ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

LOTFI SAIDANE

Propriétés algébriques des opérateurs d'Airy de petit ordre

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e^ série, tome 9, n° 3 (2000), p. 519-550

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_2000_6_9_3_519_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse

Vol. IX, n° 3, 2000
pp. 519–550

Propriétés algébriques des opérateurs d'Airy de petit ordre [(*)]

LOTFI SAIDANE [(1)]

RÉSUMÉ. — On donne dans cet article des conditions nécessaires, et parfois suffisantes, pourqu'un opérateur d'Airy généralisé d'ordre $\leqslant 3$, ou son transformé de Fourier, soit réductible (resp. équivalent à son dual). On répond ainsi en partie à des questions posées par N. Katz dans son étude de leurs groupes de Galois différentiels.

ABSTRACT. — In this paper, we give necessary, and sometimes sufficient conditions for a generalized Airy operators of order $\leqslant 3$ (or its Fourier transform) to be reducible (resp. equivalent to his adjoint operator). This provides a partial answer to questions raised by N. Katz in his study of their differential Galois groups.

0. Introduction

On étudie dans cet article dans quelle mesure on peut «lire» sur les coefficients d'un opérateur différentiel certaines propriétés algébriques du module différentiel associé, et plus particulièrement les questions de réductibilité et d'autodualité (cf. §1, définition 1.1 et 1.5 pour la signification de ces termes).

Dans le cas des opérateurs hypergéométriques, on dispose d'une réponse satisfaisante à ces questions grâce aux travaux de Beukers, Heckman, Katz, Boussel (voir par exemple [Bo]).

(*) Reçu le 11 décembre 1998, accepté le 21 mars 2000

(1) Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Tunis, Campus Universitaire, 1060 Tunis.
e-mail: lotfi.saidane.@fst.rnu.tn

Une autre classe intéressante est celle des opérateurs différentiels de la forme $L = P_n(\partial) + Q_m(x)$, où $\partial = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ et P_n, Q_m sont des polynômes non constants à coefficients dans $\mathbb{C}$, de degré respectif n et m. On les appelle opérateurs d'Airy de bidegré (n,m) car ils généralisent la classique équation d'Airy $y'' - xy = 0$ (où $n = 2$ et $m = 1$). Leur étude a été initiée par N. Katz [Ka], dans le but de calculer leur groupe de Galois différentiel. Katz montre que ce calcul se ramène précisément aux questions de réductibilité et d'autodualité pour l'opérateur L.

Il résout en partie ces questions sous l'hypothèse que les degrés de P et Q sont premiers entre eux.

Dans cet article nous poursuivons l'étude de Katz pour les opérateurs d'Airy de bidegré (n,m), sans supposer n et m premiers entre eux. Nous nous sommes limités au cas $\inf(n,m) \leqslant 3$, où apparaissent déjà plusieurs phénomènes nouveaux.

En ce qui concerne la réductibilité nous montrerons ainsi :

0.1. Proposition

Soit L un opérateur d'Airy de bidegré $(3,3r)$, $r \geqslant 2$. Alors L ne peut s'écrire comme produit d'opérateurs d'ordre 1.

On verra au paragraphe 2 que cet énoncé ne s'étend pas au cas $r = 1$.

La reconnaissance de la réductibilité des opérateurs d'Airy permet de décrire leurs classes d'équivalence (voir Définition 1.1.1). L'énoncé suivant précise une remarque de Katz (voir [Ka] 4.3) dans le cas de bidegré (2,2).

0.2. Proposition

Soient L et L' deux opérateurs d'Airy unitaires de bidegré (2,2) avec $L = \partial^2 - (a^2x^2 + 2abx + c)$, $a,b,c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, et $\mathrm{Re}\left(\dfrac{b^2-c}{a}\right) \in [-1,1]$. Alors :

i) L est réductible si et seulement si $\dfrac{b^2-c}{a} = \pm 1$.

ii) Quand $\mathrm{Re}\left(\dfrac{b^2-c}{a}\right) \in]-1,1[$, L est équivalent à L' si et seulement si $L - L' = 2am$, où m est un entier rationnel.

iii) Quand $\dfrac{b^2-c}{a}=1$, L est équivalent à L' si et seulement si $L-L'=2am$, où $m \in \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$.

iv) Quand $\dfrac{b^2-c}{a}=-1$, L est équivalent à L' si et seulement si $L-L'=2am$, où $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

En réponse à la question 4.3 de [Ka], nous montrerons par ailleurs le résultat suivant .

0.3. Proposition

Si 3 ne divise pas m, deux opérateurs d'Airy équivalents de bidegré $(3, m)$ sont proportionnels.

On en déduit aisément que de tels opérateurs ne peuvent être autoduaux. Plus généralement nous montrerons le résultat ci-dessous.

0.4. Proposition

Pour tout entier $m \geqslant 1$, aucun opérateur d'Airy de bidegré $(3, m)$ n'est autodual.

On trouvera des versions plus générales des propositions 0.1 – 0.4 dans les paragraphes 2 et 3 de cet article.

Remerciements. — Je remercie Daniel Bertrand pour m'avoir indiqué cet axe de recherche et pour toutes les discussions, concernant ce travail, que j'ai eues avec lui. Je remercie, également, le réferee pour ses critiques, qui m'ont permis d'améliorer la qualité de rédaction de la première version de ce travail.

1. Généralités

Pour la suite de ce paragraphe on adoptera les notations suivantes.

k désigne un corps algébriquement clos de caractéristique zéro ; K est le corps des fractions de l'anneau $\mathcal{O} = k[x]$; ∂ est la dérivation $\dfrac{d}{dx}$ de K, $\mathcal{D} = \mathcal{O}[\partial] = k[x, \partial]$ est l'algèbre de Weyl sur k et $\mathcal{D}_K = K[\partial]$ est l'ensemble des opérateurs différentiels à coefficients dans K ; ainsi, $\mathcal{D}_K$ est une k-algèbre associative non commutative. On notera aussi ∂ le prolongement de ∂ aux extensions de Picard-Vessiot de K. On désigne par V un $\mathcal{O}$-module libre de rang n, et par ∇ la contraction avec ∂ d'une connexion sur V, i.e.

une application k-linéaire de V vérifiant :

$$\nabla(av) = \partial(a)v + a\nabla v;\ \forall a \in \mathcal{O} \quad \text{et} \quad \forall v \in V.$$

Par abus de langage on dira encore que ∇ est une connexion sur V. Un opérateur L de $\mathcal{D}_K$, est dit unitaire si le coefficient dominant de L, par rapport à ∂, est égal à 1.

1.1. $\mathcal{D}$-module

Si V est muni d'une connexion ∇, on définit une structure de $\mathcal{D}$-module à gauche sur V en posant :

$$\left(\sum_{i=0}^{m} a_i\partial^i\right) v = \sum_{i=0}^{m} a_i\nabla^i(v),\ a_i \in \mathcal{O} \quad \text{et} \quad v \in V.$$

Inversement, si V est un $\mathcal{D}$-module à gauche libre de type fini en tant que $\mathcal{O}$-module, on définit une connexion sur V en posant $\nabla x = \partial x$ pour tout $x \in V$. La donnée d'une connexion ∇ sur V est ainsi équivalente à la donnée d'une structure de $\mathcal{D}$-module sur V.

Si $L \in \mathcal{D}$ est unitaire en ∂, $\mathcal{D}/\mathcal{D}L$ est un $\mathcal{O}$-module libre de type fini, naturellement muni d'une structure de $\mathcal{D}$-module. On dira qu'un couple (V, ∇) est un *$\mathcal{D}$-module cyclique* s'il est isomorphe à un $\mathcal{D}$-module du type $\mathcal{D}/\mathcal{D}L$ où L est un élément de $\mathcal{D} = \mathcal{O}[\partial]$ unitaire. Par extension des scalaires, on obtient un K-espace vectoriel $V_K = K \underset{\mathcal{O}}{\otimes} V$, dont la dimension est le rang de V en tant que $\mathcal{O}$-module libre. On définit une connexion sur V_K, notée de la même manière ∇ par la formule

$$\nabla(a \otimes v) = \partial(a) \otimes v + a \otimes \nabla(v), \text{ pour tout } a \in K,\ v \in V.$$

Comme plus haut, la connexion ∇ sur V_K munit V_K d'une structure de $\mathcal{D}_K = K[\partial]$-module.

1.1.1. Définition

On dit que deux opérateurs unitaires L_1 et L_2 de $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}_K$) sont équivalents si les $\mathcal{D}$-modules $\mathcal{D}/\mathcal{D}L_1$ et $\mathcal{D}/\mathcal{D}L_2$ (resp. $\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K L_1$ et $\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K L_2$) sont isomorphes.

1.1.2. Remarque

Les propriétés suivantes (dont on trouvera une démonstration dans [S], §2) nous seront utiles. Soient L_1 et L_2 deux éléments de $\mathcal{D}_K$ de même ordre et unitaires en ∂. Alors, L_1 et L_2 sont équivalents si et seulement si il existe $L_3 \in \mathcal{D}_K$, sans facteur commun à droite avec L_1, et $L_4 \in \mathcal{D}_K$ tels que $L_2 \circ L_3 = L_4 \circ L_1$.

Soit $\widehat{K}$ une extension de Picard-Vessiot de K, contenant des extensions de Picard-Vessiot de L_1 et L_2, soient V_1 et V_2 les espaces des solutions respectifs de $L_1(y) = 0$ et de $L_2(y) = 0$, et soit G le groupe de Galois différentiel de $\widehat{K}$. Les opérateurs L_1 et L_2 sont alors équivalents si et seulement si les G-modules V_1 et V_2 sont isomorphes (cet isomorphisme est donné par l'action naturelle sur $V_1 \subset \widehat{K}$ de L_3, qu'on peut d'ailleurs choisir d'ordre strictement inférieur à celui de L_1 ; voir [S], Lemme 2.5).

1.1.3. LEMME. — *Soient V et W deux $\mathcal{D}$-modules cycliques. Si les $\mathcal{D}_K$-modules V_K et W_K sont $\mathcal{D}_K$-isomorphes, alors V et W sont $\mathcal{D}$-isomorphes.*

Preuve. — Par définition, soient L_1 et L_2 deux opérateurs unitaires de $\mathcal{D}$ tels que V (resp. W) soit isomorphe à $\mathcal{D}/\mathcal{D}L_1$ (resp. $\mathcal{D}/\mathcal{D}L_2$). Le $\mathcal{D}_K$-module V_K (resp. W_K) est alors isomorphe à $\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K L_1$ (resp. $\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K L_2$).

Soit $\Psi : \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K L_1 \to \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K L_2$ un isomorphisme de $\mathcal{D}_K$-modules. Comme la classe de 1 engendre le $\mathcal{D}_K$-module $\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K L_1$, l'isomorphisme Ψ est entièrement défini par $\Psi(1) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} b_i(x)\partial^i$, où $b_i(x)$ est un élément de K et n est l'ordre commun de L_1 et L_2.

On suppose qu'il existe j tel que $b_j(x) \notin \mathcal{O}$. Soit $\alpha \in k$ un pôle de $b_j(x)$ et $v_\alpha(\Psi(1))$ le minimum (strictement négatif) des ordres des $b_i (i = 0, 1, ..., n-1)$ en α. Alors :

$$v_\alpha[\partial^m(\Psi(1))] = v_\alpha(\Psi(1)) - m, \text{ pourtout } m \in \mathbb{N}.$$

En effet, si $L_2 = \partial^n + \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i(x)\partial^i$, avec $a_i \in \mathcal{O}$, alors $\partial(\Psi(1)) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k(x)\partial^k$,

avec : $c_o = \partial b_0 - a_{n-1}a_0$ et $c_k = \partial b_k + b_{k-1} - a_k b_{n-1}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

D'où :

$$v_\alpha(\partial\Psi(1)) = v_\alpha(\Psi(1)) - 1.$$

Or, pour tout entier $m \geqslant 0$, $\partial^m.1$ appartient au sous $\mathcal{O}$-module $\bigoplus\limits_{i=0}^{n-1} \mathcal{O}\,\partial^i$ de $\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K L_1$. Donc, $\Psi(\partial^m 1)$ qui est égal à $\partial^m\Psi(1)$ appartient à un sous $\mathcal{O}$-module de type fini de $\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K L_2$. Par conséquent, $v_\alpha(\partial^m\Psi(1))$ reste bornée inférieurement quand m tend vers l'infini ; c'est la contradiction recherchée et on a $b_i(x) \in \mathcal{O}$ pour $i = 0, ..., n-1$.

L'application $\widetilde{\Psi} : \mathcal{D}/\mathcal{D}L_1 \to \mathcal{D}/\mathcal{D}L_2$, définie par $\widetilde{\Psi}(1) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i(x)\partial^i$, est donc bien définie sur $\mathcal{O}$ et le même argument, appliqué à Ψ^{-1}, montre que $\widetilde{\Psi}$ est un isomorphisme sur $\mathcal{O}$.

1.1.4. CONSÉQUENCE

i) Si L_1 et L_2 sont deux opérateurs unitaires de $\mathcal{D}$ et

$$\Psi \in \mathrm{Isom}_{\mathcal{D}_K}(\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K L_1,\ \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K L_2),$$

alors le déterminant de Ψ est un élément non nul de k.

En effet, le lemme 1.1.3 entraîne que $\det(\Psi)$ est un élément inversible de $k[x]$.

ii) Soit $L_i = \partial - \alpha_i(x)$, $i = 1, 2$, deux éléments de $\mathcal{D}_K$. On sait que L_1 et L_2 sont équivalents si et seulement si il existe $\beta(x) \in K$ tel que $\alpha_2 = \alpha_1 + \dfrac{\beta'}{\beta}$.

On en déduit que si α_1 et α_2 appartiennent à $\mathcal{O}$, l'opérateur L_1 est équivalent à l'opérateur L_2 si et seulement si $\alpha_1 = \alpha_2$.

1.1.5. DÉFINITION

Un élément de $\mathcal{D}_K$ est dit réductible (resp. totalement réductible) s'il se décompose en produit d'au moins deux facteurs d'ordres $\geqslant 1$ (resp. en produit de facteurs d'ordre 1).

Un élément de $\mathcal{D}$ peut être réductible sur $\mathcal{D}_K$ sans l'être sur $\mathcal{D}$ (voir [Be2] §3. c)).

1.2. Facteurs déterminants

Soit $\widetilde{K} = k((1/x))$ le corps des séries méromorphes formelles à coefficients dans k au voisinage de l'infini (k est un corps de caractéristique zéro algébriquement clos), muni de sa dérivation usuelle $\partial = \dfrac{d}{dx}$ et de sa valuation $1/x$-adique v. Si $\overline{K}$ désigne la clôture algébrique de $\widetilde{K}$, la valuation et la dérivation s'étendent de façon unique à $\overline{K}$. Par exemple si $a \in k[x]$ est un polynôme de degré $\deg(a)$, on a $v(a) = -\deg(a)$. Plus généralement, on posera $\deg(a) = -v(a)$ pour tout $a \in \overline{K}$. Soit $\mathcal{L} = \partial^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \partial^i$, $a_i \in \widetilde{K}$, un opérateur différentiel à coefficient dans $\widetilde{K}$. Le théorème de Hukuhara et Turrittin (voir [Y]) montre l'existence (dans une extension de Picard-Vessiot correspondante de $\widetilde{K}$) d'une base $\{u_1, ..., u_n\}$ de solutions de $\mathcal{L}$, de la forme :

$$u_i(x) = (\exp K_i(x))(1/x)^{\lambda_i} v_i(1/x), \quad (i = 1, ..., n),$$

où $K_i(x)$ est un polynôme en $x^{1/q}$ (pour un certain entier naturel q) sans terme constant, λ_i est un élément de k, $(1/x)^{\lambda_i}$ est une solution (dans une extension de Picard-Vessiot de $\widetilde{K}$) de l'équation différentielle $y' = -(\lambda_i/x)y$ et

$$v_i(x) = \sum_{j=0}^{n_i} v_{i,j}(1/x)(\mathrm{Log} x)^j,$$

où

$$v_{ij}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_{i,j,k} x^{-k/q} \in \overline{K}.$$

Les polynômes $K_i (i = 1, ..., n)$ sont appelés les *facteurs déterminants* de $\mathcal{L}$. On dit que $\mathcal{L}$ est de *caractéristique simple*, si pour tout couple (i, j) d'indices distincts dans $\{1, 2, ..., n\}$ on a :

$$\deg(K_i - K_j) = \deg(K_i).$$

1.2.1. LEMME. — *Soit* $\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} a_i \partial^i + Q_m(x)$, $a_n = 1$, *un opérateur d'Airy de bidegré* (n, m). *Alors,* $\mathcal{L}$ *est de caractéristique simple et les facteurs déterminants* $K_1, ..., K_n$ *sont des polynômes en* $x^{1/n}$ *de degré* $\frac{n+m}{n}$ *sans terme constant. Leurs dérivées* $K_i' = R_i$, $(i = 1, .., n)$, *sont dans le cas* $m \geqslant n$, *les solutions de l'inégalité :*

$$\deg(R^n + a_{n-1}R^{n-1} + Q_m(x)) \leqslant \frac{mn - m - n}{n},$$

où $R \in \overline{K}$ *désigne un polynôme en* $x^{1/n}$.

Preuve. — Les facteurs déterminants sont les primitives H, sans terme constant, des polynômes de Puiseux H' tels que l'opérateur

$$\mathcal{L}(\partial + H') = e^{-H} L(\partial) e^{H} = \sum_{i=1}^{n} a_i (\partial + H')^i + \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$$

admette un polygône de Newton ayant un côté de pente nulle (voir [Y], § 2, p. 142). On en déduit que les polynômes H_j', $j = 1, ..., n$ sont de degré m/n et que les coefficients de leurs termes dominants en $x^{m/n}$ sont les solutions

$$\alpha_{j,n} = \sqrt[n]{-b_m} e^{\frac{2\sqrt{-1}\pi j}{n}}, \quad (j = 1, \ldots, n),$$

de l'équation $\alpha^n + b_m = 0$. Comme $\alpha_{i,m} - \alpha_{j,m} \neq 0$, pour tout couple (i,j) d'indices distincts dans $\{1,2,...,n\}$, $\mathcal{L}$ est de caractéristique simple. On pose :

$$P_{\mathcal{L}}(x,\xi) = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi^i + Q_m(x).$$

Si ξ est une solution dans $\overline{K}$ de $P_{\mathcal{L}}(x,\xi) = 0$, on notera $\xi_{>-1}$ la somme finie des monômes intervenant dans le développement de Puiseux de ξ dans $\overline{K}$ de degré strictement supérieur à -1. D'après ([F], [H, K], [Y]), les dérivées $H_1', ..., H_n'$ des facteurs déterminants sont donc égales à $(\xi_i)_{>-1}$, $i = 1, ..., n$, (moyennant une permutation), où $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sont les racines dans $\overline{K}$ de $P_{\mathcal{L}}(x,\xi) = 0$. Si H est un facteur déterminant de $\mathcal{L}$, alors $H + \dfrac{a_{n-1}}{n}x$ est un facteur déterminant de $\mathcal{L}\left(\partial - \dfrac{a_{n-1}}{n}\right)$. On pourra donc supposer, sans perte de généralité, que $a_{n-1} = 0$. Montrons que pour toute solution ξ de $P_{\mathcal{L}}$, la partie $R = \xi_{>-1}$ de ξ vérifie dans le cas $m \geqslant n$:

$$\deg(R^n + Q_m(x)) \leqslant \frac{nm - m - n}{n}.$$

L'équation $P_{\mathcal{L}}(x,\xi) = 0$ entraîne

$$\xi^n + Q_m = -\sum_{i=1}^{n-2} a_i \xi^i \,;$$

le degré de ξ^i étant égal à $i\dfrac{m}{n}(i = 1, ..., n-2)$ et a_i étant constant, on en déduit,

$$\deg(\xi^n + Q_m) \leqslant (n-2)\frac{m}{n};$$

l'entier m étant supérieur ou égal à n, l'inégalité précédente entraîne

$$\deg(\xi^n + Q_m) \leqslant \frac{nm - m - n}{n}.$$

En posant $\xi_{\leqslant -1} = \xi - R$, on a

$$\begin{aligned}
\xi^n + Q_m &= (R + \xi_{\leqslant -1})^n + Q_m \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} R^{n-k} (\xi_{\leqslant -1})^k + Q_m;
\end{aligned}$$

le degré de $R^{n-k}(\xi_{\leqslant -1})^k$ étant inférieur ou égal à $\dfrac{nm - k(m+n)}{n}$, qui est inférieur ou égal à $\dfrac{nm - m - n}{n}$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, on en déduit,

$$\deg(R^n + Q_m) \leqslant \frac{nm - m - n}{n}.$$

Inversement, soit H un polynôme en $x^{1/n}$ sans terme constant, dont la dérivée, $H' = R$, vérifie :

$$\deg(R^n + Q_m) \leqslant \frac{nm - m - n}{n}.$$

Montrons que H est un facteur déterminant de $\mathcal{L}$.

Soit α un élément de $\overline{K}$. On définit $\alpha^{[k]}$, $k \in \mathbb{N}$, de la façon suivante :

$$\alpha^{[0]} = 1,\ \alpha^{[1]} = \alpha$$
$$\alpha^{[k+1]} = \alpha\alpha^{[k]} + (\alpha^{[k]})'$$

on a : $\mathcal{L}(\partial + R) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \partial^i$

où $c_0 = Q_m + \sum\limits_{j=1}^{n} a_j R^{[j]}$ et $c_i = \sum\limits_{j=0}^{n-i} \binom{i+j}{i} a_{i+j} R^{[j]}$, $i \in \{1, ..., n\}$.

Comme le degré de $R^{[j]}$ est égal à $j\dfrac{m}{n}$, $j = 1, ..., n$, les a_i, $i = 1, ..., n-1$, étant des éléments de k, et $a_n = 1$, l'inégalité deg $(R^n + Q_m) \leqslant \dfrac{nm - m - n}{n}$ entraîne :

$$\deg(c_0) \leqslant \deg(c_1) - 1$$

et

$$\deg(c_i) - i < \deg(c_1) - 1 \text{ pour tout } i > 1.$$

On déduit de ces inégalités que *l'équation indicielle* (cf [I], p. 160) de $\mathcal{L}(\partial + R)$ est de degré 1. Par conséquent, $\mathcal{L}(\partial + R)$ est divisible à droite par un opérateur fuchsien, et K est bien un facteur déterminant de $\mathcal{L}$.

1.2.2. REMARQUES

1.2.2.1. Si $Q_m(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} b_i x^i$, $m = qn + r$, $q \geqslant 1$ et $0 < r < n$, alors les facteurs déterminants, $K_i (i = 1, ..., n)$ de $\mathcal{L}$, sont d'après le lemme 1.2.1 de la forme

$$K_i(x) = x^{1+m/n} \left[\frac{n}{n+m}\alpha_0 + \frac{n}{m}\frac{\alpha_n}{x} + ... + \frac{n}{m-(q-1)n}\frac{\alpha_{qn}}{x^q} + \frac{\alpha_m}{x^{m/n}} + \frac{n}{m-qn}\frac{\alpha_{(q+1)n}}{x^{q+1}}\right]$$

où les coefficients α_{kn}, $0 \leqslant k \leqslant q+1$, et α_m dépendent seulement de $(a_{n-1}, b_m, b_{m-1}, ..., b_{m-(q+1)})$.

1.2.2.2. Si $m = qn$, avec $q \geqslant 1$ alors

$$K_i(x) = x^{1+q} \sum_{k=0}^{q} \frac{\alpha_{kn}}{q+1-k} x^{-k}$$

où les coefficients α_{kn}, $0 \leqslant k \leqslant q$, dépendent seulement de $(a_{n-1}, b_m, b_{m-1}, \dots, b_{m-q})$.

1.3. Transformation de Fourier

Un opérateur L de $\mathcal{D}$ s'écrit d'une façon unique sous la forme $L = \sum_{i=0}^{N} a_i(x)\partial^i$, $a_i \in \mathcal{O}$. On appelle *transformée de Fourier* (relativement à ∂) de L, l'opérateur $\mathcal{F}(L)$ défini par :

$$\mathcal{F}(L) = \sum_{i=0}^{N} a_i(\partial)(-x)^i$$

La transformation $\mathcal{F}$ est bien définie sur $\mathcal{D}$ et vérifie :

$$\mathcal{F}(L+M) = \mathcal{F}(L) + \mathcal{F}(M), \quad \forall L, M \in \mathcal{D},$$
$$\mathcal{F}(LM) = \mathcal{F}(L)\mathcal{F}(M) \qquad (*).$$

En effet, on a : $\mathcal{F}(\partial x^k \partial^\ell) = \mathcal{F}(\partial)\mathcal{F}(x^k\partial^\ell)$ car

$$\partial^k x = k\partial^{k-1} + x\partial^k, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

et

$$x\partial^k x^\ell = \partial^k x^{\ell+1} - k\partial^{k-1}x^\ell.$$

Par suite,

$$\mathcal{F}(\partial M) = \mathcal{F}(\partial)\mathcal{F}(M), \quad \forall\, M \in \mathcal{D},$$

et

$$\mathcal{F}(\partial^j x^k \partial^\ell) = \mathcal{F}(\partial^j)\mathcal{F}(x^k\partial^\ell).$$

D'autre part

$$\mathcal{F}(x^m L) = \mathcal{F}(x^m)\mathcal{F}(L),$$

d'où la relation (*) par linéarité.

La transformation $\mathcal{F}$ est une bijection k-linéaire de $\mathcal{D}$ sur lui-même, et $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de l'anneau $\mathcal{D}$ sur lui-même. En notant $[-1]^*$ l'isomorphisme $\mathcal{F}^2$ (cf [Ka2], § 2.10 p. 71), on a,

$$\mathcal{F}^2(L) = [-1]^* L = \sum_{i=0}^{N} a_i(-x)(-\partial)^i.$$

Une conséquence immédiate de ce qui précéde est que $L \in \mathcal{D}$ est réductible dans $\mathcal{D}$ si et seulement si $\mathcal{F}(L)$ est réductible dans $\mathcal{D}$.

Si $L \in \mathcal{D}$ est donné par $L = \sum_{i=0}^{N} a_i(x)\partial^i$, alors $L^v = \sum_{i=0}^{N}(-\partial)^i a_i$ s'appelle l'opérateur *dual formel* (ou adjoint) de L. On a alors ([Ka2], p. 71) :

$$\mathcal{F}(L^v) = [-1]^*(\mathcal{F}(L))^v.$$

Soit $L \in \mathcal{D}$. En modifiant un peu la notion d'opérateur unitaire, on dira que L est *biunitaire* si les coefficients dominants de L par rapport à ∂ et à x sont des unités de $\mathcal{O}$.

1.3.1. PROPOSITION. — *Soit $L \in \mathcal{D}$ un opérateur biunitaire. L est réductible dans $\mathcal{D}_K$ si et seulement si $\mathcal{F}(L)$ est réductible dans $\mathcal{D}_K$.*

Preuve. — Il suffit de démontrer la condition nécessaire.

On suppose que $\mathcal{F}(L)$ est irréductible dans $\mathcal{D}_K$. Si $L = L_1 ... L_r$, $r > 1$, est une décompostion de L en produit de facteurs irréductibles dans $\mathcal{D}_K$, il existe $p \in \mathcal{O}$, $p \neq 0$, tel que $pL = L'_1 ... L'_r$, où pour $i \in \{1, ..., r\}$, L'_i est un élément de $\mathcal{D}$ d'ordre strictement positif. On a :

$$\mathcal{F}(p)\mathcal{F}(L) = \mathcal{F}(L'_1) ... \mathcal{F}(L'_r),\ r > 1,$$

où $\mathcal{F}(p)$, polynôme non nul de $k[\partial]$, s'écrit :

$$\mathcal{F}(p) = \lambda \prod_{i=1}^{s}(\partial - \alpha_i), \quad \text{où } \lambda, \alpha_1 ..., \alpha_s \in k.$$

Ainsi,

$$\mathcal{F}(L'_1) ... \mathcal{F}(L'_r) = \lambda \prod_{i=1}^{s}(\partial - \alpha_i)\mathcal{F}(L), \qquad (*)$$

est une décomposition en produit de facteurs irréductibles du produit $(\mathcal{F}(L'_1)$ ... $\mathcal{F}(L'_r))$ dans $\mathcal{D}_K$. Les facteurs irréductibles intervenant dans la décomposition de l'un des $\mathcal{F}(L'_i)$, $i \in \{1, ..., r\}$, seraient $\mathcal{D}_K$-équivalents à $\partial - \alpha_j$, pour certains j dans $\{1, ..., s\}$ (voir [S] proposition 2.11), et seraient donc de la forme $\partial - \alpha_j - \frac{\beta'_j}{\beta_j}$, avec $\beta_j \in K$ (voir conséquence 1.1.4 ii)). Mais $\mathcal{F}(L)$ est biunitaire, et la relation (*) entraîne que le coefficient dominant de $\mathcal{F}(L'_i)$ par rapport à ∂ est une constante non nulle. L'opérateur $\mathcal{F}(L'_i)$ s'écrit alors : $\mathcal{F}(L'_i) = a \prod_{j \in \mathcal{J}} \left(\partial - \alpha_j - \frac{\beta'_j}{\beta_j}\right)$, où $\mathcal{J}$ est un sous-ensemble non vide de $\{1, 2, ..., s\}$ et $a \in k^*$. Si l'on pose $\beta_j = \dfrac{p_j}{q_j}$, où p_j et $q_j \in \mathcal{O}$, on a alors

$$\partial - \alpha_j - \frac{\beta_j'}{\beta_j} = \partial - \alpha_j - \frac{p_j'}{p_j} + \frac{q_j'}{q_j} = \frac{1}{p_j q_j}[(\partial - \alpha_j)p_j - 2p_j']q_j$$

et

$$\begin{aligned}\left[\partial - \alpha_{j-1} - \frac{p_{j-1}'}{p_{j-1}} + \frac{q_{j-1}'}{q_{j-1}}\right] \frac{1}{p_j q_j} \\ = \frac{1}{p_j^2 q_j^2 p_{j-1} q_{j-1}}[(\partial - \alpha_{j-1})p_j q_j p_{j-1} - 2(p_j q_j p_{j-1})']q_{j-1},\end{aligned}$$

ce qui entraîne que pour tout j dans $\mathcal{J}$ il existe H_j dans $\mathcal{O}$, non nul, tel que

$$\left\{\prod_{j \in \mathcal{J}} (H_j q_j)\right\} \mathcal{F}(L_i') = a \prod_{j \in \mathcal{J}} [(\partial - \alpha_j)H_j - 2H_j']q_j.$$

En appliquant la transformation de Fourier aux deux membres de l'égalité précédente, on obtient

$$\left\{\prod_{j \in \mathcal{J}} H_j(\partial) q_j(\partial)\right\} [-1]^* L_i' = \prod_{j \in \mathcal{J}} \{(-x - \alpha_j)H_j(\partial) - 2H_j'(\partial)\} q_j(\partial).$$

La comparaison de l'ordre des deux opérateurs entraîne que l'ordre de $[-1]^* L_i'$ est nul, ce qui est absurde.

1.3.2. Proposition. — *Deux éléments de $\mathcal{D}$ biunitaires sont $\mathcal{D}_K$-équivalents si et seulement si leurs transformées de Fourier sont $\mathcal{D}_K$-équivalentes.*

Preuve. — Soient L_1 et L_2 deux éléments de $\mathcal{D}$ biunitaires, $\mathcal{D}_K$-équivalents. Il existe alors L_3 dans $\mathcal{D}_K$, sans facteur commun à droite avec L_1, et $L_4 \in \mathcal{D}_K$ tels que : $L_2 \circ L_3 = L_4 \circ L_1$, (cf § 1.1.2 Remarque). Le lemme 1.1.3 prouve que l'on peut choisir L_3 dans $\mathcal{D}$, et donc L_4 dans $\mathcal{D}$. En appliquant la transformée de Fourier aux deux membres, on obtient :

$$\mathcal{F}(L_2)\mathcal{F}(L_3) = \mathcal{F}(L_4)\mathcal{F}(L_1).$$

Pour montrer la condition nécessaire, il suffit de prouver que $\mathcal{F}(L_1)$ et $\mathcal{F}(L_3)$ sont premiers entre eux dans $\mathcal{D}_K$. Puisque L_1 et L_3 sont premiers entre eux, il existe A, B dans $k[x, \partial]$ et C dans $k[x]$ tel que :

$$AL_1 + BL_3 = C.$$

Si $C = 1$, alors $\mathcal{F}(L_1)$ et $\mathcal{F}(L_3)$ sont premiers entre eux dans $\mathcal{D}_K$. Sinon, $C = \prod_{i=1}^{r}(x - a_i)$, avec $a_i \in k$. En appliquant la transformation de Fourier à la relation précédente, on en déduit que le pgcd D de $\mathcal{F}(L_1)$ et $\mathcal{F}(L_3)$ dans $\mathcal{D}_K$ divise $\prod_{i=1}^{r}(\partial - a_i)$. On suppose que l'opérateur D est différent de 1. Il possède donc un facteur à droite $\mathcal{D}_K$-équivalent à l'un des $\partial - a_i$, donc de la forme $\partial - a - g'/g$, où $a \in k$ et $g \in k(x)$. Dans ces conditions $g(x)e^{ax}$ est une solution de l'équation différentielle $\left(\prod_{i=1}^{r}(\partial - a_i)\right) y = 0$, ce qui prouve que g est un polynôme. On pose $y(x) = g(-x)e^{-ax}$ et on note $\mathcal{L}(y)$ la transformée de Laplace de y. En remarquant que y est une solution de l'équation différentielle $([-1]^*\mathcal{F}(L_1))u = 0$, et que

$$\mathcal{F}^2(L_1)\mathcal{L}(y) - \mathcal{L}([-1]^*\mathcal{F}(L_1)y)$$

est un polynôme, on en déduit que $[-1]^*L_1(\mathcal{L}(y))$ est un polynôme. Or, si g est un polynôme non nul, $\mathcal{L}(y)$ est une fraction rationnelle ayant un pôle au point $-a$. Comme $[-1]^*L_1$ est un opérateur différentiel unitaire d'ordre strictement positif, $[-1]^*L_1\mathcal{L}(y)$ n'est jamais un polynôme. Donc g est le polynôme nul et $D = 1$.

Inversement, $\mathcal{F}(L_1)$ et $\mathcal{F}(L_2)$ étant biunitaires, le même raisonnement permet de conclure.

1.3.3. Exemple. — Soient $L_1 = \partial^2 - (x^4 + 2x^2 + 2x + 2)$ et $L_2 = \partial^2 - (x^4 + 2x^2 - 2x + 2)$. L'homomorphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}L_1, \mathcal{D}/\mathcal{D}L_2)$ défini par $\varphi(1) = 1 + x^2 + \partial$ est un isomorphisme. On vérifie facilement que l'homomorphisme $\Psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}\mathcal{F}(L_1),\ \mathcal{D}/\mathcal{D}\mathcal{F}(L_2))$ défini par $\Psi(1) = \mathcal{F}(\varphi(1) = 1 - x + \partial^2$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}$-module.

2. Critères de réductibilité

2.1. Généralités

Katz a montré ([Ka], page 26) qu'un opérateur d'Airy de bidegré (n, m) où n et m sont premiers entre eux, est irréductible dans $\mathcal{D}_K$.

2.1.1. Proposition. — *Soit* $L = \sum_{i=1}^{n} a_i\partial^i + Q_m(x)$ *un opérateur d'Airy de bidegré* (n, m)*, avec* $n \leqslant m$*, et* $\int R_i(x^{1/n})dx$*,* $i = 1, \dots, n$*, ses facteurs déterminants. L'opérateur* L *est réductible dans* $\mathcal{D}_K$ *avec un facteur à droite (resp. à gauche) d'ordre 1 si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :*

i) *n divise m*

ii) *il existe i dans $\{1, ..., n\}$ tel que l'équation différentielle $L(\partial + R_i)(u) = 0$ (resp. $L^v(\partial - R_i)(u) = 0$) possède une solution polynôme.*

Preuve. — Il existe une base $y_1, ..., y_n$ de n solutions de L, vérifiant (cf. § 1.2)

$$y_i = e^{\int R_i(x^{1/n})dx} u_i(x),$$

les polynômes R_i étant distincts (lemme 1.2.1), et u_i étant donné par

$$u_i(x) = x^{\lambda_i} \sum_{j=0}^{n_i} u_{ij} x^{-j/n}, \ i = 1, 2, ..., n.$$

Si l'opérateur L admet un facteur à droite d'ordre 1 alors il existe i tel que $\dfrac{y_i'}{y_i} = r \in K$, ce qui entraîne

$$R_i(x^{1/n}) + \frac{u_i'(x)}{u_i(x)} = r \in K,$$

où r s'écrit $r = r_\infty + r_0$, r_∞ désignant la partie principale à l'infini dans $k[x]$ et $r_0(\infty) = 0$.

On a

$$\frac{u_i'}{u_i} = \frac{\lambda_i}{x} + \sum_{j \geqslant 0} \omega_{i,j} x^{-j/n},$$

ce qui entraîne que $R_i(x^{1/n}) = r_\infty(x)$ est dans $k[x]$; le degré de $R_i(x^{1/n})$, égal à $\dfrac{n+m}{n}$ (Lemme 1.2.1), est donc un entier naturel, et n divise m. Comme u_i est une solution de l'équation différentielle $L(\partial + R_i)u = 0$, qui n'a de singularités qu'à l'infini, le théorème de Cauchy entraîne que u_i est analytique sur $\mathbb{C}$. Par ailleurs, u_i est à croissance modérée à l'infini car elle correspond au facteur fuchsien d'ordre 1 de $L(\partial + R_i)$ à l'infini (voir Preuve 1.2.1), et u_i est dans $k[x]$.

Inversement, si n divise m, la remarque 1.2.2.2 entraîne que les facteurs déterminants $\int R_i (i = 1, ..., n)$ sont des éléments de $k[x]$. Soit u_i une solution polynôme de l'équation différentielle $L(\partial + R_i)u = 0$. En posant $y = e^{\int R_i} u_i$, y est une solution de $L(y) = 0$ et $\partial - R_i - \dfrac{u_i'}{u_i} \in \mathcal{D}_K$ divise l'opérateur L à droite.

Si l'opérateur L est réductible avec un facteur à gauche d'ordre 1, le dual formel L^ν de L qui est un opérateur d'Airy de bidegré (n, m) est alors réductible avec un facteur à droite d'ordre 1, ce qui entraîne que n divise m. Les facteurs déterminants de L^{ν} étant les opposés des facteurs déterminants de L, on conclut en appliquant le résultat précédent.

Dans la suite de ce paragraphe 2, on considère un opérateur d'Airy $L = \sum_{i=1}^{n} a_i\partial^i + Q_m(x)$ de bidegré (n, m) réductible. La proposition 1.3.1 permet de se restreindre au cas $n \leqslant m$. Si $n \leqslant 3$, la proposition 2.1.1 entraîne $m = nr$, avec $r \geqslant 1$. Enfin, les opérateurs L et $L\left(\partial - \dfrac{a_{n-1}}{na_n}\right)$ étant simultanément réductibles ou non, on supposera pour la suite de ce paragraphe, sans perte de généralité, que le coefficient de ∂^{n-1} de L est nul.

2.2. Opérateurs d'ordre 2

Il est bien connu (voir par exemple [D, L-R]) que l'opérateur $\partial^2 - q$ est réductible dans $\mathbb{C}(x)[\partial]$ si et seulement si l'équation de Ricatti $u' + u^2 = q$ possède une solution dans $\mathbb{C}(x)$. L'analyse des facteurs déterminants aux paragraphes 1.2 et 2.1 précédents fournit le critère plus maniable étudié ci-dessous. Tout d'abord, remarquons que tout polynôme de degré $2r$ peut s'écrire sous la forme $\left(\sum_{i=0}^{r} b_i x^i\right)^2 + \sum_{j=0}^{r-1} d_j x^j$ (car k est algébriquement clos). Sans perte de généralité, on écrira les opérateurs L de bidegré $(2, 2r)$ sous la forme suivante :

$$L = \partial^2 - \left[\left(\sum_{j=0}^{r} b_j x^j\right)^2 + \sum_{j=0}^{r=1} d_j x^j\right], \quad \text{où } b_r \neq 0. \text{ On posera } R = \sum_{j=0}^{r} b_j x^j.$$

2.2.1. Proposition. — *L'opérateur L est réductible si et seulement si pour $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$, l'équation différentielle $L(\partial + \varepsilon R)(u) = (\partial^2 + 2\varepsilon R\partial + \left[\varepsilon R' - \sum_{j=0}^{r-1} d_j x^j\right])(u) = 0$ possède une solution polynôme.*

Preuve. — Du lemme 1.2.1, on déduit que les facteurs déterminants de L sont les primitives sans terme constant des εR, $\varepsilon = \pm 1$ car $\deg(R^2 - Q) = r - 1$. Si l'opérateur L est réductible dans $\mathcal{D}$, il se décompose en produit de deux facteurs d'ordre 1. La proposition 2.1.1 permet alors de conclure.

2.2.2. Corollaire. — *Si L est réductible alors il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{d_{r-1}}{(2s + r)b_r}$ est une racine carrée de l'unité.*

Preuve. — La proposition 2.2.1 entraîne que pour $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$, l'équation différentielle

$$L(\partial + \varepsilon R)(u) = \left(\partial^2 + 2\varepsilon R\partial + \left[\varepsilon R' - \sum_{j=0}^{r-1} d_j x^j\right]\right)(u) = 0$$

possède une solution polynôme. Soit s son degré. L'identification des coefficients du terme de plus haut degré dans l'équation $L(\partial + \varepsilon R)u = 0$ entraîne

$$\varepsilon r b_r - d_{r-1} + 2\varepsilon s b_r = 0, \text{ où } \varepsilon = \pm 1.$$

2.2.3. COROLLAIRE. — *L'opérateur $L = \partial^2 - (a^2x^2 + 2abx + c)$, où a, b, c, $\in k$ et $a \neq 0$, est réductible si et seulement si il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{b^2 - c}{(2s+1)a}$ est une racine carré de l'unité.*

Preuve. — La condition nécessaire est une conséquence du corollaire 2.2.2. Inversement, on suppose qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon = \dfrac{b^2 - c}{(2s+1)a}$ soit une racine carré de l'unité. Soit $k_s[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur où égal à s. L'opérateur

$$L(\partial - \varepsilon(ax + b)) = \partial^2 - 2\varepsilon(ax + b)\partial + 2\varepsilon a s$$

est une application linéaire de $k_s[x]$ dans $k_{s-1}[x]$, son noyau est non réduit à zéro, ce qui entraîne que l'équation différentielle $L(\partial - \varepsilon(ax + b))(u) = 0$ possède une solution polynôme. De la proposition 2.2.1, on déduit que L est réductible.

On poursuit maintenant, dans un cas particulier, l'étude de la réductibilité des opérateurs d'ordre 2 et de degré supérieur ou égal à 4. Cette étude se rapproche de l'analyse de Liouville, *J. Math pures et appl.*, 1839, 423-456 (référence signalée par M. Van der Put).

2.2.4. EXEMPLE Opérateur de Setoyanagi. [cf. [D, L-R], exemple 4). — Soit $S = \partial^2 - (ax^p + bx^q)$, où a, $b \in \mathbb{C}$, $ab \neq 0$, p, $q \in \mathbb{N}$, et $q < p$.

Si on suppose que l'opérateur S est réductible dans $\mathbb{C}(x)[\partial]$ alors la proposition 2.1.1 entraîne que p est un entier pair. On pose $p = 2m$. Les facteurs déterminants ($\int R$) de S, sont donnés, suivant le lemme 1.2.1, par

$$R = \varepsilon\sqrt{a}x^m \sum_{i=0}^{r} \binom{\frac{1}{2}}{i} (b/a)^i x^{i(q-2m)},$$

où $r = E\left(\frac{m}{2m-q}\right)$ est la partie entière de $\frac{m}{2m-q}$ et $\varepsilon = \pm 1$.

Du corollaire 2.2.2, on déduit qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que si d_{m-1} est le coefficient de x^{m-1} dans $R^2 - [ax^{2m} + bx^q]$ alors on a

$$\frac{d_{m-1}}{(2d+m)\sqrt{a}} = \varepsilon, \text{ avec } \varepsilon = \pm 1.$$

On retrouve ainsi les conditions nécessaires citées par [D, L-R], à savoir : que $\frac{m+1}{2m-q}$ est un entier naturel $s \geqslant 1$ (en effet $(r+1)\,(q-2m)+2m$ est égal à $m-1$), ainsi que la condition

$$d_{m+1} = 2a \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ s \end{pmatrix} (b/a)^s = \varepsilon(2d+m)\sqrt{a},$$

qu'on peut écrire de la façon suivante : il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que

$$\varepsilon\sqrt{a} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ s \end{pmatrix} (b/a)^s - \frac{m}{2} = d.$$

Setoyanagi (cité par [D, L-R], exemple 4) a donné des conditions nécessaires et suffisantes de réductibilité dans le cas $\frac{m+1}{2m-q} = s \leqslant 2$. Pour $s = 2$, il montre que ce cas se ramène au cas $m = q = 1$.

A titre d'application de 2.2.1, on étudiera, dans la suite, le cas $m = 2$ et $q = 3$, (donc $s = 3$) et nous montrerons le résultat ci-dessous.

2.2.5. PROPOSITION. — *L'opérateur $S_1 = \partial^2 - (ax^4 + bx^3)$, où a, $b \in \mathbb{C}$, a ou $b \neq 0$, est irréductible dans $\mathbb{C}(x)[\partial]$.*

Preuve. — Soit $S_1 = \partial^2 - (ax^4 + bx^3)$, avec a et $b \in \mathbb{C}$. Si $a \neq 0$ et $b = 0$ ou bien si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors les corollaires 2.2.2 et 2.2.3 entraînent que S_1 est irréductible. Pour la suite, on supposera que $ab \neq 0$. Le changement de variable $x - \frac{b}{4a}$, préserve les propriétés de réductibilité de l'opérateur S_1. Soit S l'opérateur obtenu après ce changement de variable. On a

$$S = \partial^2 - Q, \text{ où } Q = ax^4 - \frac{3.b^2}{8a}x^2 + \frac{b^3}{8a^2}x - \frac{3b^4}{4^4a^3}.$$

Les facteurs déterminants $\int R$ de S sont donnés suivant le lemme 1.2.1 par

$$R = \varepsilon\sqrt{a}\left[x^2 - \frac{3b^2}{16a^2}\right], \text{ où } \varepsilon = \pm 1.$$

L'opérateur $S(\partial + R)$, noté S^R, est égal à $\partial^2 + 2R\partial + [R^2 + R' - Q]$. Si l'opérateur S est réductible alors l'équation différentielle $S^R(u) = 0$ possède une solution polynôme. Le corollaire 2.2.2 entraîne qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{b^3}{16\varepsilon a^{3/2}} = d + 1$.

On peut supposer que $\varepsilon = 1$. Au besoin, on change l'argument de $\sqrt{a}$. On pose $\alpha = \dfrac{2a}{b}$. Ainsi $\sqrt{a} = 2(d+1)\alpha^3$ et

$$S^R = \partial^2 + [4(d+1)\alpha^3 x^2 - 3(d+1)\alpha]\partial + [-4d(d+1)\alpha^3 x + 3(d+1)^2\alpha^2].$$

L'équation différentielle $S^R(u) = 0$ possède une solution polynôme de degré d si et seulement si S^R, considéré comme opérateur linéaire de $\mathbb{C}_d[x]$ dans lui-même, n'est pas injectif. Ce qui est équivalent à la condition suivante : le déterminant $\Delta(d, \alpha)$ (ci-dessous défini) est nul.

$$\Delta(d,\alpha) = |c_{ij}|_{1 \leqslant i,j \leqslant d+1}, \quad \text{où les } c_{ij} \text{ sont donnés par :}$$

$$c_{ij} = \begin{cases} 3(d+1)^2\alpha^2 & \text{si } j = i \\ -4(d-i+2)(d+1)\alpha^3 & \text{si } j = i-1 \\ -3i(d+1)\alpha & \text{si } j = i+1 \\ i(i+1) & \text{si } j = i+2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\Delta(d, \alpha)$ est un polynôme à deux variables d et α, homogène de degré $2(d+1)$ par rapport à α. Par conséquent, le déterminant $\Delta(d, \alpha)$ est égal à $\mu(d)\alpha^{2(d+1)}$. Il suffit donc de montrer que $\mu(d) \neq 0$ pour conclure à l'irréductibilité de S. Pour cela, on remarque que si d est un entier pair alors $\mu(d)$ est congru à 1 modulo 2 et $\mu(d)$ est non nul. On supposera, pour la suite de la preuve, que d est un entier naturel impair.

Soit (a_{ij}) la matrice obtenue à partir de (c_{ij}) en posant $\alpha = 1$. On considère les déterminants des matrices, d'ordres p, extraites de (a_{ij}) de la façon suivante :

$$\nabla_p = |a_{ij}|_{d-p+2 \leqslant i,j \leqslant d+1} \qquad \text{et} \qquad |a_{ij}| = \mu(d).$$

On a par exemple :

$$\nabla_2 = \begin{vmatrix} 3(d+1)^2 & -3d(d+1) \\ -4(d+1) & 3(d+1)^2 \end{vmatrix} = 3(d+1)^2(3d^2 + 2d + 3)$$

et $\nabla_{d+1} = \mu(d)$, $\nabla_0 = 1$. En développant ∇_{p+1} par rapport à sa première colonne, on obtient la relation de récurrence

(r$_1$)

$$\nabla_{p+1} = (d+1)^2\{3\nabla_p - 12\lambda_{p-1}\nabla_{p-1} + 16\lambda_{p-1}\lambda_{p-2}\nabla_{p-2}\}, \text{ pour } p = 2, ..., d.$$

et

$$\lambda_k = (k+1)(d-k).$$

On se propose de montrer que $\nabla_{p+1} > 4\lambda_p \nabla_p$, pour $p \in \{1, ..., d-1\}$.

En posant pour la suite de la preuve $y = 3(d+1)^2$, on obtient

$$(\mathrm{r}_2) \qquad \begin{cases} \nabla_1 = y \\ \nabla_2 = (y - 4\lambda_0)\nabla_1 > 4\lambda_1 \nabla_1 \\ \nabla_3 = y(y^2 - (4\lambda_0 + 4\lambda_1)y + \frac{16}{3}\lambda_0\lambda_1) > 4\lambda_2\nabla_2 \end{cases}$$

On suppose qu'il existe un entier $q \in \{1, ..., d-1\}$ tel que

$$\nabla_{q+1} \leqslant 4\lambda_q \nabla_q.$$

Soit $p = \mathrm{Inf}\{q / \nabla_{q+1} \leqslant 4\lambda_q \nabla_q\}$. Le système (r_2) entraîne $p \geqslant 4$.

En écrivant

$$\nabla_p > 4\lambda_{p-1}\nabla_{p-1} \text{ et } \nabla_{p+1} \leqslant 4\lambda_p \nabla_p,$$

on déduit de la relation (r_1) que

$$(y - 4\lambda_p)\nabla_p \leqslant 4\lambda_{p-1} y \left[\nabla_{p-1} - \frac{4}{3}\lambda_{p-2}\nabla_{p-2}\right],$$

d'où

$$(\mathrm{r}_3) \qquad \nabla_p \leqslant \frac{4\lambda_{p-1} y}{y - 4\lambda_p} \left[\nabla_{p-1} - \frac{4}{3}\lambda_{p-2}\nabla_{p-2}\right].$$

Les relations

$$\nabla_p = y\left[\nabla_{p-1} - 4\lambda_{p-2}\nabla_{p-2} + \frac{16}{3}\lambda_{p-2}\lambda_{p-3}\nabla_{p-3}\right],$$

et (r_3) entraînent

(r_4)

$$y\left(1 - \frac{4\lambda_{p-1}}{y - 4\lambda_p}\right)\nabla_{p-1} \leqslant 4\lambda_{p-2} y \left[1 - \frac{\frac{4}{3}\lambda_{p-1}}{y - 4\lambda_p}\right]\nabla_{p-2} - \frac{16}{3}\lambda_{p-2}\lambda_{p-3} y \nabla_{p-3}.$$

En remplaçant ∇_{p-1} par son expression dans l'inégalité (r_4) on obtient

$$(\mathrm{r}_5) \qquad \left[y^2\left(1 - \frac{4\lambda_{p-1}}{y - 4\lambda_p}\right) - 4\lambda_{p-2} y \left(1 - \frac{\frac{4}{3}\lambda_{p-1}}{y - 4\lambda_p}\right)\right]\nabla_{p-2}$$

$$\leqslant \left[4\lambda_{p-3}y^2\left(1-\frac{4\lambda_{p-1}}{y-4\lambda_p}\right)-\frac{16}{3}y\lambda_{p-2}\lambda_{p-3}\right]$$
$$\nabla_{p-3}-\frac{16}{3}y^2\left(1-\frac{4\lambda_{p-1}}{y-4\lambda_p}\right)\lambda_{p-3}\lambda_{p-4}\nabla_{p-4}.$$

De la définition de p, on déduit que $\nabla_{p-3} > 4\lambda_{p-4}\nabla_{p-4}$, et la relation (r_5) entraîne alors

$$(\mathrm{r}_6)\qquad y\left[y\left(1-\frac{4\lambda_{p-1}}{y-4\lambda_p}\right)-4\lambda_{p-2}\left(1-\frac{\frac{4}{3}\lambda_{p-1}}{y-4\lambda_p}\right)\right]$$
$$\nabla_{p-2} < 4\lambda_{p-3}y\left[\frac{2}{3}y\left(1-\frac{4\lambda_{p-1}}{y-4\lambda_p}\right)-\frac{4}{3}\lambda_{p-2}\right]\nabla_{p-3}.$$

De même, les relations $\nabla_{p-2} > 4\lambda_{p-3}\nabla_{p-3}$ et (r_6) entraînent

$$y(y-4\lambda_p-4\lambda_{p-1})+4\lambda_{p-2}(y-4\lambda_p)-12\lambda_{p-2}\left(y-4\lambda_p-\frac{4}{3}\lambda_{p-1}\right)<0.$$

Ainsi, on obtient l'inégalité

$$(\mathrm{r}_7)\qquad y^2-y(4\lambda_p+4\lambda_{p-1}+8\lambda_{p-2})+32\lambda_p\lambda_{p-2}+16\lambda_{p-1}\lambda_{p-2}<0.$$

On pose :

$$h(p)=y^2-y(4\lambda_p+4\lambda_{p-1}+8\lambda_{p-2})+32\lambda_p\lambda_{p-2}+16\lambda_{p-1}\lambda_{p-2}$$
$$\text{pour } p\in\{2,\ldots,d-1\}.$$

En dérivant la fonction h par rapport à p et en remplaçant λ_k par son expression $\lambda_k=(k+1)(d-k)$, on obtient

$$h'(p)=8(d-2p+3)(4\lambda_p+2\lambda_{p-1}-y)+4(d-2p-1)(8\lambda_{p-2}-y)$$
$$+4(d-2p+1)(4\lambda_{p-2}-y).$$

Pour $k\in\{0,\ldots,d-1\}$, la fonction λ_k varie entre d et $\dfrac{(d+1)^2}{4}$. Comme $y=3(d+1)^2$, le signe de h' est strictement positif si $p>\dfrac{d+3}{2}$; est strictement négatif si $p<\dfrac{d-1}{2}$ (l'entier d est impair et p est un entier naturel). En calculant $h\left(\dfrac{d-1}{2}\right)$, $h\left(\dfrac{d+1}{2}\right)$ et $h\left(\dfrac{d+3}{2}\right)$, on obtient

$$h\left(\frac{d+1}{2}\right)=16d^2+32d+48,\ h\left(\frac{d+3}{2}\right)=24(d+1)^2,$$

et

$$h\left(\frac{d-1}{2}\right) = 56d^2 + 112d + 120.$$

Pour $p \in \{2, ..., d-1\}$, le minimum de la fonction h est alors $h\left(\frac{d+1}{2}\right)$, strictement positif, ce qui contredit l'inégalité (r_7). Par conséquent,

$$(\mathrm{r}_8) \qquad \nabla_{p+1} > 4\lambda_p \nabla_p, \text{ pour } p \in \{1, ..., d-1\}.$$

En posant $p = d$ dans la relation (r_1) et $p = d-1$ dans la relation (r_8), on obtient

$$\nabla_{d+1} = y\left[\nabla_d - 4\lambda_{d-1}\nabla_{d-1} + \frac{16}{3}\lambda_{d-1}\lambda_{d-2}\nabla_{d-2}\right]$$

et

$$\nabla_d > 4\lambda_{d-1}\nabla_{d-1},$$

ce qui entraîne que $\nabla_{d+1} > \frac{16}{3} y\lambda_{d-1}\lambda_{d-2}\nabla_{d-2}$, et que ∇_{d+1} est strictement positif. Ainsi, on termine la preuve de la proposition 2.2.4.

2.3. Opérateurs d'ordre 3

On reprend les hypothèses de la fin du § 2.1. On remarque que tout polynôme de degré $3r$ peut s'écrire sous la forme $\left(\sum_{j=0}^{r} b_j x^j\right)^3 + \sum_{i=0}^{2r-1} d_i x^i$ (car k est algébriquement clos). Sans perte de généralité, on écrira un opérateur d'Airy L, de bidegré $(3, 3r)$ sous la forme suivante

$$L = \partial^3 + a\partial - \left[\left(\sum_{j=0}^{r} b_j x^j\right)^3 + \sum_{i=0}^{2r-1} d_i x^i\right], \quad \text{avec } b_r \neq 0.$$

2.3.1. Proposition. — *Quand $r \geqslant 2$, l'opérateur L n'est divisible à droite (resp. à gauche) par un opérateur d'ordre 1, que s'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{d_{2r-1}}{3b_r^2(s+r)}$ (resp. $-\frac{d_{2r-1}}{3b_r^2(s+r)}$) soit une racine cubique de l'unité.*

Preuve. — Les facteurs déterminants sont donnés suivant le lemme 1.2.1 par $\int R_i(x)dx$, où $i = 1, 2, 3$, et

$$R_i(x) = \xi_i \sum_{j=o}^{r} b_j x^j, \xi_i \in \{1, j, j^2\}.$$

On déduit de la proposition 2.1.1, qu'il existe i dans $\{1,2,3\}$ tel que l'équation différentielle

$$L^{R_i}(u) = (\partial^3 - 3R_i\partial^2 + [3R_i^2 - 3R_i' + a]\partial + 3R_iR_i' - aR_i - R"_i - \sum_{j=o}^{2r-1} d_jx^j)(u) = 0,$$

possède une solution polynôme. Soit s son degré. De l'identification du coefficient du terme de plus haut degré, on déduit que

$$\frac{d_{2r-1}}{3b_r^2(s+r)} = \xi_i^2.$$

Si l'opérateur L est divisible à gauche par un opérateur d'ordre 1 alors le dual formel L^ν de L est divisible à droite par un opérateur d'ordre 1 et on applique le résultat précédent.

Remarque. — Soit $s \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{d_{2r-1}}{3b_r^2(s+r)}$ soit une racine cubique de l'unité. Si l'opérateur L^{R_i}, considéré comme application linéaire de $k_s[x]$ dans $k_{s+2r-2}[x]$, est de rang $\leqslant s$ alors L est divisible à droite par un opérateur d'ordre 1.

2.3.2. Corollaire. — *Si $r \geqslant 2$ et $d_{2r-1} = 0$ alors L est irréductible.*

2.3.3. Corollaire. — *Un opérateur d'Airy de bidegré $(3, 3r)$, avec $r \geqslant 2$, n'est pas totalement réductible.*

Preuve. — Si L est totalement réductible alors de la proposition 2.3.1, on déduit qu'il existe s et $s_1 \in \mathbb{N}$ tels que $\dfrac{-d_{2r-1}}{3b_r^2(s+r)}$ et $\dfrac{d_{2r-1}}{3b_r^2(s_1+r)}$ soient deux racines cubiques de l'unité, ce qui est absurde.

Pour $r = 1$, nous montrerons le résultat ci-dessous.

2.3.4. Proposition. — *Soit $L = \partial^3 + a\partial - (x^3 + bx + c)$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, un opérateur totalement réductible. Alors, il existe s et $s_1 \in \mathbb{N}^*$, tels qu'en posant $\eta = -s_1 - s + j(s - 2s_1)$, $(j = \exp(2i\pi/3))$ et $\xi = \eta + 3s$, le couple (a, b) est égal à l'un des couples (η, ξ), $(-\eta, -\xi)$, (ξ, η), $(-\xi, -\eta)$, $(j\eta, j^2\xi)$ ou $(-j\xi, -j^2\eta)$.*

Preuve. — Comme plus haut, les facteurs déterminants de L sont donnés par $R_i = \xi_i x$, où $\xi_i \in \{1, j, j^2\}$. On suppose que l'opérateur L est réductible. De la proposition 2.1.1, on déduit qu'il existe i tel que l'équation différentielle

$$L(\partial+R_i)(u) = (\partial^3+3\xi_ix\partial^2+(3\xi_i^2x^2+3\xi_i+a)\partial+(3\xi_i^2+a\xi_i-b)x-c)(u) = 0,$$

possède une solution polynôme. Soit s son degré. L'identification du coefficient du terme de plus haut degré entraîne

$$3(s+1)\xi_i^2 = b - a\xi_i.$$

On a :

ou bien $b - a = 3(s+1)$;

ou bien $j(a+b) + a = 3(s+1)$;

ou bien $-j(a+b) - b = 3(s+1)$.

Le dual formel L^ν de L étant réductible de facteur à droite d'ordre 1, il existe alors $s_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

ou bien $a - b = 3(s_1+1)$;

ou bien $j(a+b) + b = 3(s_1+1)$;

ou bien $-j(a+b) - a = 3(s_1+1)$.

La résolution du système $\begin{cases} b - a = 3(s+1) \\ j(a+b) + b = 3(s_1+1) \end{cases}$ et les transformations

$$(a,b) \longrightarrow (-a,-b), (-b,-a), (b,a), (ja, j^2 b), (-jb, -j^2 a);$$

déterminent tous les cas possibles pour (a,b).

La conclusion de la proposition 2.3.4 conduit, en sens inverse, à la construction suivante.

Exemple. — L'opérateur $L = \partial^3 + (j+1)\partial - [x^3 + (2+j)x]$ s'écrit $L = (\partial - jx)(\partial + (1+j)x)(\partial - x)$ est donc un exemple d'opérateur de bidegré (3,3) totalement réductible.

3. Classes d'équivalence

Comme au § 1, k désigne un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, $K = k(x)$ le corps des fractions rationnelles à coefficients dans k qu'on munit de la dérivation $\partial = \dfrac{d}{dx}$, $\mathcal{D} = k[x,\partial]$ l'algèbre de Weyl sur k et $\mathcal{D}_K$ l'anneau $K[\partial]$ des opérateurs différentiels à coefficients dans K. Soient, par ailleurs, L_1 et L_2 deux opérateurs d'Airy de bidegré respectif (n_1, m_1) et (n_2, m_2), unitaires par rapport à ∂ et $W_i = \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K L_i (i = 1,2)$ les $\mathcal{D}_K$-modules correspondants. Rappelons que L_1 est dit $\mathcal{D}_K$-équivalent à

L_2 si W_1 est isomorphe à W_2. En terme des matrices M_1 et M_2 associées respectivement à W_1 et W_2, cela veut dire qu'il existe, une matrice P dans $GL(n,K)$ telle que :

$$M_2 = P^{-1}M_1P - P^{-1}\partial P$$

ou encore, si Y est une solution de $\partial Y = M_2Y$ que $Z = PY$ est solution de $\partial Z = M_1Z$. On dira que L_1 est *formellement équivalent* à L_2 si $\mathcal{D}_{\widetilde{K}}/\mathcal{D}_{\widetilde{K}}L_1$ est isomorphe à $\mathcal{D}_{\widetilde{K}}/\mathcal{D}_{\widetilde{K}}L_2$, où $\widetilde{K} = k\left(\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ désigne le corps des séries méromorphes formelles à coefficients dans k au voisinage de l'infini. C'est une relation d'équivalence à priori plus faible que l'équivalence sur $\mathcal{D}_K$.

3.1. Proposition

Si L_1 est formellement équivalent à L_2 alors :

1) $(n_1, m_1) = (n_2, m_2)$ (*cf.* [Ka] proposition 4.2.11).

2) Si $m_1 = qn_1 + r$ avec $q \geqslant 1$ et $0 < r < n_1$, que $L_1 - L_2$ est un opérateur d'Airy de bidegré (f_1, f_2), vérifiant $f_1 \leqslant n_1 - 2$ et $f_2 \leqslant m_1 - (q+2)$.

3) Si $m_1 = qn_1$, avec $q \geqslant 1$, alors $L_1 - L_2$ est un opérateur d'Airy de bidegré (f_1, f_2) vérifiant

$$f_1 \leqslant n_1 - 2 \quad \text{et} \quad f_2 \leqslant m_1 - (q+1).$$

Preuve.

1) Comme L_1 et L_2 sont formellements équivalents, ils ont même ordre $n_1 = n_2$ et même rang de Katz (*cf.* [Be3], p. 229) $\dfrac{m_1}{n_1} = \dfrac{m_2}{n_2}$, d'ou $m_1 = m_2$.

2) L'isomorphisme formel transforme une base de solutions de l'opérateur $L_1 = \partial^n + a^1_{n-1}\partial^{n-1} + \dots + Q^1_m(x)$ sur $\widetilde{K}$ en une base de solutions de l'opérateur $L_2 = \partial^n + a^2_{n-1}\partial^{n-1} + \dots + Q^2_m(x)$ sur $\widetilde{K}$. Ce qui entraîne que les *équations Wronskiennes* $\partial + a^1_{n-1}$ et $\partial + a^2_{n-1}$ des opérateurs L_1 et L_2 sont formellements équivalentes sur $\widetilde{K}$. Donc, il existe $u \in \widetilde{K}$ tel que

$$\frac{u'}{u} = a^1_{n-1} - a^2_{n-1} \in k.$$

Or, si $u \in \widetilde{K}$ et $\dfrac{u'}{u}$ est constant alors u est une constante. Ceci entraîne que $a^1_{n-1} = a^2_{n-1}$ et $\operatorname{ord}(L_1 - L_2) \leqslant n-2$.

3) Si $L_1 = P_n^1(\partial) + Q_m^1(x)$ est formellement équivalent à $L_2 = P_n^2(\partial) + Q_m^2(x)$ alors L_1 et L_2 ont les mêmes facteurs déterminants. Soit H l'un d'entre eux et soit $R = H'$. Du lemme 1.2.1 on déduit que

$$\deg\Big[(R^n + a_{n-1}^1 R^{n-1} + Q_m^1(x)) - (R^n + a_{n-1}^2 R^{n-1} + Q_m^2(x))\Big] \leqslant m - \frac{m}{n} - 1.$$

L'égalité $a_{n-1}^1 = a_{n-1}^2$ entraîne alors

$$\deg(Q_m^1(x) - Q_m^2(x)) \leqslant m - \frac{m}{n} - 1.$$

Si (f_1, f_2) désigne le bidegré de $L_1 - L_2$ alors $f_2 \leqslant m - \dfrac{m}{n} - 1$. On termine la preuve en remplaçant simultanément, dans l'inégalité précédente, m par $m = qn + r$ avec $q \geqslant 1$ et $0 < r < n$, puis m par $m = qn$, avec $q \geqslant 1$.

Soit $L = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \partial^i + Q_m(x)$ un opérateur d'Airy de bidegré (n, m). Pour étudier la classe d'équivalence de L, on peut se restreindre au cas $n \leqslant m$ (Proposition 1.3.2).

Si L et L' sont deux opérateurs unitaires équivalents alors L est formellement équivalent à L'. La proposition 3.1 entraîne que les coefficients de ∂^{n-1} dans L et L' sont identiques. Donc, l'opérateur L est équivalent à l'opérateur L' si et seulement si l'opérateur $L\left(\partial - \dfrac{a_{n-1}}{na_n}\right)$ est équivalent à l'opérateur $L'\left(\partial - \dfrac{a_{n-1}}{na_n}\right)$. On pourra supposer, sans perte de généralité, que le coefficient de ∂^{n-1} est nul.

On traitera, dans les paragraphes suivants, l'équivalence des opérateurs sur K et on obtiendra des conditions nécessaires bien plus restrictives qu'en 3.1.

3.2. Opérateur d'ordre 2

On écrira L sous la forme suivante :

$$L = \partial^2 - \left[\sum_{i=0}^{m} b_i x^i\right].$$

3.2.1. THÉORÈME. — *Soit $L' = \partial^2 - H_m$ un opérateur d'Airy $\mathcal{D}_K$-équivalent à L. Alors :*

1) *Si m est impair alors $L' = L$ (voir [Ka], 4.3).*

2) *Si $m = 2p$ est pair alors ou bien on a $L' = L$ ou bien $L' - L$ est un polynôme de degré $p-1$ dont le coefficient dominant est de la forme $\pm 2(p+s)\sqrt{b_m}$ avec $s \in \mathbb{N}$.*

Preuve. — On pose $L = \partial^2 - Q_m$. D'après le lemme 1.1.3, les opérateurs L et L' sont $\mathcal{D}$-équivalents. Soient e (resp. f) la classe de 1 dans $\mathcal{D}/\mathcal{D}L'$ (resp. $\mathcal{D}/\mathcal{D}L$). C'est un générateur du $\mathcal{D}$-module $\mathcal{D}/\mathcal{D}L'$ (resp. $\mathcal{D}/\mathcal{D}L$). Soit φ un ismorphisme de $\mathcal{D}/\mathcal{D}L'$ sur $\mathcal{D}/\mathcal{D}L$. On a :

$$\begin{cases} \varphi(e) = \alpha f + \beta f' \text{ avec } \alpha, \beta \in k[x] \\ \varphi(e') = (\alpha' + \beta Q_m) f + (\alpha + \beta') f' \end{cases}$$

En écrivant que φ commute avec ∂ puis que φ est un $\mathcal{O}$-isomorphisme on obtient

$$(\mathcal{J}) \begin{cases} \text{(i) } \alpha'' + 2\beta' Q_m + \beta Q'_m = \alpha(H_m - Q_m) \\ \text{(ii) } \beta'' + 2\alpha' = \beta(H_m - Q_m) \\ \text{(iii) } \alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q_m = c \in k^* \end{cases}$$

Inversement, s'il existe α et β dans $k[x]$ vérifiant $(\mathcal{J})$ alors φ est un isomorphisme de $\mathcal{D}$-module et l'opérateur L est équivalent à l'opérateur L'.

On remarque que l'équation (iii) et l'équation (ii) entraîne l'équation (i). Il suffit pour celà de dériver les deux membres de l'équation (iii).

1) Si m est impair alors $\beta = 0$ et $\alpha^2 = c \in k^*$ (d'après (iii)), par conséquent l'équation (i) entraîne que $H_m = Q_m$.

2) Si $m = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$, alors

si $\beta = 0$, on déduit de l'équation (iii), que $\alpha^2 = c \in k^*$ et l'équation (i) entraîne que $Q_m = H_m$,

si $\beta \neq 0$, la relation (iii) entraîne que $\alpha \neq 0$ et $d^\circ\alpha = d^\circ\beta + p$, et on déduit alors de la relation (ii) que $d^\circ(H_m - Q_m) = p - 1$.

En identifiant les coefficients des termes de plus haut degré dans (iii) et (ii), on obtient que le coefficient de x^{p-1} dans $H_m - Q_m$ est $\pm 2(p+s)\sqrt{b_m}$.

3.2.2. Corollaire. — *Soient L et L' deux opérateurs d'Airy unitaires de bidegré (2,2) avec $L = \partial^2 - (a^2x^2 + 2abx + c)$, où a, b, $c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, et $Re((b^2 - c)/a) \in [-1, 1]$. Alors :*

i) *Quand $Re\left(\dfrac{b^2 - c}{a}\right) \in]-1, 1[$, L est équivalent à L' si et seulement si $L - L' = 2am$, où m est un entier rationnel.*

ii) *Quand* $\dfrac{b^2-c}{a}=1$, *L est équivalent à L′ si et seulement si* $L-L'=2am$, *où* $m\in\mathbb{Z}_{\leqslant 0}$.

iii) *Quand* $\dfrac{b^2-c}{a}=-1$, *L est équivalent à L′ si et seulement si* $L-L'=2am$, *où* $m\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Preuve. — Si l'opérateur L' est équivalent à l'opérateur L, sans lui être égal, le théorème 3.2.1 entraîne que $L'-L=\pm 2(1+s)$ a avec $s\in\mathbb{N}$. Inversement, si $(b^2-c)/a\in]-1,1[$ alors l'opérateur $L+2sa(s\in\mathbb{Z})$ est équivalent à l'opérateur $L+2(s+1)a$. En effet, les données $\alpha=ax+b$ et $\beta=1$ (*cf.* preuve du théorème 3.2.1) réalisent cet isomorphisme. On obtient alors le résultat par itération.

Si $(b^2-c)/a=1$ alors l'opérateur $L+2(1+s)a$ est équivalent à L, mais pas à $L-2(1+s)a$.

Si $(b^2-c)/a=-1$, la transformation de Fourier respecte l'équivalence des opérateurs biunitaires (proposition 1.3.2) et change l'opérateur L en un opérateur vérifiant la condition ii).

3.2.3. COROLLAIRE. — *Soit* $L=P_n(\partial)-Q_2(x)$ *un opérateur d'Airy de bidegré* $(n,2)$,

1) *Si l'opérateur L est autodual alors l'entier n est pair.*

2) *Si* $n=4r+2$, *avec* $r\in\mathbb{N}$, *alors l'opérateur L est autodual si et seulement si* $P_n(\partial)=P_n(-\partial)$.

Preuve. — On peut supposer que le polynôme Q_2 est unitaire. Au besoin, on multiplie L par une constante. On pose

$$L=\sum_{i=1}^{n}a_i\partial^i-x^2-bx-c$$

D'après la proposition 1.3.2, les opérateurs L et L^ν sont équivalents si et seulement si les opérateurs $\mathcal{F}(L)$ et $\mathcal{F}(L^\nu)$ sont équivalents. En multipliant les opérateurs $\mathcal{F}(L)$ et $\mathcal{F}(L^\nu)$ par -1 et en remplaçant ∂ par $\partial-\dfrac{b}{2}$, l'équivalence est maintenue. Ainsi

$$\partial^2-\sum_{i=1}^{n}(-1)^i a_i x^i+c-\frac{b^2}{4}\ \text{est équivalent à}\ \partial^2-\sum_{i=1}^{n}a_i x^i+c-\frac{b^2}{4}$$

Le théorème 3.2.1, entraîne que $(-1)^n=1$ et n est pair.

Si $n = 4r + 2$, avec $r \in \mathbb{N}$, alors ou bien le coefficient de x^{2r} dans $L - L^{\nu}$ est égal à $\pm 2(2r + s + 1)\sqrt{a_n}$ ou bien $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i a_i x^i = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$. Le premier cas est impossible car

$$(-1)^{2r} a_{2r} - a_{2r} = 0 \neq \pm 2(2r + s + 1)\sqrt{a_n}, \text{ d'où } P_n(\partial) = P_n(-\partial).$$

Inversement, si $P_n(\partial) = P_n(-\partial)$, l'opérateur L est autodual.

3.2.4. Corollaire. — *Soit* $L = \left(\sum_{j=0}^{2r} b_i \partial^i\right)^2 + \sum_{j=0}^{2r-1} d_j \partial^j - x^2 - bx - c$. *On suppose que l'opérateur L est autodual. Alors :*

1) *ou bien* $L^{\nu} = L$;

2) *ou bien* $b_{2k+1} = 0$ *pour* $k = 0, \ldots, r-1$ *et il existe* $s \in \mathbb{N}$ *tel que* $d_{2r-1} = \pm(2r + s)b_{2r}$.

Preuve. — D'après la preuve du corollaire 3.2.3, si l'opérateur L est autodual alors l'opérateur

$$H_1 = \partial^2 - \left(\sum_{i=o}^{2r}(-1)^i b_i x^i\right)^2 - \sum_{j=o}^{2r-1}(-1)^j d_j x^j + c - \frac{b^2}{4}$$

est équivalent à l'opérateur

$$H_2 = \partial^2 - \left(\sum_{i=o}^{2r} b_i x^i\right)^2 - \sum_{j=o}^{2r-1} d_j x^j + c - \frac{b^2}{4}.$$

En vertu du théorème 3.2.1 on a

soit $H_1 = H_2$;

soit $(-1)^i b_i = b_i$ pour $i = 0, \ldots, 2r$ et il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que

$$d_{2r-1} - (-1)^{2r-1} d_{2r-1} = \pm 2(2r + s)b_{2r}.$$

Exemple. — Le deuxième cas du corollaire 3.2.4, peut effectivement se produire. Ainsi, l'opérateur $L = \partial^4 + 2b_o\partial^2 + 2\partial - x^2 - c$, avec b_o, $c \in \mathbb{C}$ et $b_o^2 + c \neq 0$, est autodual. En effet,

$(-\mathcal{F}(L)) = \partial^2 - [(x^2 + b_o)^2 - 2x - b_o^2 - c]$, et le morphisme de $\mathcal{D}$-module Ψ :

$\mathcal{D}/\mathcal{D}(-\mathcal{F}(L)) \to \mathcal{D}/\mathcal{D}(-\mathcal{F}(L) - 4x)$, défini par $\Psi(1) = -(x^2 + b_0)1 + \partial$, est bien un isomorphisme.

3.3. Opérateur d'ordre 3

3.3.1. THÉORÈME.— *Soit* $L = \partial^3 + a\partial - (b^3x^3 + ex + f)$ *où* a, b, e, $f \in k$ *et soit* L' *un opérateur d'Airy unitaire,* $\mathcal{D}_K$*-équivalent à* L. *On a :*

soit $L' = L$,

soit $e = \xi b(a + 3\xi b)$, *où* ξ *est une racine cubique de l'unité,* $f \neq 0$ *et*

$$L' = \partial^3 + (a + 3\xi b)\partial - (b^3x^3 + \xi bax + f),$$

soit L' *est de la forme* $L' = \partial^3 + d\partial - (b^3x^3 + rx + t)$ *et il existe* $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 2$, *et* ξ *racine cubique de l'unité, tels que*

$$r - e = (d - a)\xi b + 3s\xi^2b^2.$$

Preuve.— De la proposition 3.1 on déduit que le coefficient de ∂^2 dans L' est nul et du lemme 1.1.3 on déduit que L et L' sont $\mathcal{D}$-équivalents.

On pose $L' = \partial^3 + d\partial - H$ et $Q(x) = b^3x^3 + ex + f$. On désigne par φ l'isomorphisme de $\mathcal{D}/\mathcal{D}L'$ sur $\mathcal{D}/\mathcal{D}L$. Soit g (resp. h) la classe de 1 dans $\mathcal{D}/\mathcal{D}L'$ (resp $\mathcal{D}/\mathcal{D}L$). C'est un générateur du $\mathcal{D}$-module $\mathcal{D}/\mathcal{D}L'$ (resp $\mathcal{D}/\mathcal{D}L$). En écrivant que φ commute avec ∂, puis que φ est un $\mathcal{O}$-isomorphisme, on obtient :

$$\varphi(g) = \alpha h + \beta h' + \gamma h'', \alpha, \beta \text{ et } \gamma \in k[x]$$
$$\varphi(g') = (\alpha' + \gamma Q)h + (\alpha + \beta' - a\gamma)h' + (\beta + \gamma')h''$$
$$\varphi(g'') = [\alpha''+(2\gamma'+\beta)Q+\gamma Q']h+[2\alpha'+\gamma Q+\beta''-a(\beta+2\gamma')]h'+[\alpha+2\beta'-a\gamma+\gamma'']h''$$
$$\varphi(g''') = \varphi(Hg - dg') = H\varphi(g) - d\varphi(g'),$$

d'où

i) $\gamma''' + \gamma'(d - 3a) + 3\alpha' + \beta'' + \beta(d - a) = \gamma(H - Q)$

ii) $\beta''' + 3\gamma'Q + 2\gamma Q' + 3\alpha'' + \alpha(d - a) + \beta'(d - 3a) + a\gamma(a - d) - 3a\gamma'' = \beta(H - Q)$

iii) $\alpha''' + Q(3\beta' + 3\gamma'' + (d - a)\gamma) + Q'(3\gamma' + \beta) + \gamma Q'' + d\alpha' = \alpha(H - Q)$,

et 1.1.4 entraîne

iv)

$$\det \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' + \gamma Q & \alpha'' + (2\gamma' + \beta)Q + \gamma Q' \\ \beta & \beta' + \alpha - a\gamma & \beta'' + 2\alpha' - 2a\gamma' - a\beta + \gamma Q \\ \gamma & \gamma' + \beta & \gamma'' + 2\beta' + \alpha - a\gamma \end{vmatrix} \in k^*$$

De la proposition 3.1 on déduit que soit $\deg(H - Q) \leqslant 1$ soit $H = Q$.

L'équation iv) entraîne que soit α est une constante non nulle et $\beta = \gamma = 0$,

soit que $d^\circ\alpha = 1$, β est une constante non nulle et $\gamma = 0$,

soit $d^\circ\alpha \geqslant 2$ et $d^\circ\beta = d^\circ\alpha - 1 = d^\circ\gamma + 1$.

1$^{\text{er}}$ cas : α est une constante non nulle.

Les équations i), ii) et iii) entraînent $H = Q$ et $d = a$, d'ou : $L_1 = L$.

2$^{\text{e}}$ cas : $d^\circ\alpha = 1$, β est une constante non nulle et $\gamma = 0$.

iii) entraîne que $d^\circ(H - Q) = 1$, et que $H = b^3x^3 + rx + s$.

On peut supposer $\beta = 1$. En effet, (α, β, γ) et $(\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma)$, avec $\lambda \in k^*$, réalisent simultanément le même isomorphisme. On pose $H - Q = h_1x + h_0$, $\alpha = \alpha_1 x + \alpha_o$, et $\beta = 1$. Les équations i), ii) et iii) entraînent que

$$\begin{cases} h_1\alpha_1 = 3b^3 \\ h_1 = (d-a)\alpha_1, \\ \alpha_1 = \dfrac{a-d}{3}, \end{cases}$$

d'où $d - a = 3\xi b$. Comme ξ est une racine cubique de l'unité, on a

$$h_1 = -3\xi^2 b^2 \text{ et } \alpha_1 = -\xi b.$$

De même, du système

$$\begin{cases} h_0 = 3\xi b\alpha_0 \\ -\xi b h_0 - \alpha_0 3\xi^2 b^2 = 0 \\ \alpha_0 h_0 = e - d\xi b \end{cases}$$

on déduit que $h_0 = 0$, $\alpha_0 = 0$ et $e = \xi b(a + 3\xi b)$. L'équation iv) entraîne $f \neq 0$.

3$^{\text{e}}$ cas : $d^\circ\alpha \geqslant 2$ et $d^\circ\beta = d^\circ\alpha - 1 = d^\circ\gamma + 1$.

On pose $s = d^\circ\alpha$ et $H - Q = h_1x + h_0$.

Les équations i), ii) et iii) entraînent que

$$h_1 = (d-a)\xi b + 3s\xi^2 b^2.$$

Remarque. — A chaque isomorphisme φ de $\mathcal{D}/\mathcal{D}L'$ sur $\mathcal{D}/\mathcal{D}L$, on associe un couple (s,ξ), où $s\in\mathbf{N}$ (le degré de α) et ξ est une racine cubique de l'unité. Ainsi, dans le deuxième cas du théorème 3.3.1, à φ est associé $(1,\xi)$ et à φ^{-1} est associé $(2,\xi_1)$, $(\xi_1^3=1)$.

3.3.2. THÉORÈME. — *Soient L un opérateur d'Airy de bidegré $(3,m)$ et L' un opérateur d'Airy unitaire équivalent à L. On a :*

i) *Si $(3,m)=1$ alors $L'=L$.*

ii) *Si $m=3r$, avec $r\geqslant 2$, alors*

soit $L'=L$;

soit $L-L'$ est un opérateur d'Airy de bidegré $(1,2r-1)$ et le coefficient de x^{2r-1} dans $L-L'$ est $3(s+2r)b_{3r}^{2/3}$, où $s\in\mathbf{N}$ et b_{3r} est le coefficient de x^{3r} dans L.

Preuve.

i) Si $(3,m)=1$ alors l'équation iv) (*cf.* preuve du théorème 3.3.1) entraîne que α est une constante non nulle et $\beta=\gamma=0$. Les équations i), ii) et iii) entraînent que $L'=L$.

ii) Si $m=3r$, avec $r\geqslant 2$, on désigne par s le degré de α.

Si $s=0$ alors on a $\beta=\gamma=0$ et $L=L'$.

Si $s\neq 0$ alors de l'équation iv) on déduit que $s\geqslant 2r$ et $d^\circ\beta=s-r=d^\circ\gamma+r$, avec $r\geqslant 2$. L'équation i) entraîne que $d^\circ(H-Q)=2r-1$, et les équations i), ii) et iii) entraînent que le coefficient de x^{2r-1} dans $H-Q$ est donné par $3sb_{3r}^{2/3}$, où b_{3r} est le coefficient de x^{3r} dans Q et $b_{3r}^{2/3}$ est une racine cubique de b_{3r}^2.

3.3.3. COROLLAIRE. — *Pour tout entier $m\geqslant 1$, aucun opérateur d'Airy de bidegré $(3,m)$ n'est autodual.*

Preuve. — Soit $L=\partial^3+b\partial^2+c\partial-Q_m(x)$ un opérateur d'Airy de bidegré $(3,m)$.

On suppose que l'opérateur L est autodual. La proposition 3.1 entraîne que $b=0$. Par conséquent on a $L=\partial^3+c\partial-Q_m(x)$. En notant par b_m le coefficient du terme dominant dans $Q_m(x)$, qui est non nul, et en écrivant $(-L^\nu)=\partial^3+c\partial+Q_m(x)$, on déduit du théorème 3.3.2 que $-b_m=b_m$, ce qui est absurde.

Remarque. — Pour $(n, m) = 1$, on déduit du résultat de Katz ([Ka] 4.1.4) qu'aucun opérateur d'Airy irréductible d'ordre impair n'est autodual.

Bibliographie

[Be1] BERTRAND (D.). — Groupes algébriques linéaires et théorie de Galois différentielle, Cours de 3eme cycle, Université Paris VI. (1985-1986), notes rédigées par R. Lardon.

[Be2] BERTRAND (D.). — Extensions de D-modules et groupes de Galois différentiels, Springer L.N, N° 1454, p. 125-141.

[Be3] BERTRAND (D.). — Travaux récents sur les points singuliers des équations différentielles linéaires, Springer L.N, N° 770, p. 228-243.

[Bo] BOUSSEL (K.). — Groupes de Galois des équations hypergéométriques réductibles. dans Ann. Sc. Fac. Toulouse, 5, 1996, 299-362.

[BBH] BEUKERS (F.), BROWNAWELL (W.D.), HECKMAN (G.). — Siegel Normality, Annals of Math. 127 (1988), 279-308.

[C] COPE (F.T.). — Formal solutions of irregular linear differential equations I. Amer. J. Math. 56 (1934) 411-437.

[D,L-R] DUVAL (A.), LODAY-RICHAUD (M.). — Kovacic's algorithm and its application to some families of special functions, AAECC, 3. 1992, p. 211-246.

[F] FORSYTH (A.R.). — Theory of differential equations, Cambridge Univ. Press. London, New York (1890).

[G] GRIGOR'EV (D.Y.). — Complexity of Factoring and Calculating the GCD of linear ordinary Differential operators. J. Symb. Comp (1990), 10, 7-37.

[H,K] HELFER (B.), KANNAI (Y.). — Détermining Factors and Hypoellipticity ordinary differential operators with double "characteristics", Astérisque 2.3 (1973), 198-216.

[I] INCE (E.L.). — Ordinary differential equations London 1927.

[Ka] KATZ (N.). — On the calculation of some differential Galois groups, Invent. Math. 87 (1987) p. 13-61.

[Ka2] KATZ (N.). — Exponential sums and differential equations, Princeton U. Press (1990).

[K] KOVACIC (J.). — An Eisenstein criterium for noncommutative polynomials, Proc. Amer. Math. Soc, 34 (1972).

[Sa] SAIDANE (L.). — Critères de réductibilité et d'équivalence pour les opérateurs d'Airy de petit ordre. CRAS t. 321 Série I, p. 523-526. 1995.

[S] SINGER (M.). — Testing reducibility of linear differential operators : A group theoretic. perspective. AAECC. (1995).

[Y] YEBBOU (J.). — Calcul de facteurs déterminants. J. Diff. Equations 72, (1988) 140-148.