

SOPHIE DION

**Théorème de Brownawell-Waldschmidt
en caractéristique finie**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 9, n^o 1
(2000), p. 71-90

http://www.numdam.org/item?id=AFST_2000_6_9_1_71_0

© Université Paul Sabatier, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Théorème de Brownawell-Waldschmidt en caractéristique finie (*)

SOPHIE DION ⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — Le théorème de Brownawell-Waldschmidt donne un résultat d'indépendance algébrique concernant des nombres complexes et leurs exponentielles. Une conséquence remarquable est la réponse au huitième problème de Schneider, à savoir que e^e ou e^{e^2} est transcendant sur \mathbb{Q} . Soit $k = \mathbb{F}_q(T)$, k_∞ son complété pour la valuation $1/T$ -adique, \bar{k}_∞ la clôture algébrique de k_∞ , que l'on complète à nouveau pour obtenir \mathcal{C} . On montre l'analogie de ce théorème dans le cadre de la caractéristique finie où k , k_∞ et \mathcal{C} jouent respectivement le rôle de \mathbb{Q} , \mathbb{R} et \mathbb{C} .

ABSTRACT. — The Brownawell-Waldschmidt's theorem shows a result of algebraic independence of complex numbers and their exponentials. A remarkable consequence is the solution to the eighth Schneider's problem, namely the transcendence either of e^e or of e^{e^2} over \mathbb{Q} . Let $k = \mathbb{F}_q(T)$, k_∞ be its completion with respect to $1/T$, and let \bar{k}_∞ be the algebraic closure of k_∞ , and \mathcal{C} the completion of \bar{k}_∞ . We prove the analogue of this theorem in the finite characteristic field where k , k_∞ and \mathcal{C} replace respectively \mathbb{Q} , \mathbb{R} and \mathbb{C} .

1. Introduction

Soit p un nombre premier et q une puissance de p . On désigne par $A = \mathbb{F}_q[T]$ l'anneau des polynômes à une variable à coefficients dans \mathbb{F}_q , par $k = \mathbb{F}_q(T)$ son corps des fractions, par $k_\infty = \mathbb{F}_q((1/T))$ le complété de k pour la valuation $1/T$ -adique que l'on prolonge à une clôture algébrique \bar{k}

(*) Reçu le 16 avril 1999, accepté le 4 mai 2000

(1) Université des sciences et technologies de Lille, UFR de mathématiques, 59655 Villeneuve d'Ascq.
e-mail: Sophie.Dion@agat.univ-lille1.fr

(resp. \bar{k}_∞) de k (resp. de k_∞). On note $\mathcal{C} = \hat{\bar{k}}_\infty$ le complété de \bar{k}_∞ . On sait alors que \mathcal{C} est algébriquement clos. La valuation précédente se prolonge à \mathcal{C} et la valeur absolue d'un élément de \mathcal{C} est définie de la manière suivante :

$$\forall \alpha \in \mathcal{C}, |\alpha| = q^{-v(\alpha)} = q^{\deg(\alpha)} \text{ avec } \deg(0) = -\infty.$$

Par T -module de dimension n , de degré d défini sur un sous-corps L de \mathcal{C} , on entend la donnée d'un couple (\mathbb{G}_a^n, ϕ) , où \mathbb{G}_a^n désigne le groupe additif de dimension n et $\phi: A \rightarrow L\{\tau\}$ un homomorphisme injectif d'anneaux tel que :

$$\phi(T) = a_0\tau^0 + a_1\tau^1 + \dots + a_d\tau^d$$

où $L\{\tau\}$ est l'algèbre de Ore et les a_i sont dans $\mathcal{M}_n(L)$ avec $a_d \neq 0$ et T est la seule valeur propre de a_0 et où τ est l'endomorphisme de Fröbenius relatif à q sur \mathbb{G}_a^n . Un sous- T -module H de (\mathbb{G}_a^n, ϕ) sera un sous-groupe algébrique connexe de \mathbb{G}_a^n vérifiant $\phi(T)(H) \subset H$. Un T -module est dit simple s'il ne possède pas de sous- T -module non trivial. Un module de Drinfeld est un T -module de dimension 1; dans ce cas, au lieu de degré du module, on parlera de rang du module.

On considère donc φ un module de Drinfeld de rang $d \geq 1$ défini sur \bar{k} .

$$\varphi(T) = T\tau^0 + \varphi_1(T)\tau + \dots + \varphi_d(T)\tau^d.$$

Il existe alors une unique fonction exponentielle e caractérisée par :

$$e'(0) = 1 \text{ et } \forall a \in A, e(az) = \varphi(a)e(z).$$

Le noyau de cette exponentielle est un A -module libre de rang d , c'est le réseau des périodes noté Λ . On notera R_Λ l'anneau des multiplications de Λ défini par :

$$R_\Lambda = \{\gamma \in \mathcal{C} \mid \gamma\Lambda \subset \Lambda\}.$$

C'est un A -module libre auquel on peut prolonger φ . Le corps des fractions de R_Λ sera noté k_Λ ; c'est une extension finie de k , de degré au plus d . Pour $\gamma \in R_\Lambda$, on écrit

$$\varphi(\gamma) = \sum_{i=0}^{n_\gamma} \varphi_i(\gamma)\tau^i.$$

On remarque que lorsque γ parcourt R_Λ , les coefficients $\varphi_i(\gamma)$ de $\varphi(\gamma)$ restent dans une extension finie de k .

Des résultats concernant les petits degrés de transcendance des extensions de \mathbb{Q} ont été réécrits en caractéristique finie. Certains cas de degré de transcendance au moins 2 (énumérés par R. Tubbs dans [10] et [11]) ont

été démontrés en caractéristique positive, notamment par L. Denis dans [5], [6] et [7] et par A. Thiery dans [8]. Notre but est d'obtenir l'analogue du théorème suivant prouvé indépendamment par W.D. Brownawell [3] et M. Waldschmidt [12] en 1971 :

THÉORÈME. — *Soient x_1 et x_2 (respectivement y_1 et y_2) des nombres complexes linéairement indépendants sur \mathbb{Q} tels que $e^{x_1 y_2}$ et $e^{x_2 y_2}$ sont algébriques sur \mathbb{Q} , alors deux au moins des nombres*

$$x_1, x_2, y_1, y_2, e^{x_1 y_1}, e^{x_2 y_1}$$

sont algébriquement indépendants.

On se propose donc, de montrer un résultat analogue en caractéristique finie, concernant toute fonction exponentielle définie comme précédemment :

THÉORÈME 1. — *Soient $x_1, \dots, x_\mu \in \mathbb{C}$, k_Λ -linéairement indépendants, soient de même $y_1, \dots, y_\nu \in \mathbb{C}$, k -linéairement indépendants. On suppose que pour $i = 1, \dots, \mu$, $e(x_i y_\nu)$ est algébrique sur k .*

Si $\nu\mu \geq \nu + d\mu$ alors deux au moins des nombres $x_i, y_j, e(x_i y_j)$ (pour $i = 1, \dots, \mu$ et $j = 1, \dots, \nu$) sont algébriquement indépendants sur k .

On commencera, au paragraphe 2, par citer quelques lemmes utiles à la démonstration du théorème 1, que l'on développera en troisième partie. Enfin, on en donnera quelques conséquences.

2. Énoncés des lemmes

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ algébrique de degré δ_0 sur k , entier sur A , θ_1 un élément de \mathbb{C} transcendant sur $k(\alpha)$ et $\theta_2 \in \mathbb{C}$ algébrique de degré δ sur $k[\alpha](\theta_1)$, entier sur $A[\alpha, \theta_1]$. Alors un élément x de $B = A[\alpha, \theta_1, \theta_2]$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$x = \sum_{\substack{i \in \mathbb{N}^4 \\ 0 \leq i_2 \leq \delta_0 - 1 \\ 0 \leq i_4 \leq \delta - 1}} a_i T^{i_1} \alpha^{i_2} \theta_1^{i_3} \theta_2^{i_4} = P(T, \alpha, \theta_1, \theta_2)$$

où $P \in \mathbb{F}_q[X_1, X_2, X_3, X_4]$. Pour une telle écriture de x , on note :

$$\begin{aligned} \deg_T(x) &= \deg_{X_1}(P) \\ \deg_{\theta_1}(x) &= \deg_{X_3}(P) \end{aligned}$$

PROPRIÉTÉS 1. — Ces degrés vérifient les quelques propriétés suivantes :

1) Soient x et y dans B , alors on a :

$$\begin{aligned} \deg_T(x + y) &\leq \max\{\deg_T(x), \deg_T(y)\} \\ \deg_{\theta_1}(x + y) &\leq \max\{\deg_{\theta_1}(x), \deg_{\theta_1}(y)\} \end{aligned}$$

2) Pour tout $x \in A[\theta_1]$, et tout $y \in B$:

$$\begin{aligned} \deg_T(xy) &= \deg_T(x) + \deg_T(y) \\ \deg_{\theta_1}(xy) &= \deg_{\theta_1}(x) + \deg_{\theta_1}(y) \end{aligned}$$

3) Il existe $C_0 \in \mathbb{R}$ (respectivement $C'_0 \in \mathbb{R}$) ne dépendant que de α et θ_2 (respectivement α, θ_1 et θ_2) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$:

$$\begin{aligned} \deg_T(x_1 x_2 \cdots x_n) &\leq \deg_T(x_1) + \deg_T(x_2) + \cdots + \deg_T(x_n) + C_0(n - 1) \\ \deg_{\theta_1}(x_1 x_2 \cdots x_n) &\leq \deg_{\theta_1}(x_1) + \deg_{\theta_1}(x_2) + \cdots + \deg_{\theta_1}(x_n) + C'_0(n - 1) \end{aligned}$$

Preuve. — 1) et 2) sont évidents.

On montre l'assertion 3) tout d'abord pour le produit de deux éléments de B . Soient x et y dans B :

$$x = \sum_{\substack{i \in \mathbb{N}^2 \\ 0 \leq i_1 \leq \delta_0 - 1 \\ 0 \leq i_2 \leq \delta - 1}} x_i \alpha^{i_1} \theta_2^{i_2} \quad \text{et} \quad y = \sum_{\substack{j \in \mathbb{N}^2 \\ 0 \leq j_1 \leq \delta_0 - 1 \\ 0 \leq j_2 \leq \delta - 1}} y_j \alpha^{j_1} \theta_2^{j_2}$$

où les x_i et les y_j sont dans $A[\theta_1]$. Alors :

$$xy = \sum_{\substack{i, j \in \mathbb{N}^2 \\ 0 \leq i_1, j_1 \leq \delta_0 - 1 \\ 0 \leq i_2, j_2 \leq \delta - 1}} x_i y_j \alpha^{i_1 + j_1} \theta_2^{i_2 + j_2}.$$

On pose $C_0 = \max_{\substack{0 \leq i_1 \leq 2(\delta_0 - 1) \\ 0 \leq i_2 \leq 2(\delta - 1)}} \{\deg_T(\alpha^{i_1} \theta_2^{i_2})\}$ et $C'_0 = \max_{\substack{0 \leq i_1 \leq 2(\delta_0 - 1) \\ 0 \leq i_2 \leq 2(\delta - 1)}} \{\deg_{\theta_1}(\alpha^{i_1} \theta_2^{i_2})\}$.

Alors :

$$\begin{aligned} \deg_T(xy) &\leq \deg_T(x) + \deg_T(y) + C_0, \\ \deg_{\theta_1}(xy) &\leq \deg_{\theta_1}(x) + \deg_{\theta_1}(y) + C'_0. \end{aligned}$$

Par récurrence, on a facilement le résultat annoncé pour le produit de n éléments de B . \square

Théorème de Brownawell-Waldschmidt en caractéristique finie

Avec ces notations, on a le lemme de Siegel suivant :

LEMME 1. — Soient n et m deux entiers tels que $n > \delta_0 \delta m$, des réels $M_1 > 0$ et $M_2 > 0$. On se donne des $(a_{i,j})_{\{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}}$ éléments de B tels que $\deg_T(a_{i,j}) < M_1$, $\deg_{\theta_1}(a_{i,j}) < M_2$. Alors il existe $x_i \in A[\theta_1]$ pour $i = 1, \dots, n$ non tous nuls tels que :

$$\forall j \in \{1, \dots, m\} \quad \sum_{i=1}^n a_{i,j} x_i = 0,$$

$$\deg_T(x_i) \leq \frac{\sqrt{\delta_0 \delta m}}{\sqrt{n} - \sqrt{\delta_0 \delta m}} M_1 + 1,$$

$$\deg_{\theta_1}(x_i) \leq \frac{\sqrt{\delta_0 \delta m}}{\sqrt{n} - \sqrt{\delta_0 \delta m}} M_2 + 1.$$

Preuve. — On considère l'ensemble suivant :

$$E = \{(x_1, \dots, x_n) \in (A[\theta_1])^n \mid \deg_T(x_i) \leq X, \deg_{\theta_1}(x_i) \leq Y\}.$$

On a $\text{card } E = q^{n(X+1)(Y+1)}$. D'autre part, si

$$F = \{(y_1, \dots, y_m) \in B^m \mid \deg_T(y_i) \leq X + M_1, \deg_{\theta_1}(y_i) \leq Y + M_2\},$$

alors $\text{card } F = q^{m\delta_0\delta(X+M_1+1)(Y+M_2+1)}$. On considère l'application linéaire de E dans F définie par :

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \left(\sum_{i=1}^n a_{i,1} x_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{i,m} x_i \right).$$

Pour qu'il existe deux éléments de E ayant la même image par cette application, il suffit d'avoir $\text{card } E > \text{card } F$. Il suffit donc d'avoir :

$$n(X+1)(Y+1) > m\delta_0\delta(X+M_1+1)(Y+M_2+1),$$

ce qui est vérifié par exemple pour

$$X = \frac{\sqrt{\delta_0 \delta m}}{\sqrt{n} - \sqrt{\delta_0 \delta m}} M_1 + 1 \quad \text{et} \quad Y = \frac{\sqrt{\delta_0 \delta m}}{\sqrt{n} - \sqrt{\delta_0 \delta m}} M_2 + 1.$$

Ainsi, la différence de ces deux éléments donne la réponse à notre problème. \square

Rappelons pour la commodité du lecteur le lemme suivant :

LEMME 2. — Soit φ un module de Drinfeld de rang d , alors pour tout a dans A , $\varphi(a)$ est un polynôme de degré $d \deg a$ en τ :

$$\varphi(a) = a\tau^0 + \varphi_1(a)\tau^1 + \dots + \varphi_{d \deg a}(a)\tau^{d \deg a}.$$

La preuve de ce lemme se fait simplement, par récurrence sur le degré de a .

Le résultat suivant est dû à L. Denis (c.f. lemme 1 de [4]) :

LEMME 3. — Soient G_1, \dots, G_m des T -modules simples deux-à-deux non isogènes. Alors, tout sous- T -module H de $G = G_1^{n_1} \times \dots \times G_m^{n_m}$ est un produit $H_1 \times \dots \times H_m$ où chaque H_i désigne un sous- T -module de $G_i^{n_i}$.

Désormais, nous nous plaçons dans les hypothèses du théorème 1. Nous utiliserons un lemme de zéros dû à J. Yu, dans lequel interviennent les notations suivantes : on considère un T -module Φ de dimension $\mu + 1$ vérifiant :

$$\Phi(T) = \begin{pmatrix} T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi(T) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \varphi(T) \end{pmatrix}.$$

Grâce au lemme précédent, on montre que les sous- T -modules de Φ sont de la forme $G = G_1 \times G_2$ où G_1 et G_2 sont respectivement des sous- T -modules du T -module trivial de dimension 1 et de φ^μ . On considère l'application :

$$\varepsilon : \begin{cases} \mathcal{C} & \longrightarrow \mathcal{C}^{\mu+1} \\ z & \longmapsto (z, e(x_1 z), \dots, e(x_\mu z)) \end{cases}$$

C'est un homomorphisme à un paramètre associé à Φ , c'est-à-dire que :

$$\forall a \in R_\Lambda, \varepsilon(az) = \Phi(a)(\varepsilon(z)).$$

Soit $P \in \mathcal{C}[X_0, \dots, X_\mu]$, on dira que P s'annule à un ordre $\geq m$ en un point $\gamma \in \mathcal{C}^{\mu+1}$ le long de ε , si $P(\gamma + \varepsilon(z))$ n'a que des termes d'ordre $\geq m$ dans son développement de Taylor en 0. Soient $\omega_1, \dots, \omega_r$ des éléments de $\mathcal{C}^{\mu+1}$, on définit :

$$\Gamma(s_1, \dots, s_r) = \{\Phi(a_1)\omega_1 + \dots + \Phi(a_r)\omega_r \mid a_i \in A, \deg(a_i) \leq s_i\}.$$

Théorème de Brownawell-Waldschmidt en caractéristique finie

En reprenant la démonstration du lemme de zéros de L. Denis [6] (théorème 1), et en y changeant $\Gamma(s)$ en $\Gamma(s_1, \dots, s_r)$, on obtient le lemme suivant :

LEMME 4. — *Il existe une constante $c(\Phi)$ telle que si on a un polynôme $P(X_0, \dots, X_\mu)$ non nul en $\mu + 1$ variables de degré D_1 en X_0 et de degré total D_2 en (X_1, \dots, X_μ) qui s'annule sur $\Gamma(s_1 + \mu + 1, \dots, s_r + \mu + 1)$ à l'ordre supérieur ou égal à $(\mu + 1)M + 1$ le long de l'homomorphisme à un paramètre ε , alors il existe $G = G_1 \times G_2$ sous- T -module propre de Φ tel que :*

$$\binom{M + r(G)}{r(G)} \text{card}(\Gamma(s_1, \dots, s_r) + G/G) \leq c(\Phi) D_1^{\text{codim} G_1} D_2^{\text{codim} G_2},$$

où $r(G)$ est la codimension analytique de l'image réciproque de G par ε .

On donne maintenant un lemme technique sur les réseaux, dont la preuve n'est autre qu'une méthode du pivot de Gauss adaptée :

LEMME 5. — *Soit Γ_1 un A -module libre de rang d , dont une base est (y_1, \dots, y_d) . Soit Γ'_1 un sous- A -module de rang d' de Γ_1 . Alors, quitte à réordonner les y_i , on peut choisir une base $(z_1, \dots, z_{d'})$ de Γ'_1 telle que :*

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{d'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(1,1) & \alpha(1,2) & \dots & \alpha(1,d') & \dots & \alpha(1,d) \\ 0 & \alpha(2,2) & \dots & \alpha(2,d') & \dots & \alpha(2,d) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha(d',d') & \dots & \alpha(d',d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{d'} \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix}$$

les $\alpha(i, j)$ étant dans A et vérifiant :

$$\deg(\alpha(i, j)) < \deg(\alpha(j, j)) \text{ pour } i = 1, \dots, j - 1.$$

On peut voir la preuve du lemme de Schwarz-Jensen suivant dans [13] (lemme 2.3) :

LEMME 6. — *Soient $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ une fonction entière, σ_r le nombre de zéros de f comptés avec multiplicité dans $\{z \in \mathcal{C} \mid \deg(z) \leq r\}$ et soit :*

$$M(f, r) = \sup\{\deg(f(z)) \mid \deg(z) \leq r\},$$

alors si $R > r$:

$$M(f, r) \leq M(f, R) - \sigma_r(R - r).$$

Soit $k \hookrightarrow E$ une extension finie de degré \mathcal{D} . On rappelle la notion de hauteur projective d'un élément $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_m)$ de $\mathbb{P}^m(E)$:

$$h(\alpha) = \frac{1}{\mathcal{D}} \sum_{\omega \in M_E} f_\omega \max_{0 \leq i \leq m} (-\omega(\alpha_i)).$$

où M_E désigne l'ensemble de toutes les places de E et f_ω le degré résiduel sur \mathbb{F}_q en la place ω normalisée par $\omega(E) = \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$. Si $f(X_1, \dots, X_l) \in \bar{k}[X_1, \dots, X_l]$, $f(X) = \sum a_\lambda X^\lambda$ alors on appelle hauteur de f :

$$h(f) = h(1, a_\lambda).$$

La proposition 3 de [8] est démontrée pour $\psi \in \bar{k}_\infty$. Cependant, on a encore le résultat pour $\psi \in \mathcal{C}$:

LEMME 7. — Soient $\psi \in \mathcal{C}$ et $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes non nuls de $A[X]$. On note $\delta_n = \deg_X(P_n)$, h_n la hauteur de P_n et $s_n = v(P_n(\psi)) = -\deg(P_n(\psi))$. On suppose qu'il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad s_n \geq \max(h_n \delta_n + h_n \delta_{n+1} + h_{n+1} \delta_n, h_n \delta_n + h_n \delta_{n-1} + h_{n-1} \delta_n).$$

On suppose aussi que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{s_n}{\delta_n} - h_n) = +\infty$. Alors :

$$\forall n \geq n_0, \quad P_n(\psi) = 0.$$

3. Démonstration du théorème

3.1. Première étape : Construction d'une fonction auxiliaire

On se place sous les hypothèses du théorème 1. Dans toute la suite log désignera le logarithme en base q , t_0 sera un entier arbitrairement grand et les constantes $C_i > 0$ ne dépendront pas de t_0 . Soit k_1 une extension finie de k contenant $e(x_1 y_\nu), \dots, e(x_\mu y_\nu)$, ainsi que les coefficients $\varphi_i(\gamma)$ de $\varphi(\gamma)$ pour $\gamma \in R_\Lambda$. Soit k_s la sous-extension séparable maximale de k_1 (c'est-à-dire la plus grande extension séparable de k contenue dans k_1) et p^{s_1} le degré d'inséparabilité de k_1 sur k . On sait alors qu'il existe $\alpha \in k_s$ entier sur A tel que $k_s = k[\alpha]$. On note δ_0 son degré. On choisit Δ_0 un dénominateur commun aux $e(x_i y_\nu)$ pour $i = 1, \dots, \mu$ c'est-à-dire un élément Δ_0 non nul de A tel que :

$$\forall i = 1, \dots, \mu, \quad \Delta_0 (e(x_i y_\nu))^{p^{s_1}} \in A[\alpha].$$

On peut alors trouver $\Delta \in A$ tel que $\Delta^{p^{s_1}}$ soit un multiple de Δ_0 . Ainsi :

$$\forall i = 1, \dots, \mu, \quad (\Delta e(x_i y_\nu))^{p^{s_1}} \in A[\alpha].$$

De plus, comme Alain Thiery dans [9], on peut trouver $\lambda \in A$ tel que, quitte à changer Λ en $\frac{\Lambda}{\lambda}$, on ait :

$$\forall \gamma \in R_\Lambda, \quad \text{si } \varphi(\gamma) = \sum_{i=0}^{n_\gamma} \varphi_i(\gamma) \tau^i \quad \text{alors } (\varphi_i(\gamma))^{p^{s_1}} \in A[\alpha].$$

Commençons la preuve : supposons le théorème 1 faux. Soit $L = k_1(x_i, y_j, e(x_i y_j))$ pour $i = 1, \dots, \mu$ et $j = 1, \dots, \nu$. Le degré de transcendance de L sur k est donc au plus 1, et d'après l'analogie du théorème d'Hermitte-Lindemann en caractéristique finie c'est exactement 1; car l'un au moins des nombres $e(x_1 y_1), x_1$ et y_1 est transcendant sur k .

On peut donc écrire $L_s = k_s(\theta_1, \theta_2)$ où θ_1 est transcendant sur k_s , θ_2 est algébrique de degré δ , séparable sur $k_s(\theta_1)$, entier sur $A[\alpha, \theta_1]$, et L_s est la sous-extension séparable maximale de L (c'est-à-dire la plus grande extension séparable de $k_s(\theta_1)$ contenue dans L). On pose p^{s_2} le degré d'inséparabilité de L sur $k_s(\theta_1)$. Soit $s = \max\{s_1, s_2\}$, alors les éléments de L élevés à la puissance q^s sont dans L_s . Alain Thiery dans [9] conserve ces puissances tout au long de sa preuve. Cependant ici, pour alléger la démonstration, quitte à élever nos fonctions à la puissance q^s , on supposera que tous les nombres sont dans L_s et que les $\Delta e(x_i y_\nu)$ et les $\varphi_i(\gamma)$ sont dans $A[\alpha]$.

Si $x \in k_s(\theta_1, \theta_2)$ il s'écrit :

$$x = \sum_{i=0}^{\delta-1} \frac{P_i(T, \alpha, \theta_1)}{P_\delta(T, \alpha, \theta_1)} \theta_2^i.$$

On en déduit alors des expressions pour $x_1, \dots, x_\mu, y_1, \dots, y_\nu$, ainsi que pour les $e(x_i y_j)$ pour $i = 1, \dots, \mu$ et $j = 1, \dots, \nu - 1$. On prendra $P_\delta(T, \alpha, \theta_1) \in A[\alpha, \theta_1]$ un de leurs dénominateurs communs, ainsi par exemple :

$$x_1 P_\delta(T, \alpha, \theta_1) \in A[\alpha, \theta_1, \theta_2].$$

On notera T'_1 et T'_2 les maxima respectifs des degrés en T et en θ_1 de tous ces nombres multipliés par $P_\delta(T, \alpha, \theta_1)$. Soit t_0 un entier arbitrairement grand, on définit :

$$\begin{aligned} m_0 &= [t_0^{\frac{\nu}{d} + d} (\log t_0)^{-\frac{1}{\nu}}], \\ t_1 &= t_0 (\log t_0)^{-\frac{1}{\nu}}, \\ t_2 &= t_0 (\log t_0)^{\frac{\nu-1}{d\nu}}. \end{aligned}$$

Grâce au lemme 1, on va construire une fonction F entière s'annulant au moins à l'ordre m_0 en $a_1 y_1 + \dots + a_\nu y_\nu$ où les a_i sont dans A et vérifient :

$$|a_i| < t_1 \text{ si } i = 1, \dots, \nu - 1 \text{ et } |a_\nu| < t_2.$$

Soit :

$$F(z) = P_{t_0}(z, e(x_1 z), \dots, e(x_\mu z))$$

$$F(z) = \sum_{\chi \in \mathbb{N}^{\mu+1}} p_\chi z^{\chi_0} e(x_1 z)^{\chi_1} \dots e(x_\mu z)^{\chi_\mu}$$

où $P_{t_0}(X_0, \dots, X_\mu) = \sum_{\chi \in \mathbb{N}^{\mu+1}} p_\chi X_0^{\chi_0} \dots X_\mu^{\chi_\mu}$ est un polynôme en $\mu + 1$ variables vérifiant :

$$\begin{aligned} \deg_{X_0}(P_{t_0}) &\leq m_0, \\ \deg_{X_i}(P_{t_0}) &\leq (\mathcal{K}t_0)^{\frac{\nu}{\mu}} \text{ si } i = 1, \dots, \mu. \end{aligned}$$

La constante \mathcal{K} sera définie ultérieurement.

Soit $\mathcal{Y} = \sum_{i=1}^{\nu} a_i y_i$ où les a_i sont dans A . Alors :

$$\begin{aligned} F(\mathcal{Y} + z) &= \sum_{\chi} p_\chi \left(\sum_{i=1}^{\nu} a_i y_i + z \right)^{\chi_0} \left(e \left(x_1 \left(\sum_{i=1}^{\nu} a_i y_i + z \right) \right) \right)^{\chi_1} \times \dots \\ &\quad \dots \times \left(e \left(x_\mu \left(\sum_{i=1}^{\nu} a_i y_i + z \right) \right) \right)^{\chi_\mu}, \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{\chi} p_\chi \alpha_{n, \chi}(a_1, \dots, a_\nu) \right) z^n. \end{aligned}$$

On veut donc résoudre le système :

$$\sum_{\chi} p_\chi \alpha_{n, \chi}(a_1, \dots, a_\nu) = 0$$

pour :

$$\begin{aligned} n &\leq m_0 - 1, \\ |a_i| &< t_1 \text{ si } i = 1, \dots, \nu - 1, \\ |a_\nu| &< t_2. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \text{Nombre d'équations : } \mathcal{E} &< m_0(q^\nu t_1^{\nu-1} t_2) = q^\nu m_0 t_0^\nu, \\ \text{Nombre d'inconnues : } \mathcal{I} &\geq m_0((\mathcal{K}t_0)^{\frac{\nu}{\mu}})^\mu, \end{aligned}$$

on choisit donc \mathcal{K} de manière à avoir $\mathcal{I} > \delta_0 \delta \mathcal{E}$: prenons $\mathcal{K} = q(\delta_0 \delta + 1)$.

Soit $D_0 = 1$. Pour $i \geq 1$, on notera $D_i = [i](D_{i-1})^q$ où $[i] = T^{q^i} - T$. Puisque les coefficients du module de Drinfeld φ sont dans $A[\alpha]$, D_h est

Théorème de Brownawell-Waldschmidt en caractéristique finie

une suite de dénominateurs pour la fonction e . On peut montrer que si

$$e(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} e_m z^q{}^m \text{ alors :}$$

- 1) $D_h \in A$
- 2) $(D_h e_m) \in A[\alpha]$ pour $m = 0, \dots, h$
- 3) $q^{h_1} + \dots + q^{h_i} \leq q^N \Rightarrow D_{h_1} \dots D_{h_i} | D_N$.

La preuve de 2) se fait par récurrence comme dans [1] lemme 8.2, en utilisant l'équation fonctionnelle de e .

Pour être dans les conditions du lemme de Siegel cité, il faut se ramener à $A[\alpha, \theta_1, \theta_2]$. Par le lemme 2, on a que pour a_i dans A , $e(a_i x_i y_j)$ est un polynôme en $e(x_i y_j)$ de degré $q^{d \deg a_i}$. De plus, les x_i apparaissent avec un degré total au plus m_0 (ordre d'annulation de F) et les y_j avec un degré total au plus m_0 (car $\deg_{X_0} P_{t_0} \leq m_0$). On doit donc multiplier les équations du système par $P_\delta(T, \alpha, \theta_1)$ à la puissance

$$[\mu(\mathcal{K}t_0)^{\frac{\nu}{\mu}} t_0^d (\log t_0)^{-\frac{1}{\nu}}] + 1 + m_0 + m_0 \leq C_1 m_0.$$

La présence des $e(x_i y_\nu)$ nous conduit à multiplier les équations par Δ à la puissance

$$[\mu(\mathcal{K}t_0)^{\frac{\nu}{\mu}} t_0^d (\log t_0)^{\frac{\nu-1}{\nu}}] \leq C_2 [t_0^{\frac{\nu}{\mu} + d} (\log t_0)^{\frac{\nu-1}{\nu}}]$$

et celle des coefficients e_i , à multiplier les équations par $D_{[\log m_0] + 1}$; on aura alors : $\deg(D_{[\log m_0] + 1} e_{[\log m_0] + 1}) \leq C_3 m_0 \log m_0$. On multiplie toutes les équations par ces dénominateurs et, grâce au lemme 1, on trouve une solution non triviale du nouveau système telle que :

$$\deg_T(p_\chi) \leq \frac{\sqrt{\delta_0 \delta \mathcal{E}}}{\sqrt{I} - \sqrt{\delta_0 \delta \mathcal{E}}} M_1 + 1,$$

$$\deg_{\theta_1}(p_\chi) \leq \frac{\sqrt{\delta_0 \delta \mathcal{E}}}{\sqrt{I} - \sqrt{\delta_0 \delta \mathcal{E}}} M_2 + 1,$$

où M_1 et M_2 sont respectivement des majorants des degrés en T et en θ_1 des coefficients du nouveau système, c'est-à-dire des $\alpha_{n,\chi}(a_1, \dots, a_\nu)$ multipliés par des dénominateurs.

Soient :

$$T_1 = \max_{1 \leq i \leq \mu} \{T'_i, \deg_T(\Delta e(x_i y_\nu)), \deg_T(\Delta), \deg_T(P_\delta(T, \alpha, \theta_1))\}$$

$$T_2 = \max\{T'_2, \deg_{\theta_1}(P_\delta(T, \alpha, \theta_1))\}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
 M_1 \leq & T_1 C_1 m_0 \\
 & + T_1 C_2 [t_0^{\frac{\nu}{\mu} + d} (\log t_0)^{\frac{\nu-1}{\nu}}] \\
 & + C_3 m_0 \log m_0 \\
 & + m_0 T_1 \\
 & + m_0 (2T_1 + \log(t_0 (\log t_0)^{\frac{\nu-1}{\mu}})) \\
 & + T_1 \mu (\mathcal{K} t_0)^{\frac{\nu}{\mu}} (t_0 (\log t_0)^{\frac{\nu-1}{\mu}})^d \\
 & + C_0 (m_0 + \mu (\mathcal{K} t_0)^{\frac{\nu}{\mu}} (t_0 (\log t_0)^{\frac{\nu-1}{\mu}})^d - 1)
 \end{aligned}$$

et donc :

$$\exists C_4 > 0, M_1 \leq C_4 m_0 \log m_0.$$

On procède de même pour M_2 :

$$\begin{aligned}
 M_2 \leq & T_2 C_1 m_0 \\
 & + m_0 T_2 \\
 & + m_0 T_2 \\
 & + T_2 \mu (\mathcal{K} t_0)^{\frac{\nu}{\mu}} (t_0 (\log t_0)^{-\frac{1}{\mu}})^d \\
 & + C'_0 (m_0 + \mu (\mathcal{K} t_0)^{\frac{\nu}{\mu}} (t_0 (\log t_0)^{-\frac{1}{\mu}})^d - 1)
 \end{aligned}$$

et donc :

$$\exists C_5 > 0, M_2 \leq C_5 m_0.$$

CONCLUSION 1. — Pour t_0 entier naturel, on a construit une fonction entière $F(z) = P_{t_0}(z, e(x_1 z), \dots, e(x_\mu z))$ telle que $P_{t_0} \in A[\theta_1][X_0, X_1, \dots, X_\mu]$, avec $P_{t_0} \neq 0$ et :

$$\deg_{X_0}(P_{t_0}) \leq m_0 \quad \text{et si } i \neq 0 \quad \deg_{X_i}(P_{t_0}) \leq (\mathcal{K} t_0)^{\frac{\nu}{\mu}},$$

les coefficients p_χ de P_{t_0} vérifient :

$$\deg_T(p_\chi) \leq C_6 m_0 \log m_0 \quad \text{et} \quad \deg_{\theta_1}(p_\chi) \leq C_7 m_0,$$

et F s'annule au moins à l'ordre m_0 en $a_1 y_1 + \dots + a_\nu y_\nu$ où $a_i \in A$ tels que :

$$|a_i| < t_1 \text{ si } i = 1, \dots, \nu - 1 \text{ et } |a_\nu| < t_2.$$

3.2. Deuxième étape : utilisation du lemme de zéros

Grâce au lemme 4, on trouve une majoration de l'ordre d'annulation de F en les points $a_1 y_1 + \dots + a_\nu y_\nu$ introduits précédemment.

$$\text{Soit } \Gamma_1(r_1, r_2) = \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} a_i y_i \mid a_i \in A, \deg(a_i) \leq r_1 \text{ si } i = 1, \dots, \nu - 1 \right.$$

et $\deg(a_\nu) \leq r_2 \}$,

où $r_1 = \lfloor \log t_1 \rfloor - 1$ et $r_2 = \lfloor \log t_2 \rfloor - 1$.

Théorème de Brownawell-Waldschmidt en caractéristique finie

Soit Φ le T -module de dimension $\mu + 1$ introduit au paragraphe 2, vérifiant :

$$\Phi(T) = \begin{pmatrix} T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi(T) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \varphi(T) \end{pmatrix}.$$

On note alors :

$$\Gamma(r_1, r_2) = \{\varepsilon(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \in \Gamma_1(r_1, r_2)\}$$

où ε est l'homomorphisme à un paramètre défini au paragraphe 2.

Alors, par construction de F , P_{t_0} s'annule au moins à l'ordre m_0 le long de ε sur $\Gamma(r_1, r_2)$. On applique alors le lemme 4 : si P s'annule à l'ordre supérieur ou égal à $(\mu+1)M+1$ le long de ε sur $\Gamma(r_1, r_2)$, alors il existe G sous T -module propre de $\mathbb{G}_a \times \varphi^\mu$ qui, d'après le lemme 3, s'écrit $G = G_1 \times G_2$, tel que :

$$\binom{M+r(G)}{r(G)} \text{card}(\Gamma(r_1 - \mu - 1, r_2 - \mu - 1) + G/G) \leq c(\Phi) m_0^{\text{codim}G_1} (\mu(\mathcal{K}t_0)^\frac{\mu}{\mu})^{\text{codim}G_2},$$

c'est-à-dire :

$$\binom{M+r(G)}{r(G)} \frac{\text{card}(\Gamma(r_1 - \mu - 1, r_2 - \mu - 1))}{\text{card}(\Gamma(r_1 - \mu - 1, r_2 - \mu - 1) \cap G)} \leq c(\Phi) m_0^{\text{codim}G_1} (\mu(\mathcal{K}t_0)^\frac{\mu}{\mu})^{\text{codim}G_2}.$$

Or :

$$\begin{aligned} \text{card}(\Gamma(r_1 - \mu - 1, r_2 - \mu - 1)) &= \text{card}(\Gamma_1(r_1 - \mu - 1, r_2 - \mu - 1)) \\ &= q^{((r_1 - \mu)(\nu - 1) + (r_2 - \mu))} \\ &\geq C_8 t_1^{\nu - 1} t_2 = C_8 t_0^\nu. \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} r(G) &= \dim \mathcal{C} - \dim \varepsilon^{-1}(G) = \dim \mathcal{C} - \dim(\varepsilon(\mathcal{C}) \cap G) \\ r(G) &= 0 \text{ ou } 1 \text{ donc :} \end{aligned}$$

$$\binom{M+r(G)}{r(G)} \geq \frac{M^{r(G)}}{r(G)!} = M^{r(G)}.$$

Dans tous les cas, on a donc :

$$M^{r(G)} t_0^\nu \leq c'(\Phi) \text{card}(\Gamma(r_1 - \mu - 1, r_2 - \mu - 1) \cap G) m_0^{\text{codim}G_1} t_0^\frac{\mu}{\mu} \text{codim}G_2.$$

On regarde alors les différentes possibilités pour G .

Premier cas : $G = \{0\} \times G_2$.

$G_1 = \{0\}$ donc $\text{codim}G_1 = 1$, $\varepsilon(\mathcal{C}) \cap G = \{0\}$ (ce qui nous donne $r(G) = 1$) et $\Gamma(r_1 - \mu - 1, r_2 - \mu - 1) \cap G = \{0\}$ est de cardinal 1.

D'autre part, on a toujours $\text{codim}G_2 \leq \mu$, donc $Mt_0^\nu \leq c'(\Phi) \times 1 \times m_0 t_0^\nu$. Finalement, on obtient :

$$\exists C_9 > 0, \quad M \leq C_9 m_0.$$

Deuxième cas : $G = \mathbb{G}_a \times G_2$

On a donc $\text{codim}G_1 = 0$ et $\text{codim}G_2 \leq \mu$. Comme $G_1 = \mathbb{G}_a$ nécessairement, $G_2 \neq \varphi^\mu$ et donc, comme l'écrit A. Thiery dans [9], G_2 a au moins une équation du type :

$$\varphi(u_1)X_1 + \dots + \varphi(u_\mu)X_\mu = 0$$

avec $(u_1, \dots, u_\mu) \in R_\Lambda^\mu \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.

Soit $\mathcal{A} = \sum_{j=1}^{\nu} a_j y_j \in \Gamma_1(r_1 - \mu - 1, r_2 - \mu - 1)$ tel que $\varepsilon(\mathcal{A}) \in G$. On a donc :

$$\varphi(u_1)(e(x_1\mathcal{A})) + \dots + \varphi(u_\mu)(e(x_\mu\mathcal{A})) = e((u_1x_1 + \dots + u_\mu x_\mu)\mathcal{A}) = 0.$$

Donc, $\mathcal{A} = \sum_{j=1}^{\nu} a_j y_j \in \underbrace{(u_1x_1 + \dots + u_\mu x_\mu)^{-1}\Lambda}_{\neq 0}$.

Le réseau $\Lambda' = (u_1x_1 + \dots + u_\mu x_\mu)^{-1}\Lambda$ est aussi de rang d . De plus y_1, \dots, y_ν sont k -linéairement indépendants et engendrent sur A un module Γ_1 de rang $\nu \geq \frac{\nu}{\mu} + d$. Le réseau $\Gamma'_1 = \Lambda' \cap \Gamma_1$ est de rang $d' \leq d$, sous- A -module de Γ_1 , donc, d'après le lemme 5, on peut en choisir une base $(z_1, \dots, z_{d'})$ telle que, quitte à réordonner les y_i :

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{d'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(1,1) & \alpha(1,2) & \dots & \alpha(1,d') & \dots & \alpha(1,\nu) \\ 0 & \alpha(2,2) & \dots & \alpha(2,d') & \dots & \alpha(2,\nu) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha(d',d') & \dots & \alpha(d',\nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{d'} \\ \vdots \\ y_\nu \end{pmatrix}$$

les $\alpha(i, j)$ étant dans A et vérifiant :

$$\deg(\alpha(i, j)) < \deg(\alpha(j, j)) \text{ pour } i = 1, \dots, j - 1.$$

Finalement, si $\mathcal{A} = b_1 z_1 + \dots + b_{d'} z_{d'} \in \Gamma_1(r_1 - \mu - 1, r_2 - \mu - 1) \cap \Lambda'$, on montre par récurrence sur n que $\deg(b_n) \leq r_2$. Pour cela, on regarde les coordonnées de \mathcal{A} dans la base (y_1, \dots, y_ν) :

- La première coordonnée (celle sur y_1) de \mathcal{A} est $a_1 = \alpha(1, 1)b_1$.

Or, $\deg(a_1) \leq r_2$, donc $\deg(\alpha(1, 1)b_1) \leq r_2$ et comme $\alpha(1, 1) \in A$, alors $\deg(b_1) \leq r_2$.

- La seconde coordonnée (celle sur y_2) est $a_2 = \alpha(1, 2)b_1 + \alpha(2, 2)b_2$.

Comme précédemment, on obtient : $\deg(\alpha(1, 2)b_1 + \alpha(2, 2)b_2) \leq r_2$.

Si $\deg(\alpha(1, 2)b_1) \neq \deg(\alpha(2, 2)b_2)$, alors :

$\deg(\alpha(1, 2)b_1 + \alpha(2, 2)b_2) = \max\{\deg(\alpha(1, 2)b_1), \deg(\alpha(2, 2)b_2)\}$. On a donc bien $\deg(b_2) \leq r_2$.

Sinon, $\deg(\alpha(1, 2)b_1) = \deg(\alpha(2, 2)b_2)$ et comme $\deg(\alpha(1, 2)) < \deg(\alpha(2, 2))$ on a toujours : $\deg(b_2) < \deg(b_1) \leq r_2$.

- Soit $n \in \{1, \dots, \nu\}$. On suppose que pour $i = 1, \dots, n-1$, $\deg(b_i) \leq r_2$.

En considérant la coordonnée en y_n de \mathcal{A} , on obtient :

$$\deg(\alpha(1, n)b_1 + \dots + \alpha(n-1, n)b_{n-1} + \alpha(n, n)b_n) \leq r_2.$$

Si $\deg(\alpha(1, n)b_1 + \dots + \alpha(n-1, n)b_{n-1}) \neq \deg(\alpha(n, n)b_n)$

alors on a $\deg(\alpha(n, n)b_n) \leq r_2$ et donc $\deg(b_n) \leq r_2$.

Sinon,

$$\begin{aligned} \deg(\alpha(n, n)b_n) &= \deg(\alpha(1, n)b_1 + \dots + \alpha(n-1, n)b_{n-1}) \\ \deg(\alpha(n, n)b_n) &\leq \max_{i=1, \dots, n-1} \{\deg(\alpha(i, n)b_i)\} \\ \deg(\alpha(n, n)b_n) &\leq r_2 + \max_{i=1, \dots, n-1} \{\deg(\alpha(i, n))\} \end{aligned}$$

d'où $\deg(b_n) \leq r_2$.

Ce résultat démontré, on peut maintenant majorer convenablement le cardinal de $\Gamma(r_1 - \mu - 1, r_2 - \mu - 1) \cap G$:

$$\begin{aligned} \Gamma(r_1 - \mu - 1, r_2 - \mu - 1) \cap G &\subseteq \varepsilon(\Gamma_1(r_1 - \mu - 1, r_2 - \mu - 1) \cap \Lambda') \\ &\subseteq \varepsilon(\Gamma_1(r_1, r_2) \cap \Gamma_1 \cap \Lambda') \\ &\subseteq \varepsilon(\Gamma_1(r_1, r_2) \cap \Gamma'_1). \end{aligned}$$

Or, tout élément \mathcal{A} de $\Gamma_1(r_1, r_2) \cap \Gamma'_1$ est de la forme $\mathcal{A} = \sum_{j=1}^{d'} b_j z_j$ avec

$\deg(b_j) \leq r_2$. On a donc :

$$\begin{aligned} \text{card}(\Gamma(r_1 - \mu - 1, r_2 - \mu - 1) \cap G) &\leq \text{card}(\Gamma_1(r_1, r_2) \cap \Gamma'_1) \\ &\leq q^{d'(r_2+1)} \\ &\leq q^{d'} t_2^d. \end{aligned}$$

S. Dion

Enfin, puisque $\varepsilon^{-1}(G) \subset (u_1x_1 + \dots + u_\mu x_\mu)^{-1}\Lambda$, on a donc $\dim(\varepsilon^{-1}(G)) = 0$, d'où $r(G) = 1$. Alors :

$$\exists C_{10} > 0, \quad Mt_0^\nu \leq C_{10}t_0^\nu t_2^d$$

$$\exists C_{10} > 0, \quad M \leq C_{10}t_0^d (\log t_0)^{\frac{\nu-1}{\nu}}.$$

Comme on est au moins dans un de ces cas, la condition la moins forte sera vérifiée, à savoir :

$$\exists C_{11} > 0, \quad M \leq C_{11}m_0.$$

CONCLUSION 2. — *Si la fonction F s'annule à l'ordre $\geq (\mu + 1)M + 1$ sur $\Gamma_1(r_1, r_2)$, alors :*

$$M \leq C_{11}m_0.$$

3.3. Troisième étape : majoration du degré de $F(z)$

On utilise le lemme 6 pour majorer $\deg(F(z))$ avec $\deg(z) \leq r$ où r va être défini. On a clairement :

$$\frac{\mu}{\nu + d\mu} < \frac{\mu(\nu + d)}{d(\nu + d\mu)}.$$

On choisit donc des réels positifs B et B_0 tels que :

$$\frac{\mu}{\nu + d\mu} < B_0 < B < \frac{\mu(\nu + d)}{d(\nu + d\mu)}.$$

Soit s_0 le plus grand entier tel que F s'annule à l'ordre $s_0 - 1$ sur $\Gamma_1(r_1, r_2)$. On a évidemment : $s_0 \geq m_0$ et, par la deuxième étape :

$$s_0 \leq (\mu + 1)C_{11}m_0 + 2.$$

On applique le lemme 6 avec $r = B_0 \log m_0$ et $R = B \log m_0$.

Si $\mathcal{A} \in \Gamma_1(r_1, r_2)$, alors $\deg(\mathcal{A}) \leq r_2 + \max_{i=1, \dots, \nu} \{\deg(y_i)\}$. C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \deg(\mathcal{A}) &\leq \log(t_0(\log t_0)^{\frac{\nu-1}{d\nu}}) + \max_{i=1, \dots, \nu} \{\deg(y_i)\} \\ &\leq B_0 \log m_0, \end{aligned}$$

pour t_0 assez grand (car $B_0 > \frac{\mu}{\nu + d\mu}$).

Théorème de Brownawell-Waldschmidt en caractéristique finie

Alors, pour t_0 assez grand, F s'annule au moins $C_{12}s_0t_0'$ fois dans $\{z \in \mathcal{C} \mid \deg(z) \leq r\}$:

$$\sigma_r \geq C_{12}s_0t_0'.$$

D'autre part, e est une fonction entière d'ordre $\leq d$, donc :

$$\exists C > 0, \quad \deg(z) \leq r \Rightarrow \deg(e(z)) \leq Cq^{dr}.$$

Si $\deg(z) \leq R$, alors $\deg(x_i z) \leq R + \deg(x_i)$ et donc $\deg(e(x_i z)) \leq C'q^{dR} = C''m_0^{dB}$.

De plus, les coefficients p_χ de P_{t_0} vérifient :

$$\deg_T(p_\chi) \leq C_6 m_0 \log m_0 \quad \text{et} \quad \deg_{\theta_1}(p_\chi) \leq C_7 m_0.$$

Et donc,

$$\deg(p_\chi) \leq C_6 m_0 \log m_0 + \max_{l=0, \dots, [C_7 m_0]} \{\deg(\theta_1^l)\}.$$

Alors, pour $z \in \mathcal{C}$ avec $\deg z \leq r$, le lemme 6 nous donne :

$$\begin{aligned} \deg(F(z)) \leq C'_{12}(m_0 \log m_0 + \mu m_0^{dB} (\mathcal{K}t_0)^{\frac{\mu}{d}} + Bm_0 \log m_0) \\ - C_{12}(B - B_0)s_0t_0' \log m_0. \end{aligned}$$

Finalement, B et B_0 ont été choisis de sorte que :

$$\exists C_{13} > 0, \forall z \in B(0, r) \quad \deg(F(z)) \leq -C_{13}s_0t_0' \log m_0.$$

CONCLUSION 3. — Si $r = B_0 \log m_0$, on a :

$$\forall z \in \mathcal{C} \text{ tel que } \deg z \leq r, \quad \deg(F(z)) \leq -C_{13}s_0t_0' \log m_0.$$

3.4. Quatrième étape : Critère de transcendance

Par définition du s_0 introduit à l'étape précédente, on sait que F ne s'annule pas à l'ordre s_0 sur $\Gamma_1(r_1, r_2)$. Donc il existe $\mathcal{Y} = \sum_{i=1}^{\nu} a_i y_i \in \Gamma_1(r_1, r_2)$ tel que le coefficient de Taylor de $F(z + \mathcal{Y})$ à l'ordre s_0 soit non nul. On note $X_{t_0} = \sum_{\chi} p_\chi \alpha_{\chi, s_0}(a_1, \dots, a_\nu)$ ce coefficient. Sachant que $s_0 \leq (\mu + 1)C_{11}m_0 + 2$, on le multiplie correctement par des dénominateurs, afin d'obtenir un élément de $A[\alpha, \theta_1, \theta_2]$:

$$Y_{t_0} = P_\delta(T, \alpha, \theta_1) C_1^{m_0} \Delta C_2 [t_0^{\frac{\mu}{d} + d} (\log t_0)^{\frac{\nu-1}{\nu}}]$$

$$D_{[\log((\mu+1)C_{11}m_0+2)]+1} X_{t_0} \in A[\alpha, \theta_1, \theta_2].$$

C'est-à-dire que :

$$Y_{t_0} = \sum_{\substack{0 \leq i \leq \delta_0 - 1 \\ 0 \leq j \leq \delta - 1}} Q_{i,j}(T, \theta_1) \alpha^i \theta_2^j,$$

avec $\deg_T(Y_{t_0}) \leq C_{14} m_0 \log m_0$ et $\deg_{\theta_1}(Y_{t_0}) \leq C_{15} m_0$.

Il est clair que l'extension $k(\theta_1) \hookrightarrow k_s(\theta_1)[\theta_2]$ est finie et séparable. De plus, comme $k(\theta_1)$ et k_s sont linéairement disjoints sur k , elle est de degré $\delta_0 \delta$, et la famille $\{(\alpha^i \theta_2^j), 0 \leq i \leq \delta_0 - 1, 0 \leq j \leq \delta - 1\}$ est une base de $k_s(\theta_1, \theta_2)$ en tant que $k(\theta_1)$ -espace vectoriel. Si on note $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{k_s(\theta_1, \theta_2)/k(\theta_1)}$ l'application norme de $k_s(\theta_1, \theta_2)$ sur $k(\theta_1)$, alors $\mathcal{N}(Y_{t_0})$ est le déterminant de l'application linéaire :

$$\begin{aligned} k_s(\theta_1, \theta_2) &\longrightarrow k_s(\theta_1, \theta_2) \\ z &\longmapsto z Y_{t_0} \end{aligned}$$

Si on écrit la matrice de cet endomorphisme dans la base précédente, comme α et θ_2 sont entiers, on obtient que $\mathcal{N}(Y_{t_0}) \in \mathbb{F}_q[T, \theta_1]$ et que :

$$\begin{aligned} \deg_T(\mathcal{N}(Y_{t_0})) &\leq \delta_0 \delta (C_0 + \max_{\substack{0 \leq i \leq \delta_0 - 1 \\ 0 \leq j \leq \delta - 1}} \{\deg_T(Q_{i,j}(T, \theta_1))\}), \\ \deg_{\theta_1} \mathcal{N}(Y_{t_0}) &\leq \delta_0 \delta (C'_0 + \max_{\substack{0 \leq i \leq \delta_0 - 1 \\ 0 \leq j \leq \delta - 1}} \{\deg_{\theta_1}(Q_{i,j}(T, \theta_1))\}), \end{aligned}$$

où $C_0 = \max_{\substack{0 \leq i \leq 2(\delta_0 - 1) \\ 0 \leq i' \leq 2(\delta - 1)}} \{\deg_T(\alpha^i \theta_2^{i'})\}$ et $C'_0 = \max_{\substack{0 \leq i \leq 2(\delta_0 - 1) \\ 0 \leq i' \leq 2(\delta - 1)}} \{\deg_{\theta_1}(\alpha^i \theta_2^{i'})\}$.

Il existe donc $\mathcal{P}_{t_0} \in A[X]$ tel que $\mathcal{P}_{t_0}(\theta_1) = \mathcal{N}(Y_{t_0})$. Ce polynôme vérifie :

$$\begin{aligned} h_{t_0} &= h(\mathcal{P}_{t_0}) \leq C_{16} m_0 \log m_0, \\ \delta_{t_0} &= \deg(\mathcal{P}_{t_0}) \leq C_{17} m_0. \end{aligned}$$

On pose $s_{t_0} = -\deg(\mathcal{P}_{t_0}(\theta_1)) = -\deg(\mathcal{N}(Y_{t_0}))$.

Si on écrit $F(z + \mathcal{Y}) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m z^m$, les inégalités de Cauchy dans le cas non archimédien (voir [2]), nous donnent :

$$\forall \rho \in \mathbb{R}, \quad \sup\{\deg(F(z + \mathcal{Y})) \mid \deg(z) \leq \rho\} = \sup\{\deg(f_m) + m\rho \mid m \geq 0\}$$

et donc en particulier :

$$\deg(f_{s_0}) \leq \sup\{\deg(F(z + \mathcal{Y})) \mid \deg(z) \leq \rho\} - s_0 \rho.$$

Avec $\rho = r = B_0 \log m_0 > 0$, puisque $\deg \mathcal{Y} \leq r$:

$$\begin{aligned} \deg(f_{s_0}) &\leq \sup\{\deg(F(z + \mathcal{Y})) \mid \deg(z) \leq r\}, \\ &\leq \sup\{\deg(F(z)) \mid \deg(z) \leq r\}, \\ &\leq -C_{13} s_0 t_0' \log m_0. \end{aligned}$$

On a donc, en tenant compte des dénominateurs, la majoration suivante :

$$\exists C_{18} > 0, \quad s_{t_0} \geq C_{18} s_0 t_0^\nu \log m_0.$$

Finalement :

$$\frac{s_{t_0}}{\delta_{t_0}} - h_{t_0} \geq \frac{C_{18} s_0 t_0^\nu \log m_0}{C_{17} m_0} - C_{16} m_0 \log m_0.$$

En supposant que $\mu\nu \geq \nu + d\mu$, on se place dans les hypothèses du lemme 7 et donc pour t_0 assez grand $\mathcal{P}_{t_0}(\theta_1) = 0$ ce qui contredit la transcendance de θ_1 . \square

4. Conséquences

On a tout d'abord un analogue du théorème de Brownawell-Waldschmidt. On considère l'exponentielle de Carlitz e_c associée au module de Drinfeld $\phi(T) = T\tau^0 + \tau$. Elle est définie par :

$$e_c(z) = \sum_{h \geq 0} \frac{z^{q^h}}{D_h}$$

où $D_0 = 1$ et $D_h = (T^{q^h} - T)D_{h-1}^q$. Alors, ici $d = 1$ et le théorème 1 donne :

COROLLAIRE 1. — Soient x_1, x_2 (resp. y_1, y_2) $\in \mathcal{C}$, A -linéairement indépendants. On suppose que $e_c(x_1 y_2)$ et $e_c(x_2 y_2)$ sont algébriques sur k , alors deux au moins des nombres $x_i, y_j, e_c(x_i y_j)$ (pour $i, j = 1$ ou 2) sont algébriquement indépendants sur k .

Ce résultat, en caractéristique 0, contient la conjecture de Schneider, à savoir que :

$$e^e \text{ ou } e^{e^2} \text{ est transcendant sur } \mathbb{Q}.$$

En caractéristique finie, on en a aussi un analogue :

COROLLAIRE 2. — On considère φ un module de Drinfeld de rang d défini sur \bar{k} . Si $a \in R_\Lambda$ tel que $a \neq 0$, alors l'un au moins des nombres $e(a), \dots, e((a)^{2d})$ est transcendant sur k .

Preuve. — On pose $x_1 = 1, x_2 = e(a), y_1 = a, y_2 = e(a), \dots, y_{2d} = (e(a))^{2d-1}$. D'après le théorème d'Hermite-Lindemann, comme $a \in R_\Lambda \subset \bar{k}$ alors $e(a) \notin \bar{k}$, et donc x_1 et x_2 sont linéairement indépendants sur k_Λ et les y_i le sont sur k . Si les nombres $e(e(a)^{2d-1})$ et $e((e(a))^{2d})$ étaient algébriques

alors, avec $\mu = 2, \nu = 2d$ on se trouverait dans les conditions du théorème 1 et donc deux au moins des nombres suivants seraient algébriquement indépendants :

$$1, a, e(a), e(ae(a)) = \varphi(a)(e(e(a))), e(e(a)^n), \text{ pour } n = 1, \dots, 2d. \quad \square$$

On retrouve en particulier, avec l'exponentielle de Carlitz, que :

$$e_c(e_c(1)) \text{ ou } e_c(e_c(1)^2) \text{ est transcendant sur } k.$$

Bibliographie

- [1] BOSSER (V.). — *Minoration de formes linéaires de logarithmes pour les modules de Drinfeld*, J. Number Theory **75** (1999), 279-323.
- [2] BOSCH-GÜNTZER-REMMERT. — *Non Archimedean Analysis*, Springer (1984).
- [3] BROWNAWELL (W.D.). — *The algebraic independence of certain numbers related by the exponential function*, J. Number Theory **6** (1974), 22-31.
- [4] DENIS (L.). — *Théorème de Baker et modules de Drinfeld*, J. Number Theory **43** (1993), 203-215.
- [5] DENIS (L.). — *Indépendance algébrique et exponentielle de Carlitz*, Acta Arith. **LXIX.1** (1995), 75-89.
- [6] DENIS (L.). — *Lemmes de multiplicités et T-modules*, Michigan Journal of Math **43** (1996), n° 1, 67-79.
- [7] DENIS (L.). — *Indépendance algébrique en caractéristique 2*, J. Number Theory **66** (1997), 183-200.
- [8] THIERY (A.). — *Indépendance algébrique de périodes et quasi-périodes de modules de Drinfeld*, The Arithmetic of Functions Fields, Proceedings, Workshop at Ohio State University (1992), 265-284.
- [9] THIERY (A.). — *Théorème de Lindemann-Weierstrass pour les modules de Drinfeld*, Compositio Mathematica **95** (1995), 1-42.
- [10] TUBBS (R.). — *Algebraic groups and small transcendence degree, I*, J. Number Theory **25** (1987), 279-307.
- [11] TUBBS (R.). — *Algebraic groups and small transcendence degree, II*, J. Number Theory **35** (1990), 109-127.
- [12] WALDSCHMIDT (M.). — *Solution du huitième problème de Schneider*, J. Number Theory **5** (1973), 191-202.
- [13] YU (J.). — *Transcendence Theory over function fields*, Duke Math. J. **52** (1985), 517-527.
- [14] YU (J.). — *Analytic homomorphisms into Drinfeld Modules*, Ann. of Math. **145** (1997), 215-233.