ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JULIO C. REBELO

Réalisation de germes de feuilletages holomorphes par des champs semi-complets en dimension 2

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 9, nº 4 (2000), p. 735-763

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_2000_6_9_4_735_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. IX, n° 4, 2000
pp. 735–763

Réalisation de germes de feuilletages holomorphes par des champs semi-complets en dimension 2 [(*)]

JULIO C. REBELO [(1),(2)]

RÉSUMÉ. — Nous considérons les champs de vecteurs holomorphes de dimension 2 ayant deux valeurs propres non nulles à l'origine. Il est démontré que, un facteur inversible près, tous ces champs sont semi-complets. On classifie aussi les singularités du type col-nœud (une valeur propre nulle) qui sont semi-complètes. Finalement nous donnons des exemples de champs de vecteurs semi-complets avec une courbe de singularités et tels que le feuilletage singulier induit n'est pas linéarisable.

ABSTRACT. — We consider the singularities of 2-dimensional holomomorphic vector fields which have two non vanishing eigenvalues. It is proved that up to an inversible factor all these vector fields are semi-complete. We also classify the semi-complete singularities of type saddle-node (one vanishing eigenvalue). Finally examples of semi-complete vector fields having non isolated singularities and non linearizable singular foliations are provided as well.

(*) Reçu le 8 octobre 1998, accepté le 18 décembre 2000

(1) *Adresse permanente*
Departamento de Matematica, PUC-Rio, Rua Marquês de São Vicente 225, Gávea Rio de Janeiro RJ, Brasil CEP 22453-900
jrebelo@mat.puc-rio.br
Adresse actuelle
Institute for Mathematical Sciences, State University of New York at Stony Brook, Stony Brook, N.Y. 11794-3660 USA
jrebelo@math.sunysb.edu

(2) Partiellement soutenu par le CNPq-Brésil.

1. Introduction

La différence locale entre une singularité d'un champ de vecteurs holomorphe complet et un germe de feuilletage holomorphe (ou un germe de champ holomorphe quelconque) est essentiellement contenue dans la notion de singularité semi-complète. Cette notion semble être intéressante en elle-même mais elle s'est aussi révélée très utile pour la compréhension des singularités des champs holomorphes complets sur les surfaces complexes (non nécessairement compactes). L'utilité des singularités semi-complètes résulte d'une part du fait que toutes les singularités des champs complets sont semi-complètes et, d'autre part, au moins en dimension complexe 2, du fait que ces singularités peuvent être décrites d'une façon assez précise. Un exemple de cela sera donné dans l'appendice où nous considérerons les surfaces de Stein. Un autre exemple joli et récent peut être trouvé dans [DOT].

Une question naturelle qu'on pose sur les champs semi-complets est celle de la linéarisabilité. Cet article est consacré surtout à cette question. Considérons un champ de vecteurs holomorphe X défini au voisinage de $(0,0) \in \mathbf{C}^2$ et supposons que $(0,0)$ est une singularité isolée de X ayant deux valeurs propres non nulles. L'une des questions qui ont été à l'origine de ce papier est celle de savoir si un tel X semi-complet est nécessairement linéarisable. Cette question est répondue négativement par notre premier théorème :

THÉORÈME A. — *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe singulier défini au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^2$ et soit ω une 1-forme différentielle holomorphe (à singularité isolée) qui définit $\mathcal{F}$. Supposons que la partie linéaire de ω à l'origine possède deux valeurs propres non nulles. Alors il existe un champ de vecteurs à singularité isolée X, défini et semi-complet au voisinage de l'origine, tel que le feuilletage singulier défini par les orbites locales de X coïncide avec (la restriction de) $\mathcal{F}$.*

Autrement dit, le théorème A établit que, à un facteur multiplicatif inversible près, tout germe de champ de vecteurs ayant deux valeurs propres non nulles à l'origine est semi-complet. En particulier, ceci montre qu'un champ de vecteurs semi-complet n'est pas nécessairement linéarisable (nous laissons au lecteur le soin de se convaincre que le facteur multiplicatif inversible mentionné ne joue, en effet, aucun rôle).

Nous observons que dans [Reb1] et [Gh-Reb], nous avons classifié les germes des champs de vecteurs holomorphes et semi-complets à singularités isolées dont les *deux valeurs propres à l'origine s'annulent.* D'autre part le théorème (4.1) donne la classification des champs semi-complets dont précisément une valeur propre est nulle (ces champs ont "nombre de Milnor" égal à 1, "λ" entier et sont analytiquement normalisables). La combinaison de ces deux théorèmes montre que la classification obtenue dans ces travaux est optimale.

Par ailleurs, on trouve dans [Reb2] la classification des champs semi-complets ayant une singularité *non isolée*. Cette classification est moins précise lorsque le champ a l'allure $X = f.x^n y^m X'$, où $f(0,0) \neq 0$ et la partie linéaire de X' à l'origine est $mx\partial/\partial x - ny\partial/\partial y$ (m, n sont des entiers strictement positifs). En effet, dans ce cas là, l'existence de tels champs qui soient semi-complets, outre le champ linéarisable (i.e. le cas où X' est linéarisable), n'est pas évidente. Dans [Reb2] nous avons annoncé l'existence de ces champs. En fait nous disposons du résultat suivant :

THÉORÈME B. — *Soient k, m et n des entiers strictement positifs ($k \geqslant 2$). Alors le champ de vecteurs X défini par*

$$X = x^n y^m \left[mx\frac{\partial}{\partial x} - ny(1 + x^{kn}y^{km})\frac{\partial}{\partial y} \right]$$

est semi-complet au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^2$.

Remarque. — Il est intéressant d'observer que ce champ n'est pas semi-complet pour $k = 1$, (cf. remarque (5.7)).

Insistons sur le fait qu'un "théorème de réalisation" du style théorème A est probablement vrai dans ce contexte de singularités non isolées (ce qui équivaut à dire que, sauf si $k = 1$, toutes les formes normales de Martinet-Ramis (voir [M-R2]) restent semi-complètes lorsqu'on les multiplie par $x^n y^m$). Nous n'avons cependant pas cherché une telle démonstration. On déduit de cette famille d'exemples que la classification donnée dans [Reb2] est aussi optimale.

Comme les théorèmes A et B montrent que la linéarisation n'est pas toujours possible, le "côté positif" de l'article consiste en le théorème (4.1) (classification des col-nœuds) et le théorème (6.3) (sur les Surfaces de Stein). Cependant l'analyse des cas "plus dégénérés" de champs semi-complets laisse envisager que peut-être tout ces germes de champs admettent un prolongement en un champ complet sur une variété adéquate. Nous observons que, si cela est vrai, alors les théorèmes A et B doivent nous permettre de découvrir de nouveaux exemples de surfaces complexes (peut-être non compactes) munies des champs complets avec une dynamique riche.

Je suis très reconnaisant au referee de cet article pour sa patience avec les premières versions ainsi que pour ses diverses suggestions. En particulier le referee a trouvé une faute sérieuse dans l'énoncé du théorème (4.1), dans une version preliminaire, et a aussi indiqué la correction adéquate.

C'est toujours un plaisir de remercier E.Ghys qui a dirigé mes premiers travaux sur ce sujet.

Une première version de cet article a été rédigé lors d'un séjour de l'auteur à la "Chuo-University" de Tokyo que j'aimerais remercier pour son hospitalité. L'auteur a partiellement conduit ce travail pour le Clay Mathematics Institute.

2. Champs semi-complets et applications développantes

Rappelons qu'un champ de vecteurs holomorphe X défini sur un ouvert U d'une variété complexe est dit semi-complet dans U s'il existe un ouvert $\Omega \subseteq \mathbf{C} \times U$ et une application holomorphe $\Phi : \Omega \subseteq \mathbf{C} \times U \to U$ (appelée le flot semi-global de X) qui vérifie :

1. $X(p) = d\Phi(T,p)/dT$ en $T = 0$.
2. $\Phi(T_1+T_2,p) = \Phi(T_1,\Phi(T_2,p))$ dès que les deux membres sont définis ;
3. si $(T_i,p) \in \Omega$ est une suite convergeant vers un point du bord de Ω, alors $\Phi(T_i,p)$ converge vers le bord de U.

Soit X un champ de vecteurs holomorphe, non identiquement nul, défini au voisinage U de l'origine de $\mathbf{C}^n$. Les orbites locales de X définissent un feuilletage holomorphe singulier $\mathcal{F}$ dans U. Les orbites régulières L de X sont des surfaces de Riemann équipées d'une 1-forme différentielle holomorphe dT_L, à savoir, celle qui vaut 1 le long de X (en particulier dT_L n'est pas singulière). Rappelons que dT_L s'appelle la 1-forme temps. La 1-forme temps est bien sûr fermée et, à translation près, elle définit une application D, dite développante, du revêtement universel $\tilde{L}$ de L à valeurs dans $\mathbf{C}$. L'application D est appelée *semi-injective* si l'intégrale de dT_L le long des chemins plongés (injectivement) dans L est non nulle.

Dans [Reb1], nous avons montré que l'application développante correspondante à une orbite régulière L d'un champ semi-complet X est semi-injective. Le résultat principal de ce paragraphe est une sorte de réciproque de cette affirmation ; nous allons cependant considérer tous les chemins *ouverts* (i.e. ceux qui vérifient $c(0) \neq c(1)$) et non seulement les chemins plongés.

PROPOSITION 2.1.— *Soit X un champ de vecteurs holomorphe défini au voisinage U de l'origine de $\mathbf{C}^n$. Supposons que pour toute orbite régulière L de X et pour tout chemin $c : [0,1] \to L$ tel que $c(0) \neq c(1)$, l'intégrale de dT_L sur c est non nulle. Alors le champ X est semi-complet dans U.*

Dans la suite, sauf avis du contraire, tous les ouverts seront supposés connexes. Nous commençons l'approche à la proposition (2.1) par le lemme suivant :

LEMME 2.2.— *Soit U un ouvert d'une surface de Riemann munie d'un champ de vecteurs holomorphe X qui ne s'annule pas dans U. Soit dT la 1-forme temps associé à X et supposons que :*

a) *pour tout chemin ouvert c contenu dans U, l'intégrale de dT sur c est non nulle ;*

b) *l'intégrale de dT sur tout lacet contenu dans U vaut zéro.*

Alors X est semi-complet dans U.

Démonstration.— Il s'agit de construire un flot semi-global Φ qui soit engendré par le champ X sur l'ouvert U. Pour cela nous considérons l'application $I : U \times U \to \mathbf{C}$ définie par

$$I(x,y) = \int_x^y dT\,.$$

L'application I est bien définie (i.e. elle ne dépend pas du chemin joignant x à y) puisque l'intégrale de dT le long des lacets est nulle. Pour chaque $x \in U$ fixé, on définit l'ensemble $\Omega_x \subseteq \mathbf{C}$ par $\Omega_x = \{T \in \mathbf{C}\ ;\ I(x,y) = T\}$, pour certain $y \in U$. Il est clair, d'après le théorème d'inversion locale, que Ω_x est un ensemble ouvert de $\mathbf{C}$. Nous posons $\Omega = \bigcup_{x\in U}(\Omega_x, x)$. Évidemment $\Omega \subseteq \mathbf{C} \times U$, de plus on a :

AFFIRMATION.— Ω est un ensemble ouvert de $\mathbf{C} \times U$.

Démonstration de l'affirmation.— Soit $(T_0, x_0) \in \Omega$. On choisit une boule $B_r(x_0)$ de centre en x_0 et de rayon $r > 0$ suffisamment petit pour qu'elle soit contenue dans U. Pour chaque $x \in B_{r/2}(x_0)$ nous considérons l'application I_x^{loc} donnée par $I_x^{loc}(y) = \int_x^y dT$.

Nous observons que $I_{x_0}^{loc}$ est un difféomorphisme local en x_0, et donc que son image contient un voisinage ouvert de $0 \in \mathbf{C}$. Pour démontrer l'affirmation 1, il suffit de montrer que, si x est assez proche de x_0, alors l'image de I_x^{loc} contient un voisinage uniforme de $0 \in \mathbf{C}$. Or, il se trouve que pour tout $y \in B_r(x_0)$ on a $I_x^{loc}(y) = I_{x_0}^{loc}(y) + \int_{x_0}^{x} dT$. Comme l'intégrale de dT sur le chemin (contenu dans $B_r(x_0)$) qui joint x_0 à x converge vers *zéro* lorsque x converge vers x_0, il résulte immédiatement que l'image de I_x^{loc} contient un voisinage uniforme de $0 \in \mathbf{C}$ pour x très proche de x_0. Ceci démontre l'affirmation. $\square$

Maintenant nous définissons une application Φ de Ω à valeurs dans U par $\Phi(T, x) = y$, où $I(x, y) = T$. Cette application est évidemment bien définie. En effet, si y_0, y_1 sont deux points distincts de U tels que $I(x_0, y_0) = I(x_0, y_1)$, l'intégrale de dT le long d'un chemin plongé dans U et joignant y_0 à y_1 vaut *zéro*, ce qui contredit l'hypothèse a) de l'énoncé.

Finalement, il est clair que l'application Φ satisfait les conditions 1 et 2 pour être le flot semi-global associé à X. De plus, si (T_i, x) est une suite de points de Ω convergeant vers un point $(\hat{T}, x)$ qui appartient à la frontière de Ω, alors $\{T_i\}$ converge vers $\hat{T} \in \partial\Omega_x$ et donc $\Phi(T_i, x)$ converge vers la frontière de U (i.e. elle quitte tous les compacts contenus dans U). Il résulte que Φ est un flot semi-global associé à X. Ceci achève la démonstration du lemme. $\square$

On poursuit la preuve de la proposition (2.1) avec le lemme suivant :

LEMME 2.3. — *Soit U un ouvert d'une surface de Riemann munie d'un champ de vecteurs holomorphe X qui n'a pas de singularité dans U. Soit dT la 1-forme temps induite par X dans U. Considérons un revêtement $\tilde{U}$ de U et désignons $d\tilde{T}$ le relevé de dT à $\tilde{U}$. Finalement on suppose que :*

a) *l'intégrale de $d\tilde{T}$ sur les chemins ouverts contenus dans $\tilde{U}$ est non nulle ;*

b) *l'intégrale de $d\tilde{T}$ sur les lacets contenus dans $\tilde{U}$ est nulle.*

Alors X est semi-complet dans U.

Démonstration. — Soit $\tilde{X}$ le relevé de X à $\tilde{U}$. Évidemment la 1-forme temps induite par $\tilde{X}$ sur $\tilde{U}$ n'est autre que $d\tilde{T}$. Grâce au lemme (2.2), il résulte que $\tilde{X}$ est semi-complet dans $\tilde{U}$. On peut donc considérer le flot semi-global $\tilde{\Phi} : \tilde{\Omega} \subseteq \mathbf{C} \times \tilde{U} \to \tilde{U}$ correspondant. Nous allons utiliser ce flot semi-global pour démontrer que X lui-même est semi-complet dans U. Pour cela nous désignons par π l'application de revêtement de $\tilde{U}$ sur U.

AFFIRMATION. — Soient $\tilde{p}, \tilde{q}$ points de $\tilde{U}$. Soit $T \in \tilde{\Omega}_{\tilde{p}}$ (i.e. tel que $\tilde{\Phi}(T, \tilde{p})$ est défini) et supposons que $\pi(\tilde{p}) = \pi(\tilde{q})$. Alors $\tilde{\Phi}(T, \tilde{q})$ est défini et de plus $\pi\left(\tilde{\Phi}(T, \tilde{p})\right) = \pi\left(\tilde{\Phi}(T, \tilde{q})\right)$.

Démonstration de l'affirmation. — Dans la démonstration du lemme (2.2), nous avons vu que $\tilde{\Phi}(T, \tilde{p})$ est caractérisé comme le seul point de $\tilde{U}$ tel que $\int_{\tilde{p}}^{\tilde{\Phi}_{sg}(T,\tilde{p})} d\tilde{T} = T$ (où l'intégrale ne dépend pas du chemin choisi). Il s'agit donc d'assurer l'existence d'un certain point $\tilde{q}^T \in \tilde{U}$ tel que l'intégrale de $d\tilde{T}$ sur le chemin qui joint $\tilde{q}$ à $\tilde{q}^T$ soit T (d'après la remarque ci-dessus, ceci entraîne en particulier l'unicité de ce point). Ce point doit encore satisfaire la condition $\pi(\tilde{q}^T) = \pi(\tilde{\Phi}(T, \tilde{p}))$. Pour cela, nous considérons un chemin $c_1 \subseteq \tilde{\Omega}_{\tilde{p}}$ joignant $0 \in \mathbf{C}$ à $T \in \mathbf{C}$. Ensuite, on définit le chemin $\tilde{c}_1 \subseteq \tilde{U}$ par $\tilde{c}_1(t) = \tilde{\Phi}(c_1(t), \tilde{p})$ (en particulier $\tilde{c}_1(1) = \tilde{\Phi}(T, \tilde{p})$).

Appelons c le chemin $\pi(\tilde{c}_1) \subset U$. Finalement, nous relevons c en un chemin $\tilde{c}_2 \subset \tilde{U}$ tel que $\tilde{c}_2(0) = \tilde{q}$ (ce qui est possible puisque $\pi(\tilde{q}) = \pi(\tilde{p}) = \pi(\tilde{c}_1(0)) = c(0)$). Maintenant il suffit de définir $\tilde{q}^T$ comme étant l'extrémité finale de $\tilde{c}_2$ (i.e. $\tilde{c}_2(1)$). Évidemment on a :

$$\int_{\tilde{c}_1} d\tilde{T} = \int_c dT = \int_{\tilde{c}_2} d\tilde{T} = T\,.$$

De plus $\pi(\tilde{c}_2(1)) = \pi(\tilde{q}^T) = c(1) = \pi(\tilde{c}_1(1)) = \pi(\tilde{\Phi}_{sg}(T, \tilde{p}))$. Ceci achève la preuve de l'affirmation. $\square$

Dans $\tilde{\Omega}$ nous identifions deux point $(T_1, \tilde{p})$ et $(T_2, \tilde{q})$ si $T_1 = T_2$ et $\pi(\tilde{p}) = \pi(\tilde{q})$. Le quotient Ω de $\tilde{\Omega}$ par cette relation d'équivalence est un ouvert de $\mathbf{C} \times U$. Dans Ω on peut définir une application holomorphe Φ à valeurs dans $\mathbf{C} \times U$ par $\Phi(T, p) = \pi\left(\tilde{\Phi}(T, \tilde{p})\right)$, où $\tilde{p}$ est un point de la fibre $\pi^{-1}(p)$. D'après l'affirmation, cette application est bien définie (i.e. elle ne dépend pas du point $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ choisi). Comme $\tilde{\Phi}$ est un flot semi-global pour $\tilde{X}$, on déduit aisément que Φ est un flot semi-global pour X. Il résulte que X est semi-complet dans U et la démonstration du lemme est terminée. $\square$

L'étape prochaine généralise le lemme (2.2) en s'affranchissant de l'hypothèse *b)*.

LEMME 2.4. — *Soit U un ouvert d'une surface de Riemann et X un champ de vecteurs holomorphe sans singularité dans U. Appelons dT la 1-forme temps induite par X sur U et supposons que l'intégrale de dT sur tout chemin ouvert $c \subset U$ est différente de zéro. Alors X est semi-complet dans U.*

Démonstration. — Nous désignons par $\pi_1(U)$ le groupe fondamental de U (avec un point base fixé). Dans $\pi_1(U)$ nous observons que l'ensemble des lacets sur lesquels l'intégrale de dT est nulle définit un sous-groupe de $\pi_1(U)$ que l'on dénote par N. Soit $\tilde{U}$ le revêtement de U dont le groupe fondamental est isomorphe à N et soit $\pi : \tilde{U} \to U$ l'application de revêtement associée. On remarque, même si cela n'est pas nécessaire, que N est un sous-groupe normal de $\pi_1(U)$ de sorte que $\tilde{U}$ est unique à isomorphisme près. Le champ de vecteurs X se relève en un champ $\tilde{X}$ sur $\tilde{U}$ dont la 1-forme temps sera désignée $d\tilde{T}$. Nous affirmons que $d\tilde{T}$ satisfait dans $\tilde{U}$ les hypothèses du lemme (2.2). En effet, observons d'abord que pour tout chemin $\tilde{c} \subset \tilde{U}$ on a $\int_{\tilde{c}} d\tilde{T} = \int_{\pi(\tilde{c})} dT$. Si $\tilde{c}$ est un lacet, alors $\pi(\tilde{c})$ appartient à N et donc les intégrales ci-dessus sont nulles. Il faut donc montrer que l'intégrale de $d\tilde{T}$ sur les chemins ouverts contenus dans U n'est jamais nulle. Soit alors $\tilde{c}$ un chemin ouvert de $\tilde{U}$ et considérons $\pi(\tilde{c}) \subset U$. Supposons par l'absurde que l'intégrale de $d\tilde{T}$ sur $\tilde{c}$ vaut *zéro*. Il en est donc de même pour celle de dT sur $\pi(\tilde{c})$. Cependant $\pi(\tilde{c})$ est ou bien un lacet dont la classe d'homotopie n'appartient pas à N (puisqu'il se relève en un chemin ouvert $\tilde{c}$), ou bien un chemin ouvert. En tous les cas l'intégrale de dT sur ce chemin ne peut être nulle. La contradiction qui en résulte prouve l'affirmation ci-dessus.

Il découle du lemme (2.2) que $\tilde{X}$ est semi-complet dans $\tilde{U}$. Le lemme (2.3) entraîne alors que X est semi-complet dans U. La démonstration du lemme est achevée. □

Nous sommes finalement en mesure de donner la démonstration de la proposition (2.1).

Démonstration de la proposition (2.1). — Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage holomorphe singulier défini dans U par les orbites locales de X. Chaque feuille régulière L de $\mathcal{F}$ est donc (un ouvert connexe d') une surface de Riemann.

Comme la restriction de X à toutes les feuilles régulières de $\mathcal{F}$ est semi-complète, à chaque telle feuille correspond un flot semi-global engendré par X.

Étant donné un point $p \in U$, nous définissons un ouvert $\Omega_p \subseteq \mathbf{C}$ par la régle suivante : si p est un point singulier de X (i.e. si $X(p) = 0$) alors on pose $\Omega_p = \mathbf{C}$. Par ailleurs si $X(p) \neq 0$, alors on considère la feuille régulière L_p de $\mathcal{F}$ qui contient p et le flot semi-global $\Phi_{sg}^{L_p} : \Omega^{L_p} \to L_p$ correspondant. Finalement on définit $\Omega_p = \{T \in \mathbf{C}\,;\, (T,p) \in \Omega^{L_p}\}$.

Maintenant, soit $\Omega = \bigcup_{p \in U} (\Omega_p, p)$. Soit de plus $\Phi : \Omega \to U$ l'application donnée par $\Phi(T,p) = p$ si $X(p) = 0$ et par $\Phi(T,p) = \Phi_{sg}^{L_p}(T,p)$ si $X(p) \neq 0$ (rappelons que L_p est la feuille régulière de $\mathcal{F}$ qui contient p).

AFFIRMATION. — Ω est un ensemble ouvert de $\mathbf{C} \times U$.

Démonstration de l'affirmation. — Soit (T^p, p) un point de Ω. Nous voulons démontrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, si $\mid T - T^p \mid < \delta$ et $d(p,q) < \delta$, alors (T,q) appartient à Ω.

Considérons une boule $B_r(\overline{p})$ contenue dans U, de rayon $r > 0$, centrée en $\overline{p} = \Phi(T^p, p)$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $d(B_r(\overline{p}), \partial U) > \varepsilon$. Nous affirmons qu'il existe $\delta_1 > 0$ tel que, si q appartient à $B_{\delta_1}(p)$ (la boule de centre en p et de rayon δ_1), alors $\Phi(T^p, q)$ est défini (i.e. $T_p \in \Omega_q$) et appartient à $B_r(\overline{p})$. Pour vérifier cela, nous observons d'abord que pour $T = 0$ on a $d\Phi(T,x)/dT = X(x)$. Donc pour $T \in \Omega_p \cap \Omega_q$, on a $\Phi(T,p) - \Phi(T,q) = p - q + \int_0^T [X(\Phi(s,p)) - X(\Phi(s,q))] ds$ (où $p - q$ désigne le vecteur d'origine en $q \in \mathbf{C}^n$ et d'extrémité en $p \in \mathbf{C}^n$). Si K dénote la constante de Lipschitz du champ X, on en déduit que $\mid \Phi(T,p) - \Phi(T,q) \mid \leqslant \mid p - q \mid + K \int_0^T |\Phi(s,p) - \Phi(s,q)|\, ds$. L'inégalité de Gronwall entraîne donc

$$\mid \Phi(T,p) - \Phi(T,q) \mid \leqslant e^{K|T|} \mid p - q \mid,$$

d'où il résulte aisément l'existence du δ_1 désiré.

Posons $B_{r+\varepsilon}(\overline{p}) \subset U$ la boule de centre en $\overline{p}$ et de rayon $r + \varepsilon$. Nous considérons une borne supérieure C pour le module de X restreint à $B_{r+\varepsilon}(\overline{p})$. Finalement, on choisi $\delta > 0$ satisfaisant $\delta < \min\{r/2, \delta_1, \varepsilon/2C\}$. L'affirmation consiste donc à prouver que (T,q) appartient à Ω dès que $\mid T - T^p \mid < \delta$ et $d(p,q) < \delta$.

Supposons par l'absurde que cela est faux, i.e. il existe $q \in B_\delta(p)$ et un nombre complexe T^q, $\mid T^q - T^p \mid < \delta$, qui n'appartient pas à Ω_q. On remarque que nécessairement $X(q) \neq 0$ autrement $\Omega_q = \mathbf{C}$. D'autre part, comme la restriction de X à la feuille L_q de $\mathcal{F}$ contenant q est semi-complète, nous pouvons supposer qu'il existe une suite $\{T_i\}$ ($T_i \in \Omega_q$) *convergeant* vers T^q et telle que $\Phi(T_i, q)$ converge vers le bord de L_q. En particulier, si $B^{L_q}_{r+\varepsilon}(\overline{p})$ désigne la composante connexe contenant q de l'intersection $B_{r+\varepsilon}(\overline{p}) \cap L_q$, alors $\Phi(T_i, q)$ n'est pas dans $B^{L_q}_{r+\varepsilon}(\overline{p})$ (pour i suffisamment grand, vu que $\Phi(T_i, q)$ quitte tous les compacts de L_q). Cependant

$$\begin{aligned}\left|\Phi^{L_q}_{sg}(T_i, q) - \Phi^{L_q}_{sg}(T^p, p)\right| &\leqslant \left|\Phi^{L_q}_{sg}(T^p, q) - \Phi^{L_q}_{sg}(T^p, p)\right| \\ &\qquad + \left|\Phi^{L_q}_{sg}(T_i, q) - \Phi^{L_q}_{sg}(T^p, q)\right| \\ &\leqslant \frac{r}{2} + C \mid T_i - T^p \mid \leqslant \frac{r+\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

(où nous avons utilisé le fait que $\Phi^{L_q}_{sg}(T^p, q)$ appartient à $B_r(\overline{p})$ puisque $\delta < \delta_1$). Il en découle une contradiction qui prouve l'affirmation. $\square$

Nous avons donc que $\Phi : \Omega \to U$ est une application holomorphe (car elle est localement donnée par le flot local de X). De plus elle satisfait les conditions 1 et 2 de la définition de flot semi-global. Il nous reste à montrer que si $p \in U$ ($X(p) \neq 0$) et si $\{T_i\}$ est une suite de points de Ω_q convergeant vers un point $\hat{T} \in \partial\Omega_p$, alors $\Phi(T_i, p)$ converge vers le bord de U. Supposons par l'absurde que cela est faux. La suite $\Phi(T_i, p)$ reste donc dans une partie compacte de U et, quitte à choisir une sous-suite, elle converge vers un certain point $q \in U$. Comme X définit un flot local au voisinage de q, toute solution de X passant par ce voisinage peut être prolongé pour tout $T \in \mathbf{C}$ avec $| T | < \tilde{\varepsilon}$ (pour un certain $\tilde{\varepsilon} > 0$). Ceci montre que $\hat{T}$ ne peut pas appartenir à $\partial\Omega_p$. La contradiction qui en résulte démontre la proposition. $\square$

3. Singularités avec deux valeurs propres non nulles

Dans ce paragraphe nous allons donner la preuve du théorème A de l'introduction. Soit ω une 1-forme différentielle holomorphe ayant deux valeurs propres non nulles à l'origine de $\mathbf{C}^2$. Nous appelons α et β ces valeurs propres. Le cas où la partie linéaire de ω n'est pas diagonalisable sera traité dans le lemme (3.1), donc pour l'instant nous pouvons supposer que ω s'écrit $\omega = \alpha x\,dy + \beta y\,dx + \omega_{\geqslant 2}$ (où $\omega_{\geqslant 2}$ est une 1-forme différentielle dont l'ordre en l'origine est au moins 2). On a les possibilités suivantes :

a) $\alpha/\beta \notin \mathbf{R}_+$ et puis $-\alpha/\beta$ (resp. $-\beta/\alpha$) n'appartient pas à $\mathbf{N}$.

b) $\alpha = -n\beta$ (ou $\beta = -n\alpha$) pour certain $n \in \mathbf{N}$.

c) $\alpha/\beta \in \mathbf{R}_+$.

On remarque que le cas *b)* pour $n = 1$ contient le cas où la partie linéaire de ω n'est pas diagonalisable.

Dans le cas *a)*, la 1-forme ω qui en résulte est nécessairement linéarisable (grâce au théorème de Poincaré) et *a fortiori* elle est associée à un champ de vecteurs semi-complet au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^2$. Dans le cas *b)*, la 1-forme ω correspondante est ou bien linéarisable (et donc associée à un champ semi-complet) ou bien conjuguée à sa forme normale de Poincaré-Dulac (pour les démonstration de ces résultats le lecteur peut consulter par exemple [Arn]). De notre point de vue, le cas *c)* est le plus intéressant. En effet, dans ce cas cette 1-forme n'est pas nécessairement linéarisable et d'autres phénomènes dynamiques peuvent avoir lieu. Cependant, avant d'étudier ce cas, nous réglons la question concernante à la forme normale de Poincaré-Dulac par le lemme ci-dessous :

LEMME 3.1. — *Soit X un champ de vecteurs holomorphe défini au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^2$. Supposons que la partie linéaire de X à l'origine s'écrit (une constante multiplicative près) $nx\,\partial/\partial x + y\,\partial/\partial y$ ($n \in \mathbf{N}$). Alors (un facteur inversible près) le champ X est semi-complet au voisinage de l'origine.*

Démonstration. — Le cas où X est linéarisable étant évident, nous supposerons que X est conjugué (à un facteur inversible près) à sa forme normale de Poincaré-Dulac. Cela veut dire qu'il existe un système de coordonnées où $X = (nx + y^n)\,\partial/\partial x + y\,\partial/\partial y$.

On vérifie immédiatement que l'application $\Phi((x_0, y_0), T) = ((x_0 + y_0 T)e^{nT}, y_0 e^{nT})$ définit un flot semi-global associé à X. Ceci démontre le lemme. □

Dans la suite et jusqu'à la fin de la preuve du théorème A, nous supposerons que ω est une 1-forme différentielle, définie au voisinage de $(0,0) \in \mathbf{C}^2$, dont la partie linéaire en $(0,0)$ est $\alpha x\,dy + \beta y\,dx$ avec $\alpha/\beta \in \mathbf{R}_+$. Quitte à multiplier cette 1-forme par une constante non nulle, on peut se ramener au cas où α et β sont des nombres réels positifs.

Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage (singulier en l'origine) défini par ω. Il est connu que $\mathcal{F}$ possède deux séparatrices lisses et transverses. Quitte à faire un nouveau changement de coordonnées, nous pouvons considérer que ces séparatrices sont données par $\{x = 0\}$ et $\{y = 0\}$.

On désigne par $\pi_1(x, y) = x$ la projection de $\mathbf{C}^2$ sur la première coordonnée et on considère un nombre réel positif $r \in \mathbf{R}_+ \subset \mathbf{C}$. Étant donné $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$, nous définissons une *section transverse* Σ par $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \,;\, x = r \text{ et } \mid y \mid < \varepsilon\}$. Pour ε suffisamment petit, les feuilles de $\mathcal{F}$ sont transverses à Σ et, en fait, aux fibres de π_1 distinctes de $\{x = 0\}$. Nous allons utiliser la section Σ pour construire un certain voisinage U de $(0,0) \in \mathbf{C}^2$ qui sera important dans la démonstration du théorème A (cf. [Ma-Mo]).

Désignons par $\Sigma_{\mathcal{F}}$ le *saturé* de Σ par $\mathcal{F}$. Soit $E \subset \mathbf{C}^2$ la réunion de $\Sigma_{\mathcal{F}}$ avec l'ensemble $\{(0, y) \in \mathbf{C}^2 ; \mid y \mid < \varepsilon\}$. Comme α, β sont des nombres réels positifs, il est bien connu que E contient un voisinage $\mathcal{U}$ de l'origine.

Considérons la restriction de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{U}$. D'après [Ma-Mo], on peut choisir le voisinage $\mathcal{U}$ de sorte que le feuilletage $\mathcal{F}$ possède une propriété remarquable concernant le relèvement de chemins. En effet, supposons que (z_1, z_2) est un point de $\mathcal{U}$ et que L_z est la feuille de $\mathcal{F}$ contenant ce point. Alors le chemin $c : [0,1] \to \{y = 0\}$ donné par $c(t) = ((1-t)z_1 + trz_1/ \mid z_1 \mid, 0)$ (où r est comme dans la définition de Σ) se relève entièrement (par rapport à π_1) en un chemin $c_{L_z} \subset L_z \subset \mathcal{U}$ tel que $c_{L_z}(0) = (z_1, z_2)$.

Démonstration du théorème A. — Évidemment il existe un champ de vecteurs holomorphe X dont le feuilletage associé est une restriction de $\mathcal{F}$ et qui, de plus, s'écrit :

$$X = \alpha x \partial/\partial x \; - \; \beta y(1 + f(x,y))\partial/\partial y\,,$$

où f est une fonction holomorphe et $f(0,0) = 0$.

Soit $\mathcal{U}$ le voisinage décrit ci-dessus et considérons la restriction du feuilletage $\mathcal{F}$ à $\mathcal{U}$. Désignons par L une feuille régulière de $\mathcal{F}$ et par dT_L la 1-forme temps induite sur cette feuille par X. Grâce à la proposition (2.1), il nous suffit de montrer que si c_L est un chemin contenu dans L sur lequel l'intégrale de dT_L est nulle, alors c_L est un chemin fermé.

Supposons donc par l'absurde que $c_L \subset L$ est un chemin *ouvert* le long duquel l'intégrale de dT_L vaut *zéro.* Soit $c \subset \{y = 0\}$ la projection de c_L dans la première coordonnée (i.e. $c = \pi_1(c_L)$). On déduit que

$$\int_c \frac{dx}{\alpha x} = \int_{c_L} dT_L = 0\,.$$

Il résulte que c est un chemin *fermé et homotopiquement trivial* de $\{y = 0\} \setminus (0,0)$. Fixons un cercle $S = (r_1 e^{2\pi i t}, 0)$, $(t \in [0,1])$ tel que c soit contenu dans l'intérieur de $S \subset \{y = 0\}$. En "poussant" le chemin c le long des droites radiales, nous réalisons une homotopie entre c et un chemin $\overline{c}$ contenu dans S. De plus cette homotopie se relève par π_1 en une homotopie *contenue dans* L entre c_L et un chemin $\overline{c}_L$ qui est un relevé en L de $\overline{c}$ (grâce à la remarque faite sur $\mathcal{U}$). D'autre part, comme c est homotopiquement trivial, il en est de même pour $\overline{c}$. On peut donc considérer une homotopie *contenue dans* S entre $\overline{c}$ et un chemin constant. Cette homotopie se relève évidemment par π_1 en une homotopie *contenue dans* L entre $\overline{c}_L$ et un chemin constant. Ceci est une contradicition avec l'hypothèse que c_L est un chemin ouvert.

Il découle que l'intégrale de dT_L ne peut s'annuler que sur les chemins fermés. Ceci démontre le théorème. $\square$

4. Les col-nœuds

Soit encore X un champ de vecteurs holomorphe à singularité isolée défini au voisinage de $(0,0) \in \mathbf{C}^2$. Désignons par $\mathcal{F}$ le feuilletage holomorphe singulier associé à X et considérons aussi une 1-forme différentielle holomorphe ω (à singularité isolée) qui définit $\mathcal{F}$.

La référence la plus complète sur les col-nœuds est sans doute l'article [M-R1], le lecteur y trouvera tous les faits concernants aux col-nœuds qui seront utilisés dans la suite. En effet, les auteurs obtiennent la classification des ces singularités à des changement de coordonnées holomorphes près. Le but de ce paragraphe est de caractériser les col-nœuds $\mathcal{F}$ qui sont associés à des champs de vecteurs semi-complets au voisinage de $(0,0) \in \mathbf{C}^2$. Cela est parvenu par le théorème (4.1) ci-dessous.

THÉORÈME 4.1. — *Soit $\mathcal{F}$ un col-nœud défini au voisinage de* $(0,0) \in \mathbf{C}^2$ *et considérons une 1-forme différentielle ω (à singularité isolée) qui définit $\mathcal{F}$. Le feuilletage $\mathcal{F}$ est associé à un champ semi-complet si et seul si ω admet la forme normale*

$$x(1+\lambda y)\,dy \;-\; y^2\,dx$$

avec $\lambda \in \mathbf{Z}$.

Avant de commencer la preuve du théorème (4.1), nous avons besoin de rappeler quelques propriétés fondamentales des col-nœuds. Soit donc $\mathcal{F}$ un col-nœud associé à un champ de vecteurs à singularité isolée X et considérons aussi une 1-forme différentielle ω qui définit $\mathcal{F}$. D'après le théorème de forme normale de Dulac (voir [Dul]), il existe un système de coordonnées où ω s'écrit

$$\omega(x,y) = [x(1+\lambda y^p) + yR(x,y)]\,dy \;-\; y^{p+1}\,dx\,,$$

où $\lambda \in \mathbf{C}$, $p \in \mathbf{N}^*$ et l'ordre de R en $(0,0)$ par rapport a x est au moins $p+1$.

Le lemme ci-dessous montre que si $\mathcal{F}$ est associé à un champ semi-complet alors $p = 1$.

LEMME 4.2. — *Soit X un champ de vecteurs holomorphe, défini au voisinage de* $(0,0) \in \mathbf{C}^2$*, qui s'écrit*

$$X(x,y) = f.\left\{[x(1+\lambda y^p) + yR(x,y)]\,\frac{\partial}{\partial x} \;+\; y^{p+1}\,\frac{\partial}{\partial y}\right\}\,,\ \textit{où } f(0,0) \neq 0\,.$$

Supposons que X est semi-complet. Alors $p = 1$.

Démonstration. — Supposons par l'absurde que $p \geqslant 2$. Soit π_2 la projection de $\mathbf{C}^2$ dans l'axe $\{x = 0\}$. Les fibres de π_2 sont évidemment transverses aux feuilles du feuilletage $\mathcal{F}$ associé à X. Fixons un bidisque $B_{\varepsilon\varepsilon}$ de centre en $(0,0) \in \mathbf{C}^2$ et de rayons $\varepsilon > 0$ sur lequel X est semi-complet.

Pour $r \in \mathbf{R}_+$ $(r < \varepsilon)$, nous considérons le chemin $c(t) = (0, re^{2\pi i t/p})$, $(t \in [0,1])$. Pour $x_0 \neq 0$ très petit, le chemin c se relève, par rapport à π_2, en un chemin c_L contenu dans la feuille L de $\mathcal{F}$ qui passe par (x_0, r). Soit dT_L la 1-forme temps induite par X sur L. Supposons que x_0 converge vers 0, alors on a :

$$\int_{c_L} dT_L \longrightarrow \int_c \frac{dy}{y^{p+1} f(0,y)} = cst\,,$$

où la constante *cst* ne dépend que du résidu de la 1-forme $dy/y^{p+1}f(0,y)$. Comme c est un chemin ouvert $(p \geqslant 2)$, il en est de même pour c_L. Par ailleurs, comme y peut être choisi arbitrairement petit et si $cst \neq 0$, il est clair qu'on peut compléter c_L en un chemin $\tilde{c}_L$, encore plongé dans L, sur lequel l'intégrale de dT_L est nulle. Il découle une contradiction avec l'hypothèse que X est semi-complet. Ceci montre que $p = 1$. $\square$

Dans la suite nous supposons donc $p = 1$. Un changement *formel* de coordonnées de la forme $(x, y) \mapsto (\varphi(x, y), y)$, où $\varphi(x, y) = x + \sum_1^\infty \varphi_n(x) y^n$ avec les coefficients φ_n holomorphes sur un même voisinage de $0 \in \mathbf{C}$, nous permet d'écrire ω comme

$$\omega_\lambda = x(1 + \lambda y)\, dy \;-\; y^2\, dx\,.$$

La 1-forme ω_λ est dite la *forme normale formelle de* ω. Observons cependant que ω et ω_λ ne sont pas nécessairement analytiquement (holomorphiquement) conjuguées.

Il résulte des formes normales ci-dessus (i.e. la forme normale de Dulac et de celle formelle) que l'axe $\{y = 0\}$ est invariant par ω et ω_λ. Cet axe est appelé la *variété forte* de ω (ou de ω_λ ou du col-nœud $\mathcal{F}$). Par ailleurs l'axe $\{x = 0\}$ est invariant par ω_λ et appelé la *variété faible* de ω (resp. ω_λ, $\mathcal{F}$). Dans le cas particulier où ω a effectivement deux courbes analytiques invariantes, on dira que la *variété faible de* ω *est convergente.*

Bien que ω et ω_λ ne soient pas analytiquement conjuguées au voisinage de l'origine, elles sont conjuguées dans des "secteurs" convenables. Cela résulte d'un théorème dû à Hukuara-Kimura-Matuda (cf. [HKM]) que nous expliquons dans le cadre $p = 1$. D'abord on appelle *secteur angulaire d'angle* $\theta < 2\pi$ *et de rayon* r l'intersection d'un secteur angulaire de sommet en $0 \in \mathbf{C}$ et d'angle θ avec la boule $B_r \subset \mathbf{C}$ de centre en $0 \in \mathbf{C}$ et de rayon r.

Soit alors U un secteur angulaire de rayon r et d'angle strictement inférieur à 2π. D'après [HKM], si r est choisi assez petit (l'angle de U étant fixé), il existe une application holomorphe bornée $\phi_U : B_r \times (U \setminus \{0\}) \to \mathbf{C} \times (U \setminus \{0\})$ telle que $\phi_U^* \omega \wedge \omega_\lambda = 0$. De plus $\phi_U(x, y) = (\varphi_u(x, y), y)$ où φ_u est asymptote à φ en $(0, 0) \in \mathbf{C}^2$.

Maintenant on considère deux secteurs angulaires, U_1 et U_2, donnés respectivement par $U_1 = B_r \cap \{z \in \mathbf{C}\,;\, \arg z \in [0, 5\pi/4) \cup (7\pi/4, 2\pi]\}$ et par $U_2 = B_r \cap \{z \in \mathbf{C}\ ;\ \arg z \in [0, \pi/4) \cup (3\pi/4, 2\pi]\}$ (où 0 est identifié à 2π). Désignons par V^+ et V^- chacune des deux composantes connexes de $U_1 \cap U_2$ de sorte que V^+ (resp. V^-) est le secteur d'ouverture $\pi/2$ dont la bissectrice est le demi-axe positif (resp. négatif) des abscisses. En particulier $V^+ \subset \mathrm{Re} z > 0$ et $V^- \subset \mathrm{Re} z < 0$. Dans $B_r \times U_1$ (resp. $B_r \times U_2$) nous considérons le feuilletage $\mathcal{F}_1$ (resp. $\mathcal{F}_2$) induit par l'équation $\omega_\lambda = 0$. Évidemment $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ coïncident sur V^+, V^-, ainsi nous dénotons par $\mathcal{F}^+$ (resp. $\mathcal{F}^-$) la restriction de ces feuilletages à V^+ (resp. V^-).

Soient ϕ_1, ϕ_2 des applications normalisantes (au sens de [HKM]) définies respectivement sur $B_r \times (U_1 \setminus \{0\})$ et $B_r \times (U_2 \setminus \{0\})$. Le changement de coordonnées $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ induit une permutation d'une partie de l'espace des feuilles de $\mathcal{F}^+$ et $\mathcal{F}^-$. Plus précisément, il fait apparaître deux difféomorphismes g^+, g^- associés à chacune des composantes connexes V^+, V^- de $U_1 \cap U_2$. Nous choisissons les notations de manière que g^+ (resp. g^-) est responsable pour la permutation de l'espace des feuilles de $\mathcal{F}^+$ (resp. $\mathcal{F}^-$) sur V^+ (resp. V^-). Autrement dit, ces difféomorphismes déterminent le "collage" des feuilles sur les ouverts correspondants. Nous appelerons g^+ *l'invariant de type noeud* et g^- *l'invariant de type col.* On a :

- g^+ est une translation (à transformation linéaire près) ;

- g^- est un difféomorphisme local (d'une variable complexe) tangent à l'identité.

D'après [M-R1], étant donné $p = 1$ et λ fixé, le couple de difféomorphismes g^+, g^- caractérise entièrement le col-nœud $\mathcal{F}$.

Le prochain lemme affirme que dans notre cas g^+ est l'identité.

LEMME 4.3. — *Soit X un champ de vecteurs semi-complet pour lequel $(0,0)$ est une singularité isolée. Considérons le feuilletage singulier $\mathcal{F}$ associé à X et supposons que $\mathcal{F}$ est un col-nœud. Alors g^+ est l'identité (ou de manière équivalente la variété faible de $\mathcal{F}$ est convergente).*

Démonstration. — Nous pouvons écrire le champ X sous la forme

$$X = f.\left\{[x(1+\lambda y) + yR(x,y)]\,\frac{\partial}{\partial x} \;+\; y^2\,\frac{\partial}{\partial y}\right\},$$

avec $f(0,0) \neq 0$. Nous traiterons seulement le cas $f = cst$ et laisserons la généralisation facile à f quelconque au lecteur.

D'abord observons que g^+ est trivial si et seulement si la variété faible de $\mathcal{F}$ est convergente (cf. [M-R1], page 111). Nous allons voir que cela est en fait le cas.

Rappelons que ϕ_1, ϕ_2 sont des applications normalisantes définies respectivement sur $B_r \times (U_1 \setminus \{0\})$ et $B_r \times (U_2 \setminus \{0\})$. De plus $\mathcal{F}$ est transverse aux droites horizontales (les fibres de la projection π_2). Soit $c(t)$ le chemin $(0, re^{2\pi i t})$, $t \in [0,1]$, et L la feuille de $\mathcal{F}$ qui contient $\phi_1(0, U_1 \setminus \{0\})$. Comme l'invariant de type col g^- fixe $0 \in \mathbf{C}$, on voit que le relevé (par rapport à π_2) c_L de c en L est un chemin fermé si et seulement si g^+ est trivial (ici on utilise implicitement que $\{x = 0\}$ est invariant par ω_λ). Supposons par l'absurde que c_L est ouvert. Or, la 1-forme temps dT_L induite par X sur L est telle que

$$\int_{c_L} dT_L = \int_c \frac{dy}{y^2} = 0\,.$$

On obtient donc une contradiction puisque X est semi-complet et c_L est ouvert. Le lemme est démontré. $\square$

Essentiellement il nous reste à montrer que g^- est lui-aussi trivial. Ceci découlera d'un argument de trivialité pour "l'holonomie" de la variété faible de $\mathcal{F}$ (ce qui reprend une idée de [Gh-Reb]). Précisons cela.

Comme la variété faible de $\mathcal{F}$ est convergente, nous pouvons écrire le champ X sous la forme

$$X = f[x(1 + \lambda y + yR(x,y))\frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y} \tag{1}$$

(i.e. on identifie la variété faible à l'axe $\{x = 0\}$). Dans le restant de ce paragraphe nous travaillerons seulement avec $f = cst$ (et en fait égale à 1). La généralisation à f quelconque est facile et laissé au lecteur.

Nous allons d'abord démontrer directement que λ est un entier (ceci n'est pas indispensable mais fait la discussion plus simple).

Soit A_δ l'anneau défini par $\{(0,y)\,;\, r - \delta <| y |< r + \delta\}$ pour $\delta > 0$ assez petit. Soit W le cylindre $B_r \times A_\delta$. La restriction de $\mathcal{F}$ à W, $\mathcal{F}_{|W}$, définit un feuilletage régulier dont une feuille est l'intersection de W avec la droite $\{x = 0\}$. Appelons Σ la transversale donnée par $\{(x,r), 0 \leqslant | x |< r\}$ et considérons encore le chemin $c(t) = (0, re^{2\pi i t}) \subset \{x = 0\}$. Comme $\mathcal{F}_{|W}$ est transverse aux fibres de π_2, nous pouvons considérer l'holonomie locale de la feuille de $\mathcal{F}_{|W}$ induite par $\{x = 0\}$. Il s'agit bien sûr d'un difféomorphisme local h de $(\mathbf{C}, 0)$ et un calcul facile (et d'ailleurs bien connu), en utilisant la forme normale (1), montre que $h'(0) = e^{2\pi i \lambda}$.

Cependant, si c_τ dénote le relevé de c en la feuille L_τ de $\mathcal{F}_{|W}$ satisfaisant $c_\tau(0) = (\tau, r)$ (τ très petit), alors on a :

$$\int_{c_L} dT_{L_\tau} = \int_c \frac{dy}{y^2} = 0 \,.$$

Puisque X est semi-complet, on conclut que c_τ est fermé pour tout τ suffisamment petit. Il résulte que h est l'identité et donc $e^{2\pi i \lambda} = 1$, c'est-à-dire que λ est un entier.

Démonstration du théorème (4.1). — Soient $\mathcal{F}, \omega$ comme dans l'énoncé du théorème et X un champ semi-complet associé à $\mathcal{F}$. Les feuilles de $\mathcal{F}_\lambda$ (le feuilletage défini par $\omega_\lambda = 0$) sont des graphes sur l'axe des ordonnées (on exclut bien sûr $\{y = 0\}$). En effet ces feuilles sont données par

$$x = Cst \,.\, y^\lambda \,.\, \exp\left(\frac{-1}{y}\right) \,, \tag{2}$$

où Cst est une constante qui dépend de la feuille (on remarque que $\lambda \in \mathbf{Z}$ de sorte que l'expression ci-dessus est bien définie hors de $\{y = 0\}$).

D'abord nous allons prouver que g^- est l'identité.

Reprenons les notations utilisées le long du paragraphe. Étant donné $\tau \in \mathbf{C}$ ($\mid \tau \mid$ très petit), soit c_τ (resp. c_τ^λ) le relevé par rapport à π_2 de $c(t) = (0, re^{2\pi i t})$ en la feuille L_τ de $\mathcal{F}$ (resp. L_τ^λ de $\mathcal{F}_\lambda$) satisfaisant $c_\tau(0) = (\tau, r)$ (resp. $c_\tau^\lambda(0) = (\tau, r)$). Le chemin c_τ^λ est fermé comme il résulte de (2). De même c_τ est lui-aussi fermé car l'intégrale sur c_τ de la 1-forme temps correspondante s'annule.

Le changement de coordonnées $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ induit deux permutations sur l'espace des feuilles de $\mathcal{F}_\lambda$ lesquelles sont représentées par g^+, g^-. Cependant g^+ est trivial de façon que la seule permutation de l'espace de feuilles est déterminée par g^-. Or, comme c_τ, c_τ^λ sont fermés pour tout τ, il découle de la naturalité des applications ϕ_1, ϕ_2 que la permutation des feuilles de $\mathcal{F}_\lambda$ représentée par g^- est triviale. Donc g^- est l'identité et le col-nœud $\mathcal{F}$ est analytiquement conjugué à $\mathcal{F}_\lambda$ qui est donné par

$$x(1 + \lambda y)\, dy \;-\; y^2\, dx = 0.$$

Finalement il reste vérifier que tous les col-nœuds $\mathcal{F}_\lambda$ ($\lambda \in \mathbf{Z}$) comme ci-dessus sont effectivement associés à des champs semi-complets. Ceci est cependant évident car les équations

$$x(T) = \frac{x_0 e^T}{(1 - y_0 T)^\lambda} \;\text{ et }\; y(T) = \frac{y_0}{1 - y_0 T}$$

définissent un flot semi-global dont le feuilletage correspondant est bien sûr $\mathcal{F}_\lambda$. La preuve du théorème (4.1) est achevée. $\square$

5. Autour de la linéarisation de champs semi-complets ayant des courbes de singularités

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer le théorème B de l'introduction. Étant donné des entiers strictement positifs m, n et k, nous considérons le champ de vecteurs X^{isol} défini par

$$X^{isol} = mx \frac{\partial}{\partial x} - ny(1 + x^{kn}y^{km}) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Il se trouve cependant que la semi-complètude de $x^n y^m X^{isol}$ (pour $k \geqslant 2$) est un résultat qui dépend des estimations de nature plutôt analytique (bien que assez élémentaire). En effet la géométrie des orbites de ces champs (autrement dit, le feuilletage défini par X^{isol}) est bien compris d'après [M-R2]. Néanmoins dans notre problème c'est la *paramétrisation* de l'orbite qui joue le rôle décisif et ceci dépend de façon délicate des fonctions qui la définissent (par exemple si $k = 1$ le champ n'est pas semi-complet).

L'idée de nos calculs est bien simple. De façon similaire aux paragraphes 2, 3, on réduit le problème à l'analyse de chaque orbite individuellement. De plus, pour une orbite (feuille) L fixée, nous savons que L admet un paramétrage naturel donné par le flot semi-global de X^{isol} (que nous savons *à priori* être semi-complet grâce au théorème A). Cependant le *domaine* du flot semi-global induit par X^{isol} sur L est un "gros" ouvert de $\mathbf{C}$ dont l'étude nécessite des informations plus "quantitatives". Ces informations peuvent effectivement être obtenues en "intégrant explicitement X^{isol}". Cela est l'objet de la première moitié de ce paragraphe. Avec ces formules explicites on ramène l'étude de la semi-complètude de $x^n y^m X^{isol}$ sur L à celle d'un certain champ (d'une variable complexe) sur un "gros" ouvert de $\mathbf{C}$. Finalement cette dernière étude est facile grâce aux formules disponibles.

La discussion ci-dessus a pour but justifier l'existence de quelques expressions d'allure "lourde" que le lecteur rencontrera dans la suite. Ces expressions me semblent inévitables si l'on veut rester bien précis. Il peut être rassurant pour le lecteur que, malgré "l'apparence" de ces expressions, nos arguments sont très élémentaires et reposent sur la comparaison de la fonction exponentielle avec la fonction linéaire (ou des polynômes).

Comme on a déjà observé, d'après le théorème A, on sait que le champ X^{isol} est semi-complet au voisinage de l'origine. Il est cependant utile de trouver une expression explicite pour le flot semi-global engendré par ce champ. Pour cela, observons que X^{isol} est équivalent à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dT} = mx \; ; \quad \frac{dy}{dT} = -ny(1 + x^{kn}y^{km}) \, . \tag{3}$$

On obtient immédiatement la solution $x(T) = x_0 e^{mT}$. Ceci nous mène à

$$\frac{dy}{dT} = -ny - nx_0^{kn} e^{kmnT} y^{km+1} \, . \tag{4}$$

L'équation (4) est dite une *équation de Bernoulli.* Il est facile d'intégrer cette équation selon une méthode classique. On trouve alors les solutions suivantes :

$$x(T) = x_0 e^{mT} \; ; \quad y(T) = \frac{y_0}{e^{nT}(1 + kmnx_0^{kn} y_0^{km} T)^{1/km}} \, . \tag{5}$$

Comme ces expressions font intervenir une racine d'indice km, il n'est pas clair, pour le moment, qu'elles ont un vrai sens holomorphe. Cependant on va les utiliser pour construire un flot semi-global associé à X^{isol}.

Considérons donc un bidisque $B_{\varepsilon\varepsilon}$ de centre en l'origine et de rayons ε (pour certain $\varepsilon > 0$ fixé). Appelons Σ la section transverse à l'axe $\{y = 0\}$ donnée par les points de $B_{\varepsilon\varepsilon}$ de la forme (ε, y) (où $\mid y \mid < \varepsilon$). Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage singulier de $B_{\varepsilon\varepsilon}$ engendré par les orbites locales de X^{isol} et désignons par $\Sigma_{\mathcal{F}}$ le saturé de Σ par les feuilles de $\mathcal{F}$. On rappelle que la réunion de $\Sigma_{\mathcal{F}}$ avec l'ensemble $\{(0, y) \in \mathbf{C}^2 \, ; \mid y \mid < \varepsilon\}$ contient un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbf{C}^2$.

Supposons que, pour chaque point $(\varepsilon, y_0) \in \Sigma$, nous avons un ouvert $\Omega_{\varepsilon y_0}$ de $\mathbf{C}$ et une branche de racine km−ième sur $Im(\Omega_{\varepsilon y_0})$ (où $Im(\Omega_{\varepsilon y_0})$ désigne l'image de $\Omega_{\varepsilon y_0}$ par l'application $T \mapsto 1 + kmn\varepsilon^{kn} y_0^{km} T)$ tels que :

1. l'application $\Phi((\varepsilon, y_0), T) = (x(T), y(T))$ donnée par les équations (5) (où $x_0 = \varepsilon$) est définie et holomorphe pour tout $T \in \Omega_{\varepsilon y_0}$;

2. si $\{T_i\}$ est une suite de points de $\Omega_{\varepsilon y_0}$ convergeant vers un point $\hat{T}$ appartenant à la frontière de $\Omega_{\varepsilon y_0}$, alors $\Phi((\varepsilon, y_0), T_i)$ converge vers le bord de $B_{\varepsilon\varepsilon}$;

3. l'application Φ dépend holomorphiquement de (ε, y_0).

Alors on a :

LEMME 5.1.— *Supposons que les conditions 1), 2) et 3) ci-dessus soient satisfaites. Alors il existe un flot semi-global* $\overline{\Phi}$ *associé à* X^{isol}.

Démonstration.— Soit V un voisinage de $(0,0) \in \mathbf{C}^2$ contenu dans la réunion de $\Sigma_{\mathcal{F}} \cup \{(0,y) \in \mathbf{C}^2; \mid y \mid < \varepsilon\}$. Nous choisissons un point (x_1, y_1) $(x_1 \neq 0)$ appartenant à V. D'après la construction de V, il est clair qu'il existe un point (ε, y_0) de Σ qui appartient à la même feuille L_1 de $\mathcal{F}$ que (x_1, y_1) (ce point n'est pas en général unique). Comme $\Phi((\varepsilon, y_0), .)$ est un difféomorphisme local de $\Omega_{\varepsilon y_0}$ sur L_1, il résulte l'existence de $T_1 \in \Omega_{\varepsilon y_0}$ tel que $\Phi((\varepsilon, y_0), T_1) = (x_1, y_1)$. Maintenant on définit un ensemble $\Omega_{\varepsilon y_0}^{(x_1,y_1)} \subseteq \mathbf{C}$ par $\Omega_{\varepsilon y_0}^{(x_1,y_1)} = \{T \in \mathbf{C} \; ; \; T - T_1 \in \Omega_{\varepsilon y_0}\}$.

On se convainc aisément que $\Omega_{\varepsilon y_0}^{(x_1,y_1)}$ ne dépend pas du point de $L \cap \Sigma$ choisi. De plus, il est évident que $\Omega_{\varepsilon y_0}^{(x_1,y_1)}$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbf{C}$. En utilisant ces ensembles, nous pouvons construire le “domaine du flot semi-global Φ” noté $\overline{\Omega}$. Pour cela nous posons

$$\overline{\Omega} = \left[\bigcup_{(x_1,y_1) \in V, x_1 \neq 0} \Big((x_1, y_1), \Omega_{\varepsilon y_0}^{(x_1,y_1)} \Big) \right] \cup (V \cap \{x = 0\}, \Omega_{0y}) \; ,$$

où $\Omega_{0y} = \{T \in \mathbf{C} \, ; \, ye^{-nT} \in V\}$. Nous laissons au lecteur le soin de montrer que $\overline{\Omega}$ est un sous-ensemble ouvert de $V \times \mathbf{C}$. Finalement, soit $\overline{\Phi} : \overline{\Omega} \to \mathbf{C}^2$ l'application définie par

$$\overline{\Phi}((x_1, y_1), T) = \Phi((\varepsilon, y_0), T - T_1)$$

si $x_1 \neq 0$ et par $\overline{\Phi}((0, y), T) = ye^{-nT}$ sinon.

On vérifie immédiatement que $\overline{\Phi}$ est bien définie, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du point (ε, y_0) de $L \cap \Sigma$ choisi. Grâce au lemme d'Hartogs, il résulte que $\overline{\Phi}$ est une application holomorphe (ici nous utilisons l'hypothèse 3)). Maintenant il est clair que $\overline{\Phi}$ est un flot semi-global associé à X^{isol}. Le lemme est démontré. □

Dans l'équation (5), on observe la présence d'une racine d'indice km. Ceci nous empêche de pouvoir définir l'application $\Phi((\varepsilon, y_0), T) = (x(T), y(T))$ pour tous les temps complexes T. Il n'est donc pas clair qu'on puisse construire les applications Φ de sorte que les conditions 1), 2) et 3) soient satisfaites. Pour dépasser cette difficulté, nous sommes amenés à considérer des branches de racines km−ième.

Remarque 5.2. — Dans le cas $k = m = 1$, le lecteur observera que le champ

$$x\partial/\partial x \; - \; ny(1+x^n y)\partial/\partial y$$

est semi-complet dans $\mathbf{C}^2$. En effet, pour $T \neq -1/nx_0^n y_0$, les équations

$$x(T) = x_0 e^T \text{ et } y(T) = \frac{y_0}{e^{nT}(1+nx_0^n y_0 T)}$$

définissent un flot semi-complet dans $\mathbf{C}^2$.

Dans la suite, nous allons décrire une manière d'associer à chaque point (ε, y_0) un ouvert $\Omega_{\varepsilon y_0} \subseteq \mathbf{C}$ et une branche de racine km−ième dans $Im(\Omega_{\varepsilon y_0})$ de sorte que l'application Φ qui en résulte (selon les formules (5)) satisfasse les conditions *1)*, *2)* et *3)*.

D'abord nous appelons $\Omega_{\varepsilon y_0}$ la composante connexe contenant $0 \in \mathbf{C}$ de l'ensemble des nombres $T \in \mathbf{C}$ qui vérifient $\mathrm{Re}(T) < 0$ et

$$\mid y_0 \mid^{km} e^{-kmn\mathrm{Re}(T)} < \varepsilon^{km} \mid 1 + kmn\varepsilon^{kn} y_0^{km} T \mid,$$

où $\mathrm{Re}(T)$ désigne la partie réelle de T.

Nous écrivons y_0^{km} sous la forme $\mid y_0 \mid^{km} e^{ikm\theta}$ $(y = \mid y_0 \mid e^{i\theta})$. De plus, nous désignons par $d_{km\theta}$ la demi-droite d'origine en $0 \in \mathbf{C}$ dont l'angle avec le demi-axe positif des abscisses vaut $(km\theta + \pi)$ si $\cos(km\theta) \geqslant 0$ et $km\theta$ si $\cos(km\theta) < 0$.

Le lemme ci-dessous montre qu'on peut effectivement munir $Im(\Omega_{\varepsilon y_0})$ d'une branche de racine km−ième

LEMME 5.3. — *Si ε est suffisamment petit et si $\mid y_0 \mid < \varepsilon$ $(y_0 \neq 0)$, alors $d_{km\theta} \cap Im(\Omega_{\varepsilon y_0}) = \emptyset$.*

Démonstration. — Nous allons considérer le cas $\cos(km\theta) \geqslant 0$ et laisser au lecteur les considérations analogues concernantes au cas $\cos(km\theta) \leqslant 0$. Supposons par l'absurde que l'énoncé est faux. Il existe donc $T_0 = \mid T_0 \mid e^{i\alpha} \in \Omega_{\varepsilon y_0}$ tel que $\sin(km\theta) + kmn\varepsilon^{kn} \mid y_0 \mid^{km} \mid T_0 \mid \sin\alpha = 0$ et

$$\mid y_0 \mid^{km} e^{-kmn|T_0|\cos\alpha} \leqslant \varepsilon^{km} \left(kmn\varepsilon^{kn} \mid y_0 \mid^{km} \mid T_0 \mid \mid \cos\alpha \mid - \cos(km\theta)\right). \tag{6}$$

Comme $\mid T_0 \mid \cos\alpha < 0$ (voir la définition de $\Omega_{\varepsilon y_0}$ ci-dessus), il est clair que pour ε petit le premier membre de (6) (qui contient une exponentielle) est strictement supérieur au second. Il en découle une contradiction qui prouve le lemme. □

Nous observons que, pour $\cos(km\theta) = 0$, $Im(\Omega_{\varepsilon y_0})$ est disjoint de l'axe $i\mathbf{R}$ (des nombres purement imaginaires).

Nous rappelons que pour définir une branche de racine $km-$ième sur un ouvert de $\mathbf{C}$, il suffit d'y construire une branche du logarithme complexe. En effet, si Log est une telle branche de logarithme, alors on obtient une branche de racine $km-$ième à l'aide de la formule

$$T^{1/km} = \exp\left(\frac{\operatorname{Log} T}{km}\right).$$

Comme l'ouvert $Im(\Omega_{\varepsilon y_0})$ est contenu dans $\mathbf{C} \setminus d_{km\theta}$, étant donné $T \in Im(\Omega_{\varepsilon y_0})$, on pose $\operatorname{Log} T = \int_c dz/z$, où c est un chemin plongé dans $\mathbf{C} \setminus d_{km\theta}$ tel que $c(0) = 1$ et $c(1) = T$.

Dans la suite, nous allons considérer que chaque ouvert $Im(\Omega_{\varepsilon y_0})$ est muni de la branche de racine $km-$ième définie par les formules ci-dessus. Ainsi, à chaque $(\varepsilon, y_0) \in \Sigma$, il correspond une application $\Phi : \Omega_{\varepsilon y_0} \to \mathbf{C}^2$ définie par $\Phi(T) = (x(T), y(T))$, où $x(T)$ et $y(T)$ sont comme en (5). Finalement on est arrivé à la démonstration de la proposition (5.4).

PROPOSITION 5.4.— *L'application Φ ci-dessus satisfait les conditions 1), 2) et 3) pour tout (ε, y_0) appartenant à Σ.*

Démonstration.— La condition 1) est évidente parce que $(x(T), y(T))$ sont donnés par des formules explicites et $1 + kmn\varepsilon^{kn} y_0^{km} T$ appartient à un ensemble muni d'une branche de racine $km-$ième.

Considérons donc la condition 2). Supposons que $\{T_i\}$ est une suite de points de $\Omega_{\varepsilon y_0}$ convergeant vers un point $\hat{T}$ du bord de $\Omega_{\varepsilon y_0}$. Nous pouvons supposer $\operatorname{Re}(\hat{T}) < 0$, autrement $\mid x(\hat{T}) \mid = \varepsilon$ et donc $(x(\hat{T}), y(\hat{T})) \in \partial B_{\varepsilon\varepsilon}$. On déduit alors que

$$\mid y_0 \mid^{km} e^{-kmn\operatorname{Re}(\hat{T})} = \varepsilon^{km} \mid 1 + kmn\varepsilon^{kn} y_0^{km} \hat{T} \mid .$$

Puisque $e^{-kmn\operatorname{Re}(\hat{T})} = \mid e^{-kmn\hat{T}} \mid$, il résulte que

$$\varepsilon = \frac{\mid y_0 \mid}{\mid e^{-n\hat{T}} \mid \mid 1 + kmn\varepsilon^{kn} y_0^{km} \hat{T} \mid^{1/km}} .$$

On conclut que $\mid y(\hat{T}) \mid = \varepsilon$ et $(x(\hat{T}), y(\hat{T})) \in \partial B_{\varepsilon\varepsilon}$.

Il ne nous reste que la condition 3) à vérifier. D'abord on fixe $T_0 \in \Omega_{\varepsilon y_0}$ et on observe que, si y_1 est assez proche de y_0, alors T_0 appartient aussi à $\Omega_{\varepsilon y_1}$. Ainsi il s'agit de montrer que l'application $\Phi((\varepsilon, y), T_0)$ dépend holomorphiquement de y. Cela est évident d'après la formule (5). La preuve de la proposition est terminée. $\square$

En particulier on a retrouvé que le champ X^{isol} est semi-complet au voisinage de l'origine.

Le reste de ce paragraphe est consacré à l'étude du champ $X_{n,m} = x^n y^m X^{isol}$ et à la démonstration du théorème B.

Tout d'abord nous allons prouver deux lemmes concernant l'injectivité de certaines applications, lesquels seront nécessaires pour la preuve du théorème B.

Appelons $I_1 : \Omega_{\varepsilon y_0} \to \mathbf{C}$ l'application donnée par $I_1(T) = (1 + mn\varepsilon^n y_0^m T)^2$.

LEMME 5.5. — *Si $y_0 \in \mathbf{R}_+$ est suffisamment petit, alors I_1 n'est pas injective dans $\Omega_{\varepsilon y_0}$.*

Démonstration. — Choisissons un nombre $b \in \mathbf{R}_+$ et considérons les nombres complexes T_{+b} et T_{-b} qui s'écrivent respectivement $-1/(mn\varepsilon^n y_0^m) + ib$ et $-1/(mn\varepsilon^n y_0^m) - ib$. Évidemment $T_{+b} \neq T_{-b}$ et $I_1(T_{+b}) = I_1(T_{-b})$. Il suffit donc de voir que T_{+b} et T_{-b} appartiennent à $\Omega_{\varepsilon y_0}$ dès que b est choisi assez grand. Par définition, on sait que

$$\mathrm{Re}(T_{+b}) = \mathrm{Re}(T_{-b}) = -1/(mn\varepsilon^n y_0^m) < 0.$$

D'autre part l'inégalité

$$| y_0 |^m \, e^{-1/\varepsilon^n y_0^m} = | y_0 |^m \, e^{-mn\mathrm{Re}(T_{\pm b})} < \varepsilon^m \mid 1 + mn\varepsilon^n y_0^m T_{\pm b} | = \varepsilon^m b$$

est satisfaite si on choisi b très grand. Finalement il est clair qu'on peut trouver b assez grand de façon que T_{+b} et T_{-b} appartiennent effectivement à la composante connexe contenant $0 \in \mathbf{C}$ de l'ouvert des nombres qui satisfont les deux inégalités ci-dessus. Autrement dit, T_{+b} et T_{-b} sont des éléments de $\Omega_{\varepsilon y_0}$. Le lemme est démontré. $\square$

Le lemme ci-dessus interviendra dans la preuve de la remarque (5.7) qui concerne le cas $k = 1$. Le rôle analogue (pour la preuve du théorème B) correspondant à $k \geqslant 2$ sera joué par le lemme (5.6).

Pour $k \geqslant 2$, soit $I_k : \Omega_{\varepsilon y_0} \to \mathbf{C}$ l'application donnée par $I_k(T) = (1 + kmn\varepsilon^{kn} y_0^{km} T)^{(k+1)/k}$.

LEMME 5.6. — *Si $| y_0 |$ est assez petit, alors I_k est injective sur $\Omega_{\varepsilon y_0}$.*

Démonstration. — Supposons par l'absurde que cela est faux. Il existe donc des nombres distincts T_1 et T_2 appartenants à $\Omega_{\varepsilon y_0}$ tels que $I_k(T_1) = I_k(T_2)$. En particulier

$$\mid 1 + kmn\varepsilon^{kn} y_0^{km} T_1 \mid = \mid 1 + kmn\varepsilon^{kn} y_0^{km} T_2 \mid$$

et nous désignerons par C la valeur de ce module.

Écrivons alors $1 + kmn\varepsilon^{kn} y_0^{km} T_1$ et $1 + kmn\varepsilon^{kn} y_0^{km} T_2$ sous la forme $Ce^{i\alpha}$ et $Ce^{i\beta}$ où α, β sont bien définis puisque $Im(\Omega_{\varepsilon y_0})$ est muni d'une branche de racine $k-$ième fixée. Comme $I_k(T_1) = I_k(T_2)$, il résulte que $\alpha - \beta = 2\pi - 2\pi/(k+1)$.

Pour $\delta > 0$ très petit fixé, nous appelons $V_{\delta+2\pi/k+1}$ le secteur angulaire de sommet en $0 \in \mathbf{C}$, d'angle $\delta + 2\pi/(k+1)$ et dont la bissectrice est précisément la demi-droite $d_{km\theta}$. De $\alpha - \beta = 2\pi - 2\pi/(k+1)$, on déduit qu'au moins l'un des nombres $Ce^{i\alpha}$ ou $Ce^{i\beta}$ appartient à $V_{\delta+2\pi/k+1}$ (autrement on aurait $\alpha - \beta \leqslant 2\pi - 2\pi/(k+1) - \delta$ ce qui est absurde). La contradiction désirée découle alors de l'affirmation ci-dessous :

AFFIRMATION. — Si $\delta > 0$ est choisi suffisamment petit, alors on a $V_{\delta+2\pi/k+1} \cap Im(\Omega_{\varepsilon y_0}) = \emptyset$.

Démonstration de l'affirmation. — Il suffit de démontrer l'affirmation pour $\cos(km\theta) \geqslant 0$, puisque l'autre possibilité est analogue. Nous considérons un nombre complexe $T_0 = \mid T_0 \mid e^{i\gamma}$ tel que $1 + kmn\varepsilon^{kn} y_0^{km} T_0$ soit contenu dans $V_{\delta+2\pi/k+1}$. Cela entraîne l'inégalité (où il faut tenir compte du fait que $k \geqslant 2$)

$$\begin{aligned} &\mid 1 + kmn\varepsilon^{kn} y_0^{km} T_0 \mid \\ &\qquad \leqslant \cos^{-1}\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\left[kmn\varepsilon^{kn} \mid y_0 \mid^{km} \mid T_0 \mid \mid \cos\gamma \mid - \cos(km\theta)\right] . \end{aligned}$$

Supposons par l'absurde que T_0 appartient à $\Omega_{\varepsilon y_0}$. D'après les inégalités qui définissent $\Omega_{\varepsilon y_0}$, on obtient

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right) \mid y_0 \mid^{km} e^{-kmn|T_0|\cos\gamma} &\leqslant \varepsilon^{km}\Big[kmn\varepsilon^{kn} \mid y_0 \mid^{km} \mid T_0 \mid \mid \cos\gamma \mid \\ &\qquad\qquad - \cos(km\theta)\Big] \\ &\leqslant kmn\varepsilon^{kn+km} \mid y_0 \mid^{km} \mid T_0 \mid \mid \cos\gamma \mid \quad (7) \end{aligned}$$

(où nous avons utilisé que $\cos(km\theta) \geqslant 0$). De plus $\cos\gamma < 0$ car la partie réelle des nombres qui appartiennent à $\Omega_{\varepsilon y_0}$ est négative. Comme $k \geqslant 2$, il découle que $\cos(\pi/(k+1)) \geqslant 1/2$. L'inégalité (7) entraîne alors que

$$\frac{1}{2} \mid y_0 \mid^{km} e^{kmn|T_0||\cos\gamma|} \leqslant kmn\varepsilon^{kn+km} \mid y_0 \mid^{km} \mid T_0 \mid\mid \cos\gamma \mid .$$

Or, cette inégalité ne peut être valable pour aucune valeur de $\mid T_0 \mid\mid \cos\gamma \mid$ (si ε est petit). Ceci démontre l'affirmation et donc le lemme. □

Maintenant nous revenons à l'étude du champ $X_{n,m} = x^n y^m X^{isol}$. Observons d'abord que les champs $X_{n,m}$ et X^{isol} définissent le même feuilletage holomorphe $\mathcal{F}$, à singularité isolée, au voisinage de l'origine. Soit L une feuille régulière de $\mathcal{F}$ distincte des axes $\{x=0\}$ et $\{y=0\}$ (de sorte que $X_{n,m}$ ne s'annule pas sur L). Cette feuille admet donc un paramétrage naturel donné par une restriction convenable du flot semi-global de X^{isol}. Nous allons exploiter ce point de vue dans la preuve du théorème B

Démonstration du théorème B. — Soit L une feuille régulière de $\mathcal{F}$ (distincte des axes $\{x=0\}$ et $\{y=0\}$) et c un chemin ouvert contenu dans L. Appelons dT_L la 1-forme temps induite sur L par $X_{n,m}$. D'après la proposition (2.1), il suffit de montrer que l'intégrale de dT_L sur c n'est jamais nulle (si $k \geqslant 2$).

Soit (ε, y_0) un point de $\Sigma \cap L$ et, avec les notations utilisées le long du paragraphe, considérons l'application $\Phi((\varepsilon, y_0), .) : \Omega_{\varepsilon y_0} \to L \subseteq \mathbf{C}^2$ correspondant. L'application Φ est une application de revêtement holomorphe de $\Omega_{\varepsilon y_0}$ sur L. En effet, Φ est évidemment un difféomorphisme local et puis Φ est propre grâce à la condition 2. Comme la feuille L est simplement connexe (voir [M-R2]), on en déduit que Φ est en fait un difféomorphisme (on remarque cependant qu'on n'utilise pas cette dernière observation dans la preuve de ce théorème, mais seulement dans la remarque (5.7)). Soit alors $\Phi^* dT_L$ l'image réciproque de dT_L par $\Phi((\varepsilon, y_0), .)$ définie sur $\Omega_{\varepsilon y_0}$ et on désigne par $\Phi^{-1}(c)$ la pré-image de c par ce difféomorphisme. Évidemment l'intégrale de dT_L sur c est égale à celle de $\Phi^* dT_L$ sur $\Phi^{-1}(c)$.

Nous rappelons que $\Omega_{\varepsilon y_0} \subseteq \mathbf{C}$ est muni de la coordonnée T. Dans cette coordonnée $\Phi^* dT_L$ s'écrit explicitement $\Phi^* dT_L = (1 + kmn\varepsilon^{kn} y_0^{km} T)^{1/k}\, dT$.

Ainsi si T_0 et T_1 sont les extrémités de $\Phi^{-1}(c)$, on obtient

$$\int_{\Phi^{-1}(c)} \Phi^* dT_L = (1 + kmn\varepsilon^{kn} y_0^{km} T_1)^{1+1/k} - (1 + kmn\varepsilon^{kn} y_0^{km} T_0)^{1+1/k} . \quad (8)$$

Comme $k \geqslant 2$ et $T_0 \neq T_1$, le lemme (5.6) s'applique pour montrer que la dernière intégrale est toujours différente de *zéro*. Ceci termine la démonstration du théorème. □

Remarque 5.7. — Dans le cas $k = 1$, on a encore l'égalité (8). Cependant ici le lemme (5.5) montre qu'il existe un chemin ouvert $\Phi^{-1}(c)$ sur lequel cette intégrale s'annule. En utilisant maintenant que Φ est un difféomorphisme (et pas seulement une application de revêtement), on déduit que le champ en question n'est pas semi-complet.

6. Appendice : les Surfaces de Stein

Considérons une surface de Stein M munie d'un champ de vecteurs holomorphe complet X. D'après un théorème de Suzuki (cf. [Su]), si "l'orbite générique" du champ X n'est pas simplement connexe (voir [Su] pour l'énoncé précis), alors X admet une intégrale première méromorphe non constante. Notre but ici est d'étudier les possibles singularités d'un tel champ X. Bien qu'on s'intéresse aux champs dont l'orbite générique n'est pas simplement connexe, cette hypothèse est parfois superflue dans nos arguments. En effet, le lecteur constatera qu'on peut obtenir de notre discussion une classification (moins précise !) des singularités des champs holomorphes complets sur les surfaces de Stein en toute généralité.

Soit donc p une singularité isolée de X sur M et considérons la restriction de X à un voisinage $U \subseteq M$ de p.

LEMME 6.1. — *Le champ X possède deux valeurs propres non nulles en p.*

Démonstration. — On sait que le second jet de X en p n'est pas nul (cf. [Reb1]). D'abord on suppose par l'absurde que *les deux valeurs propres* de X en p sont nulles. Il résulte que X admet l'une des formes normales indiquées dans [Gh-Reb] (selon la partie linéaire de X en p est nulle ou nilpotente non triviale). Cependant tous ces champs de vecteurs ont des orbites compactes (quand on ajoute la singularité). Cela est bien sûr impossible sur une surface de Stein. Finalement supposons que seulement l'une des valeurs propres de X en p est nulle. C'est-à-dire que X définit un col-nœud au voisinage de p. Néanmoins une germe de col-nœud associé à un champ semi-complet possède una variété faible convergente. De plus la restriction du champ semi-complet correspondant à variété faible du col-nœud y définit un champ (d'une variable) avec une singularité dont la partie linéaire est nulle. Il découle que cette orbite ne peut être qu'une courbe rationnelle et donc compacte. Le lemme est démontré. □

Remarquons que l'hypothèse sur l'orbite générique de X n'a pas été utilisée dans la preuve du lemme (6.1).

Nous notons par α et β les valeurs propres de X en p ($\alpha\beta \neq 0$). Pour l'instant on exclut le cas résonnant (i.e. $\alpha \neq n\beta$ et $\beta \neq n\alpha$, pour $n \in \mathbf{N}$). Nous voulons prouver que le champ X est conjugué à sa partie linéaire.

LEMME 6.2. — *Dans un système adéquat de coordonnées on a* $X = f(x,y)(\alpha x\partial/\partial x - \beta y\partial/\partial y)$.

Démonstration. — Si $\alpha/\beta \notin \mathbf{R}_+$, alors le lemme découle du théorème de linéarisation de Poincaré. On suppose donc $\alpha/\beta \in \mathbf{R}_+$. La discussion se divise naturellement en deux cas selon $\alpha/\beta \in \mathbf{R}_+ \setminus \mathbf{Q}_+$ ou $\alpha/\beta \in \mathbf{Q}_+$. Considérons d'abord que $\alpha/\beta \in \mathbf{R}_+ \setminus \mathbf{Q}_+$. Le champ X possède une séparatrice lisse qui peut être supposée l'axe $\{y = 0\}$. Comme X a une intégrale première méromorphe non constante, le difféomorphisme d'holonomie locale de $\{y = 0\}$, noté h, admet une fonction méromorphe non triviale qui est constante sur ses orbites. Rappelons que h a la forme $h(z) = e^{2\pi i\alpha/\beta}z + \cdots$.

Nous affirmons qu'un tel difféomorphisme n'admet pas de fonction méromorphe constante sur ses orbites (excepté les fonctions constantes partout). En effet, un difféomorphisme local possédant une telle fonction méromorphe doit avoir leurs orbites locales finies (c'est-à-dire périodiques) de longueur uniformément bornée. Évidemment cela n'est pas possible pour un difféomorphisme local dont la partie linéaire en $0 \in \mathbf{C}$ est une rotation irrationnelle. Il en découle une contradiction qui montre que le cas $\alpha/\beta \in \mathbf{R}_+ \setminus \mathbf{Q}_+$ ne peut pas se produire.

Supposons finalement que $\alpha/\beta \in \mathbf{Q}_+$. Grâce au théorème de Mattei-Moussu ([Ma-Mo]), il suffit de vérifier que l'holonomie locale h de $\{y = 0\}$ est d'ordre fini. Pour cela on choisit le plus petit entier positif k tel que h^k est tangent à l'identité. Si h^k est *différent* de l'identité, alors sa dynamique locale possède des secteurs où les orbites convergent vers $0 \in \mathbf{C}$ (cf. [Ca]). On déduit qu'il n'admet des fonction méromorphes non triviales qui soient constantes sur ses orbites. Donc h^k coïncide avec l'identité et par conséquent l'holonomie de $\{y = 0\}$ est finie. La preuve du lemme est terminée. □

Dorénavant nous abandonnons l'hypothèse que p est une singularité isolée de X. Dans la suite on démontre le résultat principal de l'appendice.

THÉORÈME 6.3. — *Soit M une surface de Stein et X un champ de vecteurs holomorphe complet sur M. Supposons que l'orbite générique de X n'est pas simplement connexe. Si p est une singularité de X (non nécessairement isolée), alors X possède au voisinage de p l'une des formes normales ci-dessous :*

1. Si p est une singularité isolée :

• $X = f[mx\partial/\partial x + ny\partial/\partial y]$, *où m et n sont des entiers non nuls et $f(0,0) \neq 0$.*

• $X = f[(nx + y^n)\partial/\partial x - y\partial/\partial y]$, *où $n \in \mathbf{N}$ et $f(0,0) \neq 0$.*

2. Si p est une singularité non isolée

• $X = y^a F(x,y)\partial/\partial x$ *où $a \in \mathbf{N}$ et $F(x,y) = 1$ ou $F(x,y) = x$.*

• $X = fx^a y^b[mx\partial/\partial x - ny\partial/\partial y]$ *où $am - bn \in \{-1, 0, 1\}$ et $f(0,0) \neq 0$.*

Démonstration. — Supposons d'abord que p est une singularité isolée. D'après le lemme (6.1), X possède deux valeurs propres non nulles, α et β, en p. Dans le cas où α et β sont résonnants, alors ou bien X est linéarisable ou bien X s'écrit comme dans la forme normale de Poincaré-Dulac. On peut donc supposer que les valeurs propres sont non résonnantes. Le lemme (6.2) entraîne alors que X est linéarisable, i.e. dans un certain système de coordonnées $X = \alpha x\partial/\partial x + \beta y\partial/\partial y$. Finalement, comme X a une intégrale première méromorphe non constante, on conclut que $\alpha/\beta \in \mathbf{Q}$. Cela achève l'analyse des singularités isolées.

Maintenant nous supposons que p est une singularité non isolée. Nous reprenons la classification des singularités semi-complètes non isolées (théorème A de [Reb2]). Les cas 5,6,7,8,9 et 10 de cette classification ne peuvent avoir lieu puisque les champs correspondants ont des orbites compactes. De manière analogue le cas **1c** ne se produit pas car ses orbites sont des $\mathbf{C}P(1)$.

Il ne reste que le cas 2,3 et 4. Dans 2, le champ sera nécessairement linéarisable. En effet, ceci se démontre précisément de la même façon que le lemme (6.2). Le cas 4 étant sur la liste de notre énoncé, il reste à exclure le cas 3. On y parviendra en observant que sur l'axe $\{y = 0\}$ le champ en question s'écrit $x^2\partial/\partial x$ ce qui oblige la feuille donnée localement par $\{y = 0\}$ à se compactifier en $\mathbf{C}P(1)$. Le théorème est démontré. □

Bibliographie

[Arn] ARNOLD (V.). — *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Mir-Moscou (1980).

[Ca] CAMACHO (C.). — On the local structure of conformal mappings and holomorphic vector fields, *Astérisque*, **59-60**, (1978), p. 83-94.

[DOT] DLOUSSKY (G.), OELJEKLAUS (K.) & TOMA (M.). — Surfaces de la classe VII_0 admettant un champ de vecteurs, *Comment. Math. Helv.*, **75** 2 (2000), p. 255-270.

[Dul] DULAC (H.). — Recherches sur les points singuliers des équations différentielles, *J. École Polytechnique*, **9** (1904), p. 1-125.

[Gh-Reb] GHYS (E.) & REBELO (J.C.). — Singularités des flots holomorphes II, *Ann. Inst. Fourier*, **47**, 4 (1997), p. 1117-1174.

[HKM] HUKUARA (H.), KIMURA (T.) & MATUDA (T.). — Équations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe, *Publ. Math. Soc. of Japan* (1961).

[M-R1] MARTINET (J.) & RAMIS (J.P.). — Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **55** (1982), p. 63-164.

[M-R2] MARTINET (J.) & RAMIS (J.P.). — Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre, *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.*, **16** (1983), p. 469-523.

[Mat] MATTEI (J.-F.). — Manuscrit (1996).

[Ma-Mo] MATTEI (J.-F.) & MOUSSU (R.). — Holonomie et intégrales premières, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, **16** (1983), p. 469-523.

[Reb1] REBELO (J.-C.). — Singularités des flots holomorphes, *Ann. Inst. Fourier*, **46** 2 (1996), p. 411-428.

[Reb2] REBELO (J.-C.). — Champs complets avec singularités non isolées sur les surfaces complexes, *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, **5** 3 (1999), p. 359-395.

[Su] SUZUKI (M.). — Sur les intégrales premières de certains feuilletages analytiques complexes, *Séminaire Norguet, Springer Lect. Notes*, **670** (1977), p. 53-79.