arc d'un cercle pour une certaine coordonnée. □

PROPOSITION 3. — *Soient f vérifiant l'hypothèse du théorème 1 et z_0 un point de J_f. Supposons que J_f n'est pas contenu dans une courbe ou dans un arc réel analytique fermé et que le cône tangent de J_f en z_0 est réunion finie de demi-droites. Alors z_0 est prépériodique indifférent rationnel.*

Remarque 1. — Dans [1], Baker et Eremenko ont démontré que z_0 est prépériodique lorsque le cône tangent de J_f en z_0 est une demi-droite et

$\mathcal{C}_f \cap J_f = \emptyset$. Dans ce cas, l'hypothèse "J_f n'est pas contenu dans une courbe ou un arc réel analytique" n'est pas nécessaire. Le résultat de Baker et Eremenko reste valable sous l'hypothèse de la proposition précédente. La preuve dans [1] dont l'idée principale avait été utilisée dans [8, 5], est essentiellement valable pour cette proposition.

Preuve. — La classification des domaines de Fatou en cinq types par Sullivan [2], tout point $z \in J_f$ d'accumulation de la suite $\{f^n(c)\}_{n\geqslant 0}$ est périodique indifférent rationnel pour tout $c \in F_f$ et en particulier pour $c \in \mathcal{C}_f \cap F_f$. Notons A l'ensemble des points périodiques indifférents rationnels de f et B (resp. C) l'ensemble des points (resp. des points périodiques) du type $f^n(c)$ avec $c \in \mathcal{C}_f \cap J$. Ces ensembles sont finis. Quitte à remplacer f par un f^m, on peut supposer que tous les points de $A \cup C$ sont fixes. Soit $M >> 0$ tel que $|f'(a)| < M$ pour tout $a \in A \cup C$.

Supposons que z_0 n'est pas prépériodique. Alors les $f^n(z_0)$ sont tous différents. Il existe une suite $\{n_\nu\}$ tendant vers l'infini et un $a \in J_f$ tels que $\lim_{\nu\to\infty} f^{n_\nu}(z_0) = a$. Montrons qu'on peut choisir $a \notin A \cup B$. Supposons que ce n'est pas le cas. Alors on a $a \in A \cup B$. Quitte à remplacer n_ν par $n_\nu + n$ pour $n >> 0$, on peut supposer que $a \in A \cup C$. On choisit, un disque $D(r)$ de centre a et de rayon $r > 0$ suffisamment petit. On a $|z - a| < |f(z) - a| < 2M|z - a|$ pour tout $z \in J_f \cap D(r)$. En effet, la deuxième inégalité est évidente, la première pour a répulsif l'est aussi, si a est indifférent rationnel, ceci est énoncé dans [8, §31]. Par conséquent, la couronne $D(r) \setminus \overline{D(r/2M)}$ contient une infinité de $f^n(z_0)$. C'est une contradiction car pour r petit cette couronne ne rencontre pas $A \cup B$.

Donc a n'est pas un point d'accumulation à la suite des ensembles $f^n(\mathcal{C}_f)$. D'après un théorème de Fatou [14, p.126], J_f est contenu dans une courbe ou un arc réel analytique. C'est une contradiction.

Alors z_0 est un point prépériodique. Il existe $n < m$ tels que $f^n(z_0) = f^m(z_0)$. Le point $a := f^n(z_0)$ est un point périodique de f. D'après le lemme 7, z_0 est indifférent car J_f n'est pas contenu dans une courbe ou dans un arc réel analytique. C'est un point indifférent rationnel car le cône tangent de J_f en 0 est une réunion finie de demi-droites. □

Preuve du théorème 1. — Comme le cône tangent de J_f en un de ses points est une réunion de demi-droites, J_f est d'intérieur vide. Supposons que la condition 1 de ce théorème est fausse. D'après le lemme 7, J_f n'est pas une courbe ou un arc réel analytique. Lorsque J_f n'est pas contenu dans une courbe ou dans un arc réel analytique fermé, notons E l'ensemble des points z_0 où le cône tangent de J_f est une réunion finie de demi-droites. Lorsque J_f est contenu dans une courbe ou un arc réel analytique, notons

E l'ensemble des points z_0 où le cône tangent de J_f est une demi-droite. D'après la proposition 3 (pour le premier cas) et la remarque 1 (pour le second cas), tout point de E est prépériodique. Il est clair que $f(E) \subset E$ et $g(E) \subset E$. Par hypothèse, E est non vide. Notons A l'ensemble des points $z \in E$ périodiques pour f. C'est un ensemble non vide.

LEMME 8.— *L'ensemble A est fini.*

Preuve.— Si J_f n'est pas contenu dans une courbe ou dans un arc réel analytique fermé, d'après la proposition précédente A est fini.

Supposons maintenant que J_f est contenu dans une courbe ou dans un arc réel analytique fermé. D'après le lemme 7(ii), J_f est un fermé totalement disconnexe de $L := \varphi(\mathcal{D})$ qui est une courbe ou un arc réel analytique fermé (*voir* la preuve du lemme 7(ii)). Notons $]a_s, b_s[$ les composantes connexes de $L \setminus J_f$. Alors E est l'ensemble des a_s, b_s avec les sommets de L et l'ensemble de Fatou F_f est connexe. On a $f(L \setminus J_f) \subset L \setminus J_f$. Les composantes $]a_s, b_s[$ sont prépériodiques car les sommets a_s et b_s sont prépériodiques.

Si F_f est le domaine d'attraction d'un point fixe attractif, il est clair que $f^n(]a_s, b_s[)$ passe par le point attractif pour tout s et pour tout n suffisamment grand. Il n'y a qu'un nombre fini de $]a_s, b_s[$ qui passent par ce point attractif. Par conséquent, A est fini.

Sinon f possède un point fixe indifférent rationnel a. Dans ce cas, $|f(z - a)| > |z - a|$ pour $z \in J_f$ proche de a et $f^n(K)$ tend vers a pour tout compact K de $]a_s, b_s[$. On en déduit que a est le sommet de $f^n(]a_s, b_s[)$ pour tout s et pour tout n suffisamment grand. Il y a au plus un $]a_s, b_s[$ qui possèdent a comme sommet. Par conséquent, A est fini. $\square$

Pour tout $a \in A$, il existe $n_a \in \mathbb{N}$ tel que $f^{n_a}(a) \in A$. Comme A est fini, il existe $z_0 \in A$ et $n_1, \ldots, n_s$ tels que $f^{n_1} g f^{n_2} g \ldots f^{n_s} g(z_0) = z_0$. Posons $h := f^{n_1} g f^{n_2} g \ldots f^{n_s} g$. Quitte à changer de coordonnée, on peut supposer que $z_0 = 0$. Supposons que la condition 2 du théorème 1 est fausse. D'après le corollaire 1 (appliquée à f, h et J_f), l'ensemble J_f est analytiquement laminé dans $V \setminus \{0\}$ où V est un voisinage de 0. Selon les preuves des lemmes 3, 5 et 6, pour tout $z \in V \setminus \{0\}$, J_f contient un arc réel analytique joignant z et 0. Soient $z \in V \setminus \{0\}$ et $n > 0$ tels que $f^n(z) = 0$. Alors $f^n(J_f \cap V_z) \subset J_f$ pour tout voisinage V_z de z. De plus, lorsque V_z est petit, $J_f \cap V_z$ est analytiquement laminé. Les descriptions ci-dessus de J_f au voisinage de 0 montrent que J_f est une réunion finie d'arcs réels analytiques. D'après le lemme 7, J_f est un cercle ou un arc d'un cercle. C'est une contradiction car la condition 1 du théorème 1 est supposée fausse.

Bibliographie

[1] BAKER (I.N.) and EREMENKO (A.E.). — A problem on Julia sets, *Ann. Acd. Sci. Fenn.*, series A, **12** (1987), 229-236.

[2] BEARDON (A.F.). — Iteration of Rational Functions, Graduate Texts in Math., **132** (1991), Springer-Verlag.

[3] BERGWEILER (W.). — Iteration of meromorphic functions, *Bull. A.M.S.*, **29:2** (1993), 151-188.

[4] BRIEND (J.Y.) et DUVAL (J.). — Exposants de Liapunoff et points périodiques d'endomorphismes holomorphes de $\mathbb{CP}^k$, Acta Math., 182 (1999), 143-157.

[5] BROLIN (H.). — Invariant sets under iteration of rational functions, *Ark. Mat.* **6** (1965), 103-144.

[6] EREMENKO (A.E.). — On somme functional equations connected with iteration of rational function, *Leningrad. Math. J.*, **1** (1990), No. 4, 905-919.

[7] FATOU (P.). — Sur l'itération analytique et les substitutions permutables, *Journ. de Math.*, **2** (1923), 343-384.

[8] FATOU (P.). — Sur les équations fonctionnelles *Bull. Soc. Math. France* **47**(1919), 161-271, **48** (1920), 33-94, 208-314.

[9] HU (P.C.), YANG (C.C.). — Dynamics of composite mappings, *Proc. Japan Acad.*, **74** (1998), serie A, 146-148.

[10] JULIA (G.). — Mémoire sur la permutabilité des fractions rationnelles, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **39** (1922), 131-215.

[11] LEVIN (G.), PRZYTYCKI (F.). — When do two functions have the same Julia set?, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125** (1997), no. 7, 2179-2190.

[12] RITT (J.F.). — Permutable rational functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **25** (1923), 399-448.

[13] SCHMIDT (W.), STEINMETZ (N.). — The polynomials associated with a Julia set, *Bull. London Math. Soc.*, **27** (1995), no. 3, 239-241.

[14] STEINMETZ (N.). — Rational Iteration, *Grutyer Studies in Math.*, **16** (1993).