ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

KAIS AMMARI

Stabilisation d'un modèle d'interaction fluide-structure

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 10, nº 2 (2001), p. 225-254

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_2001_6_10_2_225_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. X, n° 2, 2001
pp. 225–254

Stabilisation d'un modèle d'interaction fluide-structure (*)

KAIS AMMARI (1)

RÉSUMÉ. — On considère un problème de stabilisation ponctuelle pour un modèle qui décrit l'interaction entre un fluide et une poutre. On montre que l'application input-output est une application bien posée au sens de Weiss [21]. Dans cette situation la condition de contrôle géométrique de Bardos, Lebeau et Rauch [8] n'est pas satisfaite. On montre qu'on a stabilité exponentielle pour les basses fréquences et non pour les hautes fréquences. On donne donc une estimation de décroissance à hautes fréquences de l'énergie valable pour des données plus régulières tout en précisant le comportement de la constante qui intervient dans cette estimation en fonction de la fréquence de coupure n. De plus, pour les basses fréquences on détermine l'estimation sur l'analyticité nécessaire pour qu'une donnée régulière soit stabilisable. On obtient ce résultat comme conséquence d'un résultat de régularité combiné avec une inégalité d'observabilité pour un problème conservatif.

ABSTRACT. — We consider a pointwise stabilization problem for a model describing interaction between fluid and Bernoulli-Euler beam. We show that the regular input-output map is a well-posed map. In this situation the geometric control condition of Bardos, Lebeau and Rauch [8] is not satisified. We prove that we have exponential stability for the low frequencies but not for the high frequencies. Thus, we give explicit polynomial decay estimation at high frequencies that is valid for regular initial data while clarifying the behavior of the constant which intervenes in this estimation there function of the frequency of cut n. In addition, at low frequencies, we determine the estimation on the necessary condition for that a regular data can be stabilizable. We obtain this result from an observability inequality for the associated undamped problem, via a sharp-regularity result.

(*) Reçu le 2 mars 2001, accepté le 14 juin 2001

(1) Institut Élie Cartan, Département de Mathématiques, Université de Nancy I, F-54506 Vandoeuvre lès Nancy cedex; e-mail: ammari@iecn.u-nancy.fr

1. Introduction

Soit $\Omega = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$. Le bord $\partial\Omega$ de Ω est divisé en deux parties $\Gamma_0 = \Big\{(0,y),\, y \in (0,1)\Big\}$ et $\Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma_0$. On considère l'équation des ondes couplée à une poutre avec dissipation ponctuelle, les équations s'écrivent :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x,y,t) - \Delta\varphi(x,y,t) = 0,\ (x,y,t) \in \Omega \times (0,+\infty), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(x,y,t) = 0,\ (x,y,t) \in \Gamma_1 \times (0,+\infty), \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,y,t) = -\frac{\partial w}{\partial t}(y,t),\ (0,y,t) \in \Gamma_0 \times (0,+\infty), \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(y,t) + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}(y,t) + \frac{\partial w}{\partial t}(\xi,t)\delta_\xi + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0,y,t) = 0,\ (y,t) \in (0,1)\times(0,+\infty), \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(0,t) = \frac{\partial w}{\partial y}(1,t) = 0,\ t \in (0,+\infty), \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}(0,t) = \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}(1,t) = 0,\ t \in (0,+\infty), \tag{1.6}$$

$$\varphi(x,y,0) = \varphi^0(x,y),\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,y,0) = \varphi^1(x,y),\ (x,y) \in \Omega, \tag{1.7}$$

$$w(y,0) = w^0(y),\ \frac{\partial w}{\partial t}(y,0) = w^1(y),\ y \in (0,1) \tag{1.8}$$

où ν désigne le vecteur normal unitaire extérieur à Ω et par $\frac{\partial .}{\partial \nu}$ l'opérateur de dérivation dans cette direction, δ_ξ est la masse de Dirac concentrée en un point $\xi \in (0,1)$.

Il s'agit d'un modèle de comportement en dimension 2 d'un fluide compressible non visqueux, enfermé dans Ω. La partie Γ_1 du bord est supposée rigide et le fluide vérifie une condition de type Neumann. La partie Γ_0 du bord est supposée flexible et elle est occupée par une poutre élastique de Bernoulli-Euler où les vibrations sont provoquées par la pression du fluide qui occupe Ω. On suppose que la longueur de la poutre est égale à 1 et que la poutre satisfait aux deux extrémités des conditions de type Neumann. Ce modèle, dérivé des travaux de Banks et al [7], a été étudié dans [1]. On s'y référera pour les explications physiques et pour la plupart des résultats spectraux (voir aussi [17], [7], [6]).

La stabilisation ponctuelle des systèmes de couplage de type poutre de Bernoulli-Euler / ondes a été largement étudié dans la littérature récente (voir [17], [6], [5]). Les auteurs donnent plusieurs exemples où ils montrent quand on peut avoir stablité uniforme ou stabilité non uniforme dans l'espace d'énergie. Dans le cas de stabilité forte mais pas exponentielle, à ma connaissance aucune estimation n'a été donnée dans la littérature.

Dans cet article on montre que l'application input-output est une application bien posée au sens de Weiss [21], i.e., le système (A, B, B^*), où A, B, B^* sont définis dans la section 2, est un système bien posé au sens de Weiss. On donne une preuve simple du fait que les solutions de (1.1)-(1.8) sont non-exponentielement stables à hautes fréquences et exponentiellement stable à basses fréquences. Le but de ce travail est d'une part, donner une estimation de décroissance à hautes fréquences pour des données plus régulières et à déterminer explicitement la constante qui intervient dans cette estimation de décroissance en fonction de la fréquence de coupure n et d'autre part, déterminer à basses fréquences l'estimation sur l'analyticité nécessaire pour qu'une donnée régulière soit stabilisable.

Notre approche (voir [2] et [3]), est basée sur un résultat de régularité combiné avec une inégalité d'observabilité valable pour les solutions d'un problème conservatif approprié. L'estimation de type observabilité est obtenue en appliquant l'inégalité d'Ingham pour les hautes fréquences. Pour les basses fréquences, on adapte une forme forte de l'inégalité d'Ingham dûe à Allibert et Micu [1].

Le plan de cet article est comme ainsi. La Section 2 contient l'énoncé du résultat principal. Dans la Section 3 et la Section 4, on donne, respectivement, quelques résultats de régularité et d'observabilité. La preuve du résultat principal est donnée dans la Section 5. □

2. Résultat principal

Le système (1.1)-(1.8) est bien posé dans l'espace d'énergie

$$X = H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^2_N(0,1) \times L^2(0,1),$$

où

$$H^2_N(0,1) = \Big\{ u \in H^2(0,1),\ \frac{du}{dx}(0) = \frac{du}{dx}(1) = 0 \Big\}.$$

L'énergie $E(t)$ du système (1.1)-(1.8) est donnée par l'expression suivante

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(|\nabla\varphi|^2 + \Big|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|^2 \Big) dxdy + \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(\Big|\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial w}{\partial t}\Big|^2 \Big) dy. \quad (2.1)$$

Les solutions de (1.1)-(1.8) vérifient l'estimation d'énergie suivante

$$E(0) - E(t) = \int_0^t \left| \frac{\partial w}{\partial s}(\xi, s) \right|^2 ds, \, \forall t \geqslant 0. \tag{2.2}$$

Soit

$$\mathcal{D}(A) = \Big\{ (u_1, u_2, u_3, u_4) \in H^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times [H^4(0,\xi) \cap H^4(\xi,1) \cap H^3(0,1) \cap H^2_N(0,1)]$$

$$\times H^2_N(0,1), \, \frac{\partial u_1}{\partial \nu}_{|\Gamma_1} = 0, \, \frac{\partial u_1}{\partial \nu}_{|\Gamma_0} = u_4, \, \frac{d^3 u_3}{dy^3}(0) = \frac{d^3 u_3}{dy^3}(1) = 0,$$

$$\frac{d^3 u_3}{dy^3}(\xi^+) - \frac{d^3 u_3}{dy^3}(\xi^-) = -u_4(\xi) \Big\},$$

$$A : \mathcal{D}(A) \to X,$$

défini par

$$A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ \Delta u_1 \\ u_4 \\ -\dfrac{d^4 u_3}{dy^4} - u_{2|\Gamma_0} \end{pmatrix}, \, \forall \, (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathcal{D}(A).$$

L'injection $\mathcal{D}(A) \hookrightarrow X$ est compacte, le demi plan $Re\lambda > 0$ est contenu dans l'ensemble résolvant de A, et le spectre de A est discret. Le spectre contient toujours 0, $(\phi, w) = constante$ étant solution de (1.1)-(1.8).

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on note par $\mathcal{Y}_n$ l'espace suivant

$$\mathcal{Y}_n = \Big\{ \sum_{k \in \mathbf{Z}^* \cup \{*, **\}} a_{n,k} \, \Phi_{n,k} \in \mathcal{Z}_n, \, (a_{n,k})_k \in l^2, \, a_{n,k} = 0, \, \forall \, |k| \leqslant n \, ou \, k \in \{*, **\} \Big\}$$

et par $\mathcal{X}_n$ l'espace suivant

$$\mathcal{X}_n = \Big\{ \sum_{k \in \mathbf{Z}^* \cup \{*, **\}} a_{n,k} \, \Phi_{n,k} \in \mathcal{Z}_n, \, (a_{n,k})_k \in l^2, \, a_{n,k} = 0, \, \forall \, |k| > n \Big\},$$

où $\mathcal{Z}_n = [H^1(0,1) \times L^2(0,1) \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}] \cos(\mathrm{n}\pi\mathrm{y})$,

$$\Theta_{n,k} = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_{n,k}} ch \left[(x-1)\sqrt{n^2\pi^2 + \lambda_{n,k}^2} \right] \cos(n\pi y) \\ -ch \left[(x-1)\sqrt{n^2\pi^2 + \lambda_{n,k}^2} \right] \cos(n\pi y) \\ -\frac{\sqrt{n^2\pi^2 + \lambda_{n,k}^2}}{\lambda_{n,k}^2} sh(\sqrt{n^2\pi^2 + \lambda_{n,k}^2}) \cos(n\pi y) \\ \frac{\sqrt{n^2\pi^2 + \lambda_{n,k}^2}}{\lambda_{n,k}} sh(\sqrt{n^2\pi^2 + \lambda_{n,k}^2}) \cos(n\pi y) \end{pmatrix} \right\|_X,$$

$$\Phi_{n,k} = \begin{pmatrix} \Phi^1_{n,k} \\ \Phi^2_{n,k} \\ \Phi^3_{n,k} \\ \Phi^4_{n,k} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Theta_{n,k}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_{n,k}} ch\left[(x-1)\sqrt{n^2\pi^2+\lambda^2_{n,k}}\right]\cos(n\pi y) \\ -ch\left[(x-1)\sqrt{n^2\pi^2+\lambda^2_{n,k}}\right]\cos(n\pi y) \\ -\frac{\sqrt{n^2\pi^2+\lambda^2_{n,k}}}{\lambda^2_{n,k}} sh(\sqrt{n^2\pi^2+\lambda^2_{n,k}})\cos(n\pi y) \\ \frac{\sqrt{n^2\pi^2+\lambda^2_{n,k}}}{\lambda_{n,k}} sh(\sqrt{n^2\pi^2+\lambda^2_{n,k}})\cos(n\pi y) \end{pmatrix}, \forall n \in$$

$\mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}^* \cup \{*, **\}$, $(n,k) \neq (0,*), (0,**)$, $\Phi_{0,*} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\Phi_{0,**} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

désignent la suite des fonctions propres et $\lambda_{n,k}$ est la suite des valeurs propres de l'opérateur anti-adjoint associé au problème (3.11)-(3.18). La suite $\lambda_{n,k}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}^* \cup \{*, **\}$, est une suite purement imaginaire donnée par

$$\lambda_{n,k} = i\sqrt{z^2_{n,k} + n^2\pi^2}$$

si $k > 0$ et $\lambda_{n,k} = -\lambda_{n,-k}$ si $k < 0$, où $(z_{n,k})_{n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{N}^*}$ sont solutions de l'équation suivante

$$cotgz = \frac{z^3 + z(n^2\pi^2 - n^4\pi^4)}{z^2 + n^2\pi^2}. \tag{2.3}$$

De plus, il y a deux autres valeurs propres de A, $\lambda_{n,*}, \lambda_{n,**}$, de modules inférieures à $n\pi$, qui sont données par

$$\lambda_{n,*} = i\sqrt{n^2\pi^2 - z^2_{n,*}},\ \lambda_{n,**} = \bar{\lambda}_{n,*},$$

où $z_{n,*}, n \in \mathbb{N}^*$, est l'unique solution positive de l'équation

$$e^{-2z} = \frac{z^3 - z^2 + n^2\pi^2 + z(n^4\pi^4 - n^2\pi^2)}{z^3 + z^2 - n^2\pi^2 + z(n^4\pi^4 - n^2\pi^2)},$$

et

$$\lambda_{n,*} = \lambda_{n,**} = 0, \text{ quand } n = 0.$$

Notons qu'il existe $c_1, c_2 > 0$ deux constantes positives telles que

$$c_1 \leqslant \Theta_{n,k} \leqslant c_2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}^*,$$

et

$$\frac{c_1}{n^3} \leqslant \Theta_{n,*} = \Theta_{n,**} \leqslant c_2\, e^{n^{\frac{2}{3}}},\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{2.4}$$

Pour plus de détails, voir [1].

Remarque 2.1.— *Pour tout* $(\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1) \in X$, *il existe* $(a_{n,k})_{n,k} \in l^2$ *tel que*

$$\begin{pmatrix} \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ w^0 \\ w^1 \end{pmatrix} = \sum_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbf{Z}^* \cup \{*, **\}} a_{n,k} \, \Phi_{n,k}.$$

D'où il vient,

$$X = \overline{\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{Z}_n} = \overline{\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{X}_n + \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{Y}_n}.$$

Les résultats principaux sont donc donnés par le théorème suivant

Théorème 2.1.— 1. *On a* $\lim\limits_{t \to \infty} E(t) = 0$, *pour toutes données initiales* $(\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1) \in X$, *si et seulement si*

$$\xi \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{A}_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{ \frac{2p-1}{2n}, \, p = 1, ..., n \right\}.$$

2. *Pour tout* $\xi \in (0,1)$, *le système décrit par* (1.1)-(1.8) *est non-exponentiellemt stable dans* $\mathcal{X}_n$. *Par contre, pour tout* $\xi \in [Q \setminus \mathcal{A}_n] \cap (0,1)$ *(*Q *est le corps des rationnels), il est exponentiellemt stable dans* $\mathcal{Y}_n$.

3. *Pour tout* $\xi \in [Q \setminus \mathcal{A}_n] \cap (0,1)$ *et pour tout* $t \geqslant 0$ *on a :* $\exists \, C_{\xi,n,\varepsilon} > 0$ *telle que*

$$E(t) \leqslant \frac{C_{\xi,n,\varepsilon}}{1+t} \, ||(\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1)||^2_{\mathcal{D}(A)},$$
$$\forall \, (\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1) \in \mathcal{D}(A) \cap [\mathcal{X}_n \cup \mathcal{Y}_n], \tag{2.5}$$

où

$$C_{\xi,n} = \begin{cases} C_\xi \, n^8, \, \forall \, n \in \mathbb{N}^*, \\ C_\xi, \; n = 0, \end{cases} \quad \forall \, (\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1) \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{X}_n,$$

où $C_\xi > 0$ *est une constante qui dépend uniquement de* ξ.

4. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *soit*

$$Y = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbf{Z}^* \cup \{*, **\}} a_{n,k} \, e^{-\varepsilon n} \, \Phi_{n,k}, \; (\lambda_{n,k} \, a_{n,k})_{n,k} \in l^2 \right\}.$$

Alors, pour tout $\xi \in [Q \setminus \mathcal{A}_n] \cap (0,1)$ *et pour tout* $t \geqslant 0$ *on a :* $\exists \, C_{\xi,n,\varepsilon} > 0$ *telle que*

$$E(t) \leqslant \frac{C_\xi}{1+t} \, ||(\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1)||^2_{\mathcal{D}(A)}, \; \forall \, (\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1) \in Y,$$

où $C_\xi > 0$ est une constante qui ne dépend que de ξ.
Ceci implique qu'on peut stabiliser toute donnée initiale qui est dans $\mathcal{D}(A)$ et qui est analytique par rapport à la variable y. $\square$

3. Régularité

On considère le problème aux limites suivant

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}(x,y,t) - \Delta\phi(x,y,t) = 0,\ (x,y,t) \in \Omega \times (0,+\infty), \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(x,y,t) = 0,\ (x,y,t) \in \Gamma_1 \times (0,+\infty), \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(0,y,t) = -\frac{\partial\psi}{\partial t}(y,t),\ (0,y,t) \in \Gamma_0 \times (0,+\infty), \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}(y,t) + \frac{\partial^4\psi}{\partial y^4}(y,t) + \frac{\partial\phi}{\partial t}(0,y,t) = g(t)\,\delta_\xi,\ (y,t) \in (0,1)\times(0,+\infty), \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}(0,t) = \frac{\partial\psi}{\partial y}(1,t) = 0,\ t \in (0,+\infty), \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}(0,t) = \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}(1,t) = 0,\ t \in (0,+\infty), \tag{3.6}$$

$$\phi(x,y,0) = \frac{\partial\phi}{\partial t}(x,y,0) = 0,\ (x,y) \in \Omega, \tag{3.7}$$

$$\psi(y,0) = \frac{\partial\psi}{\partial t}(y,0) = 0,\ y \in (0,1). \tag{3.8}$$

On a la proposition suivante

PROPOSITION 3.1.— *Soit $g \in L^2(0,T)$. Alors (3.1)-(3.8) admet une solution unique*

$$(\phi, \frac{\partial\phi}{\partial t}, \psi, \frac{\partial\psi}{\partial t}) \in C(0,T;X). \tag{3.9}$$

De plus $\frac{\partial\psi}{\partial t}(\xi,t) \in L^2(0,T)$ et il existe une constante C strictement positive telle que

$$\left|\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}(\xi,.)\right|\right|^2_{L^2(0,T)} \leqslant C\ ||g||^2_{L^2(0,T)},\ \forall g \in L^2(0,T). \tag{3.10}$$

Soit B l'opérateur défini par (3.20), alors (3.10) implique en particulier que le système (A, B, B^*) est un système bien posé dans le sens donné dans [5], i.e., l'application input-output définie par

$$\left(g \in L^2(0,T) \to \frac{\partial \psi}{\partial t}(\xi,.)\right) \in \mathcal{L}(L^2(0,T)).$$

REMARQUE 3.1.— *Soit* $C_\beta = \left\{\lambda \in C, \operatorname{Re}\lambda = \beta\right\}$, *où* β *est un réel strictement positif fixé, et soit* N *l'application de Neumann* $N : L^2(\partial\Omega) \to L^2(\Omega)$ *définie par*

$$Nf = h \ si \ \begin{cases} \Delta h = 0, \Omega, \\ \dfrac{\partial h}{\partial \nu} = f 1_{\Gamma_0}, \partial\Omega. \end{cases}$$

Par la théorie elliptique [12], *on a pour tout réel* $s > -\frac{1}{2}$,

$$N \in \mathcal{L}\left(H^s(\partial\Omega), H^{s+\frac{3}{2}}(\Omega)\right).$$

L'inégalité (3.10) *est équivalente à*

$$\mathcal{H}(\lambda) = \left(I + \lambda\,(\lambda^2 - \frac{d^4}{dy^4})^{-1} N^* \Delta_N (\lambda^2 - \Delta_N)^{-1} \Delta_N N\right)^{-1} (\lambda^2 + \frac{d^4}{dy^4})^{-1} \delta_\xi, \ \forall \, Re\lambda > 0$$

est bornée sur C_β *(voir* [2], [3] *pour plus de détails).*
Ici, $\left(\frac{d^4}{dy^4}, \mathcal{D}(\frac{d^4}{dy^4}) = \left\{h \in H^4(0,1), \frac{dh}{\partial y}(0) = \frac{dh}{dy}(1) = \frac{d^3h}{dy^3}(0) = \frac{d^3h}{dy^3}(1) = 0\right\}\right)$ *et* $\left(\Delta_N = \Delta, \mathcal{D}(\Delta_N) = \left\{h \in H^2(\Omega), \frac{\partial h}{\partial \nu}_{|\partial\Omega} = 0\right\}\right)$. □

Pour prouver la Proposition 3.1 on a besoin d'étudier le problème conservatif (sans dissipation) associé au problème (1.1)-(1.8).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,y,t) - \Delta u(x,y,t) = 0, \ (x,y,t) \in \Omega \times (0,+\infty), \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,y,t) = 0, \ (x,y,t) \in \Gamma_1 \times (0,+\infty), \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y,t) = -\frac{\partial v}{\partial t}(y,t), \ (0,y,t) \in \Gamma_0 \times (0,+\infty), \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(y,t) + \frac{\partial^4 v}{\partial y^4}(y,t) + \frac{\partial u}{\partial t}(0,y,t) = 0, \ (y,t) \in (0,1) \times (0,+\infty), \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(0,t) = \frac{\partial v}{\partial y}(1,t) = 0, \ t \in (0,+\infty), \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(0,t) = \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(1,t) = 0,\ t \in (0,+\infty), \tag{3.16}$$

$$u(x,y,0) = \varphi^0(x,y),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \varphi^1(x,y),\ (x,y) \in \Omega, \tag{3.17}$$

$$v(y,0) = w^0(y),\ \frac{\partial v}{\partial t}(y,0) = w^1(y),\ y \in (0,1). \tag{3.18}$$

Le résultat suivant montre d'une part que le problème (3.11)-(3.18) est bien posé dans l'espace d'énergie et d'autre part donne une estimation de la trace de v au point ξ.

LEMME 3.1.— *Pour tout $(\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1) \in X$ le système (3.11)-(3.18) admet une unique solution $(u, \frac{\partial u}{\partial t}, v, \frac{\partial v}{\partial t}) \in C(0,T;X)$. De plus $\frac{\partial v}{\partial t}(\xi,t) \in L^2(0,T)$ et il existe une constante C strictement positive telle que*

$$\left|\left|\frac{\partial v}{\partial t}(\xi,.)\right|\right|^2_{L^2(0,T)} \leqslant C\ ||(\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1)||^2_X,\ \forall (\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1) \in X. \tag{3.19}$$

Pour la preuve de (3.19) il suffit de voir [17, Théorème 9.10.1.2] □

Pour prouver l'inégalité (3.10) on a besoin du lemme suivant

LEMME 3.2.— *Soit $C_\beta = \left\{\lambda \in C,\ \mathrm{Re}\lambda = \beta\right\}$ où $\beta > 0$ est un réel fixé, qui satisfait $\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}} \leqslant \beta < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Alors, il existe une constante $M > 0$ qui ne dépend que de β tel que*

$$\sum_m \left|\sum_n \frac{\lambda}{\lambda^2 + (n^2+m^2)\pi^2}\right|^2 \leqslant M,\ \forall \lambda \in C_\beta.$$

Preuve.— D'après le Théorème des résidus, on déduit que pour tout $\lambda \in C_\beta$

$$\sum_n \frac{\lambda}{\lambda^2 + (n^2+m^2)\pi^2} = \sum_n \frac{\lambda}{(\lambda^2 + m^2\pi^2) + n^2\pi^2} =$$

$$\frac{\lambda}{2(\lambda^2 + m^2\pi^2)}\left[\frac{\sqrt{\lambda^2 + m^2\pi^2}}{th[\sqrt{\lambda^2 + m^2\pi^2}]} + 1\right].$$

Ceci implique que

$$\sum_m \left|\sum_n \frac{\lambda}{\lambda^2 + (n^2+m^2)\pi^2}\right|^2 = \sum_m \frac{|\lambda|^2}{4\,|\lambda^2 + m^2\pi^2|^2}\left|\frac{\sqrt{\lambda^2 + m^2\pi^2}}{th[\sqrt{\lambda^2 + m^2\pi^2}]} + 1\right|^2,\ \forall \lambda \in C_\beta.$$

Comme la fonction $\lambda \to \sup_{m\in \mathbf{Z}} \left| \frac{1}{th[\sqrt{\lambda^2+m^2\pi^2}]} \right|$ est bornée sur C_β. Alors, il existe une constante $M_1 > 0$ telle qu'on a

$$\sum_m \left| \sum_n \frac{\lambda}{\lambda^2+(n^2+m^2)\pi^2} \right|^2 \leqslant$$

$$M_1 \Big(\sum_{\beta^2-(Im\lambda)^2+m^2\pi^2<0} \frac{\beta^2+(Im\lambda)^2}{-\beta^2+(Im\lambda)^2-m^2\pi^2+2\beta|Im\lambda|} +$$

$$\sum_{\beta^2-(Im\lambda)^2+m^2\pi^2\geqslant 0} \frac{\beta^2+(Im\lambda)^2}{\beta^2-(Im\lambda)^2+m^2\pi^2+2\beta|Im\lambda|} \Big) = M_1(S_1+S_2),$$

$$\forall\, \lambda \in C_\beta,\ |Im\lambda| \geqslant \sup(\frac{1}{2\beta}, \frac{\beta}{\sqrt{2}-1}).$$

Le deuxième membre de l'inégalité précédente est inférieur ou égal à

$$2\int_{\frac{1}{\pi}\sqrt{(Im\lambda)^2-\beta^2}}^{+\infty} \frac{\beta^2+(Im\lambda)^2}{\beta^2-(Im\lambda)^2+y^2\pi^2+2\beta|Im\lambda|}\,dy +$$

$$2\int_0^{\frac{1}{\pi}\sqrt{(Im\lambda)^2-\beta^2}} \frac{\beta^2+(Im\lambda)^2}{-\beta^2+(Im\lambda)^2-y^2\pi^2+2\beta|Im\lambda|}\,dy = S_1+S_2.$$

Ces intégrales sont égales à

$$\frac{\beta^2+(Im\lambda)^2}{2\pi\sqrt{(Im\lambda)^2-\beta^2\mp 2\beta|Im\lambda|}} \ln \left(\left| \frac{\sqrt{(Im\lambda)^2-\beta^2}+\sqrt{(Im\lambda)^2-\beta^2\mp 2\beta|Im\lambda|}}{\sqrt{(Im\lambda)^2-\beta^2}-\sqrt{(Im\lambda)^2-\beta^2\mp 2\beta|Im\lambda|}} \right| \right)$$

Donc, il existe une constante $M_2 > 0$ indépendante de $Im\lambda$ telle que

$$S_1, S_2 \leqslant \frac{\beta\, M_2}{1-4\beta^4}.$$

Dans le cas où $|Im\lambda| < \sup(\frac{1}{2\beta}, \frac{\beta}{\sqrt{2}-1})$ on a $\beta \geqslant \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}$, alors

$$\sup(\frac{1}{2\beta}, \frac{\beta}{\sqrt{2}-1}) = \frac{\beta}{\sqrt{2}-1} \leqslant \beta.$$

Donc, il vient

$$\sum_m \left| \sum_n \frac{\lambda}{\lambda^2 + (n^2+m^2)\pi^2} \right|^2 \leqslant \frac{1}{|\lambda|^2} + \sum_m \left| \sum_n \frac{\sqrt{2}\,\beta}{(n^2+m^2)\pi^2} \right|^2 = \frac{1}{|\lambda|^2} +$$

$$2 \left| \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{2}\beta}{n^2\pi^2} \right|^2 + 2 \sum_{m\geqslant 1} \frac{\beta^4}{2\,m^4\pi^4} \left| \frac{m\pi}{th(m\pi)} + 1 \right|^2 \leqslant M_3,$$

où M_3 est une constante qui ne dépend que de β. □

Maintenant on peut donner la preuve de la Proposition 3.1.

Preuve de la Proposition 3.1. — On utilise la méthode de transposition (voir [18]). Soit $\mathcal{D}(A_c)$ l'espace défini par

$$\mathcal{D}(A_c) = \Big\{ (u_1, u_2, u_3, u_4) \in H^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times [H^4(0,1) \cap H^2_N(0,1)] \times H^2_N(0,1),$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \nu}_{|\Gamma_1} = 0,\ \frac{\partial u_1}{\partial \nu}_{|\Gamma_0} = u_4,\ \frac{d^3 u_3}{dy^3}(0) = \frac{d^3 u_3}{dy^3}(1) = 0 \Big\},$$

et soit l'opérateur

$$A_c : \mathcal{D}(A_c) \to X,$$

défini par

$$A_c \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ \Delta u_1 \\ u_4 \\ -\dfrac{d^4 u_3}{dy^4} - u_{2|\Gamma_0} \end{pmatrix}, \ \forall\, (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathcal{D}(A_c).$$

Notons par $\mathcal{D}[(A_c)]'$ l'espace dual de $\mathcal{D}(A_c)$, la dualité est prise par rapport à l'espace pivot X. Il est bien connu que A_c peut s'étendre à un opérateur anti-adjoint (que l'on note toujours A_c),

$$A_c : X \to [\mathcal{D}(A_c)]',$$

tel que A_c engendre un groupe d'isométries $S(t)$ de $[\mathcal{D}(A_c)]'$.

De plus on défini l'opérateur

$$B : \mathbb{R} \to [\mathcal{D}(A_c)]',\ Bk = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k\delta_\xi \end{pmatrix},\ \forall k \in \mathbb{R}. \tag{3.20}$$

En considérant ces notations le problème (3.1)-(3.8) se reécrit comme un problème de Cauchy dans $[\mathcal{D}(A_c)]'$ sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\phi\\ \frac{\partial\phi}{\partial t}\\ \psi\\ \frac{\partial\psi}{\partial t}\end{pmatrix}(t) = A_c\begin{pmatrix}\phi\\ \frac{\partial\phi}{\partial t}\\ \psi\\ \frac{\partial\psi}{\partial t}\end{pmatrix}(t) + Bg(t),\ t > 0, \tag{3.21}$$

$$\phi(0) = \psi(0) = \frac{\partial\phi}{\partial t}(0) = \frac{\partial\psi}{\partial t}(0) = 0. \tag{3.22}$$

Après un calcul simple on peut voir que l'opérateur $B^* : \mathcal{D}(A_c) \to \mathrm{I\!R}$ est donné par

$$B^*\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ v_1\\ v_2\end{pmatrix} = v_2(\xi), \qquad \forall\,(u_1,u_2,v_1,v_2) \in \mathcal{D}(A_c).$$

Ceci implique

$$B^*S^*(t)\begin{pmatrix}\varphi^0\\ \varphi^1\\ w^0\\ w^1\end{pmatrix} = \frac{\partial v}{\partial t}(\xi,t), \qquad \forall\,(\varphi^0,\varphi^1,w^0,w^1) \in \mathcal{D}(A_c), \tag{3.23}$$

avec (u,v) satisfaisant (3.11)-(3.18). De (3.19) et (3.23) on déduit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\int_0^T \left| B^*S^*(t)\begin{pmatrix}\varphi^0\\ \varphi^1\\ w^0\\ w^1\end{pmatrix}\right|^2 dt \leqslant C\left\|(\varphi^0,\varphi^1,w^0,w^1)\right\|_X^2, \qquad \forall\,(\varphi^0,\varphi^1,w^0,w^1) \in \mathcal{D}(A_c). \tag{3.24}$$

D'après le Théorème 3.1 dans [9, p.173], l'inégalité (3.24) implique que (3.1)-(3.8) admet une unique solution

$$(\phi, \frac{\partial\phi}{\partial t}, \psi, \frac{\partial\psi}{\partial t}) \in C(0,T;X).$$

Il reste donc à prouver la propriété de régularité de la trace (3.10).

Comme le système (3.1)-(3.8) est réversible en temps, après une extension de g par zéro pour $t \in \mathrm{I\!R} \setminus [0,T]$, on peut résoudre (3.1)-(3.8), pour $t \in \mathrm{I\!R}$.

De cette manière on obtient une fonction, que l'on note encore (ϕ, ψ), telle que

$$\begin{array}{ll} (\phi, \frac{\partial \phi}{\partial t}, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial t}) \in C_B(\mathbb{R}; X), & \\ \phi(x,y,t) = \psi(y,t) = 0, & \forall\, t \leqslant 0, \end{array} \tag{3.25}$$

et (ϕ, ψ) satisfait (3.1)-(3.8) pour tout $(x,y,t) \in [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R}$ (on désigne par $C_B(\mathbb{R}; X)$ l'espace des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans X).

Soit $\widehat{\phi}(x,y,\lambda), \widehat{\psi}(y,\lambda)$ où $\lambda = \gamma + i\eta$, $\gamma > 0$ et $\eta \in \mathbb{R}$, la transformation de Laplace (en temps) de ϕ, respectivement de ψ. Comme (ϕ, ψ) satisfait (3.25), l'estimation (3.10) est équivalente au fait que la fonction $t \to e^{-\gamma t}\psi(\xi, t) \in H^1(\mathbb{R})$ et qu'il existe une constante $M_1 > 0$ telle que

$$\|e^{-\gamma \cdot}\psi(\xi, \cdot)\|^2_{H^1(\mathbb{R})} \leqslant M_1 \|g\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Par l'identité de Parseval (voir [11, p.212]), pour montrer (3.10) il suffit de prouver que la fonction

$$\eta \to (\gamma + i\eta)\widehat{\psi}(\xi, \gamma + i\eta)$$

appartient à $L^2(\mathbb{R})$, pour un certain $\gamma > 0$, et qu'il existe une constante $M_2 > 0$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |(\gamma + i\eta)\widehat{\psi}(\xi, \gamma + i\eta)|^2 \, d\eta \leqslant M_2 \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\gamma + i\eta)|^2 d\eta. \tag{3.26}$$

Il est facile de voir que $(\widehat{\phi}, \widehat{\psi})$ satisfait :

$$\lambda^2 \widehat{\phi}(x,y,\lambda) - \Delta\widehat{\phi}(x,y,\lambda) = 0, \; (x,y) \in (0,1) \times (0,1), \; Re\lambda > 0, \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial \nu}(x,y,\lambda) = 0, \; (x,y) \in \Gamma_1, \; Re\lambda > 0, \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial x}(x,y,\lambda) = -\widehat{\frac{\partial \psi}{\partial t}}(y,\lambda), \; (x,y) \in \Gamma_0, \; Re\lambda > 0. \tag{3.29}$$

$$\lambda^2 \widehat{\psi}(y,\lambda) + \frac{\partial^4 \widehat{\psi}}{\partial y^4}(y,\lambda) + \lambda\, \widehat{\phi}(0,y,\lambda) = \widehat{g}(\lambda)\, \delta_\xi, \; y \in (0,1), \; Re\lambda > 0, \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial y}(0,\lambda) = \frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial y}(1,\lambda) = \frac{\partial^3 \widehat{\psi}}{\partial y^3}(0,\lambda) = \frac{\partial^3 \widehat{\psi}}{\partial y^3}(1,\lambda) = 0, \; Re\lambda > 0. \tag{3.31}$$

La solution de (3.27)-(3.31) est donnée par

$$\widehat{\phi}(x,y,\lambda) = 4 \sum_{n,m} \frac{cos(n\pi x)\, cos(m\pi y)}{\lambda^2 + (n^2 + m^2)\pi^2} \int_0^1 \widehat{\frac{\partial \psi}{\partial t}}(y_1,\lambda)\, cos(m\pi y_1)\, dy_1$$

$$= 4 \sum_n cos(n\pi y) \sum_m \frac{cos(m\pi x)}{\lambda^2 + (n^2+m^2)\pi^2} \int_0^1 \widehat{\frac{\partial \psi}{\partial t}}(y_1,\lambda)\, cos(m\pi y_1)\, dy_1, \tag{3.32}$$

et

$$\widehat{\psi}(y,\lambda) = -\int_0^1 \Big(\frac{ch[\tau(1-y_1)]\, ch(\tau y)}{2\tau^3\, sh(\tau)} + \frac{cos[\tau(1-y_1)]\, cos(\tau y)}{2\tau^3\, sin(\tau)}\Big) \widehat{\frac{\partial \phi}{\partial t}}(0,y_1,\lambda)\, dy_1 -$$

$$\int_0^y \frac{sh[\tau(y-y_1)] - sin[\tau(y-y_1)]}{2\tau^3} \widehat{\frac{\partial \phi}{\partial t}}(0,y_1,\lambda)\, dy_1 +$$

$$+ \begin{cases} -\dfrac{1}{2\tau^3}\Big\{\dfrac{cos[\tau(\xi-1)]\, cos(\tau y)}{sin(\tau)} - \dfrac{ch(\tau y)\, ch[\tau(\xi-1)]}{sh(\tau)}\Big\} \widehat{g}(\lambda),\ y \in (0,\xi), \\ -\dfrac{1}{2\tau^3}\Big\{\dfrac{cos(\tau\xi)\, cos[(\tau(y-1))])}{sin(\tau)} - \dfrac{ch(\tau\xi)\, ch[\tau(y-1)]}{sh(\tau)}\Big\} \widehat{g}(\lambda),\ y \in (\xi,1), \end{cases} \tag{3.33}$$

où $\lambda = i\tau^2$, $\tau = re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$.

Alors, il vient

$$\lambda\, \widehat{\psi}(\xi,\lambda) = -i \int_0^1 \Big(\frac{ch[\tau(1-y_1)]\, ch(\tau\xi)}{2\tau\, sh(\tau)} + \frac{cos[\tau(1-y_1)]\, cos(\tau\xi)}{2\tau\, sin(\tau)}\Big) \widehat{\frac{\partial \phi}{\partial t}}(0,y_1,\lambda)\, dy_1 -$$

$$i \int_0^\xi \frac{sh[\tau(\xi-y_1)] - sin[\tau(\xi-y_1)]}{2\tau} \widehat{\frac{\partial \phi}{\partial t}}(0,y_1,\lambda)\, dy_1 -$$

$$-\frac{i}{2\tau}\Big\{\frac{cos[\tau(\xi-1)]\, cos(\tau\xi)}{sin(\tau)} - \frac{ch(\tau\xi)\, ch[\tau(\xi-1)]}{sh(\tau)}\Big\} \widehat{g}(\lambda). \tag{3.34}$$

Ceci implique en particulier que

$$|\lambda\, \widehat{\psi}(\xi,\lambda)|^2 \leqslant 3 \Big\{ \sup_{\xi \leqslant y_1 \leqslant 1} \Big| \frac{cos(\tau\xi)\, cos[\tau(1-y_1)]}{2\tau\, sin(\tau)} -$$

$$\frac{ch(\tau\xi)\, ch[\tau(1-y_1)]}{2\tau\, sh(\tau)} \Big|^2 \int_\xi^1 \Big| \widehat{\frac{\partial \phi}{\partial t}}(0,y_1,\lambda) \Big|^2 dy_1 +$$

$$\sup_{0 \leqslant y_1 \leqslant \xi} \Big| \frac{cos(\tau\xi)\, cos[\tau(1-y_1)]}{2\tau\, sin(\tau)} - \frac{ch(\tau\xi)\, ch[\tau(1-y_1)]}{2\tau\, sh(\tau)} -$$

$$\frac{sh[\tau(\xi-y_1)] - sin[\tau(\xi-y_1)]}{2\tau} \Big|^2 \int_0^\xi \Big| \widehat{\frac{\partial \phi}{\partial t}}(0,y_1,\lambda) \Big|^2 dy_1 +$$

$$\left| -\frac{i}{2\tau}\left\{\frac{cos[\tau(\xi-1)]\,cos(\tau\xi)}{sin(\tau)} - \frac{ch(\tau\xi)\,ch[\tau(\xi-1)]}{sh(\tau)}\right\}\right|^2 |\widehat{g}(\lambda)|^2\Big\}. \qquad (3.35)$$

D'après (3.32), on déduit l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\int_0^1 \left|\widehat{\frac{\partial \phi}{\partial t}}(0, y_1, \lambda)\right|^2 dy_1 \leqslant C \sum_m \left|\sum_n \frac{\lambda}{\lambda^2 + (n^2+m^2)\pi^2}\right|^2 \int_0^1 \left|\widehat{\frac{\partial \psi}{\partial t}}(y_1, \lambda)\right|^2 dy_1.$$

La méthode d'énergie appliquée au problème (3.27)-(3.31) implique que pour tout $C_1 > 0$ il existe $C_2 > 0$ tel que

$$\int_0^1 \left|\widehat{\frac{\partial \psi}{\partial t}}(y_1, \lambda)\right|^2 dy_1 \leqslant \frac{1}{Re\lambda}\left|\widehat{\frac{\partial \psi}{\partial t}}(\xi, \lambda)\,\widehat{g}(\lambda)\right| \leqslant \frac{C_1}{Re\lambda}|\lambda\widehat{\psi}(\xi,\lambda)|^2 + \frac{C_2}{Re\lambda}|\widehat{g}(\lambda)|^2.$$

Donc comme les fonctions

$$H_1(\lambda = i\tau^2) = \frac{i}{2\tau}\left\{-\frac{cos(\tau\xi)\,cos[\tau(\xi-1)]}{sin(\tau)} + \frac{sh(\tau\xi)ch[\tau(\xi-1)]}{ch(\tau)}\right\}, \ \forall\, Re\lambda > 0,$$

$$H_2(\lambda = i\tau^2) = \sup_{\xi \leqslant y_1 \leqslant 1}\left|\frac{cos(\tau\xi)\,cos[\tau(1-y_1)]}{\tau\, sin(\tau)} - \frac{ch(\tau\xi)\,ch[\tau(1-y_1)]}{\tau\, sh(\tau)}\right|, \ \forall\, Re\lambda > 0,$$

$$H_3(\lambda = i\tau^2) = \sup_{0 \leqslant y_1 \leqslant \xi}\left|\frac{cos(\tau\xi)\,cos[\tau(1-y_1)]}{\tau\, sin(\tau)} - \frac{ch(\tau\xi)\,ch[\tau(1-y_1)]}{\tau\, sh(\tau)} - \frac{sh[\tau(\xi-y_1)] - sin[\tau(\xi-y_1)]}{2\tau}\right|, \ \forall\, Re\lambda > 0,$$

sont bornées sur la partie C_β (voir [4, Lemme 3.4]), et comme d'après le Lemme 3.2 la série suivante

$$\sum_m \left|\sum_n \frac{\lambda}{\lambda^2 + (n^2+m^2)\pi^2}\right|^2$$

est bornée sur C_β, il existe, pour C_1 suffisamment petit, une constante $M_2 > 0$ telle qu'on a (3.26). Ceci implique (3.10). □

4. Inégalité d'observabilité

Dans cette section on va donner quelques inégalités d'observabilités à hautes et à basses fréquences concernant la trace au point ξ des solutions de (3.11)-(3.18) et déterminer explictement les constantes qui interviennent dans ces inégalités en fonction de la fréquence de coupure n.

Dans la proposition suivante on donne une inégalité d'observabilité à hautes fréquences concernant la trace au point $y = \xi$ de v solution de (3.11)-(3.18).

PROPOSITION 4.1. — *Soit $T > 0$ fixé. Alors*

1. *Pour tout* $\xi \in [Q \backslash \mathcal{A}_n] \cap (0,1)$ *la solution* (u,v) *de* (3.11)-(3.18) *satisfait*

$$\int_0^T \left| \frac{\partial v}{\partial t}(\xi,t) \right|^2 dt \geqslant C_{\xi,n} \|(\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1)\|^2_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(0,1) \times H^{-2}(0,1)},$$

$$\forall\, (\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1) \in \mathcal{X}_n, \tag{4.1}$$

où

$$C_{\xi,n} = \begin{cases} \dfrac{C_\xi}{n^8}, \ \textit{pour}\ n \in \mathbb{N}^*, \\ \\ C_\xi, \ \textit{pour}\ n = 0, \end{cases}$$

$C_\xi > 0$, *est une constante qui dépend uniquement de* ξ.

2. *Le résultat* (4.1) *est optimal dans le sens que, pour tout* $\xi \in (0,1)$, *il existe une suite* $(\varphi_p^0, \varphi_p^1, w_p^0, w_p^1) \subset \mathcal{X}_n$ *telle que la suite des solutions correspondantes* (u_p, v_p) *de* (3.11)-(3.18) *avec les données initiales* $(\varphi_p^0, \varphi_p^1, w_p^0, w_p^1)$ *satisfait*

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{\displaystyle\int_0^T \left| \frac{\partial v_p}{\partial t}(\xi,t) \right|^2 dt}{\|(\varphi_p^0, \varphi_p^1, w_p^0, w_p^1)\|^2_{H^\epsilon(\Omega) \times H^{-1+\epsilon}(\Omega) \times H^\epsilon(0,1) \times H^{-2+\epsilon}(0,1)}} = 0. \tag{4.2}$$

Preuve. — On peut diagonaliser l'opérateur anti-adjoint qui correspond au problème (3.11)-(3.18) suivant la base des vecteurs propres $(\Phi_{n,k})_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbf{Z}^* \cap \{*,**\}}$. Soit

$$\begin{pmatrix} \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ w^0 \\ w^1 \end{pmatrix} = \sum_{|k|>n} a_{n,k} \Phi_{n,k} \in \mathcal{X}_n.$$

Alors la solution de (3.11)-(3.18) est donnée par

$$\begin{pmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial t} \\ v \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} = \sum_{|k|>n} a_{n,k} e^{\lambda_{n,k} t} \Phi_{n,k}.$$

Donc, on a en particulier

$$\frac{\partial v}{\partial t}(\xi,t) = \sum_{|k|>n} \frac{a_{n,k}}{\Theta_{n,k}} e^{\lambda_{n,k}t} \left[\frac{\sqrt{n^2\pi^2+\lambda_{n,k}^2}}{\lambda_{n,k}} sh(\sqrt{n^2\pi^2+\lambda_{n,k}^2}) \right] \cos(n\pi\xi). \tag{4.3}$$

D'après [1] on a

$$|\lambda_{n,k+1} - \lambda_{n,k}| \geqslant \frac{1}{4} arctg(\frac{1}{\pi}), \forall\, |k| > n,$$

$$\left| \sqrt{n^2\pi^2+\lambda_{n,k}^2}\, sh(\sqrt{n^2\pi^2+\lambda_{n,k}^2}) \right| \geqslant \begin{cases} \frac{C}{n^4}, \forall\, k \in \mathbb{Z}^*, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \\ C, \forall\, k \in \mathbb{Z}^*,\, n = 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

où C est une constante qui ne dépend ni de n ni de k.
En utilisant l'inégalité d'Ingham [15], [19, Lemme 3.4] et l'inégalité (4.4), on obtient que pour tout $T > \dfrac{8\pi}{arctg(\frac{1}{\pi})}$

$$\int_0^T \left| \frac{\partial v}{\partial t}(\xi,t) \right|^2 dt \geqslant \begin{cases} \dfrac{C}{n^8} \displaystyle\sum_{|k|>n} \frac{|a_{n,k}|^2}{|\lambda_{n,k}|^2}, \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*, \\ C \displaystyle\sum_{|k|>n} \frac{|a_{n,k}|^2}{|\lambda_{n,k}|^2}, \text{ pour } n = 0, \end{cases} \tag{4.5}$$

d'où (4.1).

Finalement, en utilisant (4.5) on peut voir à l'aide d'un calcul simple que la suite

$$\begin{pmatrix} \varphi_p^0 \\ \varphi_p^1 \\ w_p^0 \\ w_p^1 \end{pmatrix} = \Phi_{n,p}$$

satisfait (4.2). □

Pour les basses fréquences on a l'inégalité d'observabilité suivante :

PROPOSITION 4.2. — *Pour tout ε et $\delta > 0$, il existe des constantes $C_{\varepsilon,\delta,n,\xi} > 0$, $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ et $T(\varepsilon,\delta) \leqslant \frac{C_\delta}{\varepsilon^{1+\delta}}$ telles que pour tout $n \geqslant n_1(\varepsilon)$, pour tout $\xi \in [Q \setminus \mathcal{A}_n] \cap (0,1)$ et tout $(\varphi^0,\varphi^1,w^0,w^1) = (\varphi_1^0,\varphi_1^1,w_1^0,w_1^1) + (\varphi_2^0,\varphi_2^1,w_2^0,w_2^1) \in \mathcal{X}_n + \mathcal{Y}_n = \mathcal{Z}_n$ la solution (u,v) de (3.11)-(3.18) satisfait*

$$\int_0^{T(\varepsilon,\delta)} \left| \frac{\partial v}{\partial t}(\xi,t) \right|^2 dt \geqslant C_{\varepsilon,\delta,n,\xi} \left\| (\varphi_2^0,\varphi_2^1,w_2^0,w_2^1) \right\|^2_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)\times L^2(0,1)\times H^{-2}(0,1)}, \tag{4.6}$$

où $C_{\varepsilon,\delta,n,\xi} = C_{\varepsilon,\delta,\xi}\, e^{-2\varepsilon n} > 0$, *et* $C_\xi > 0$, *est une constante qui dépend uniquement de* ε, δ *et* ξ.

Comme à basses fréquences le gap entre les fréquences tend vers zéro, on va adapter la méthode proposée, par Allibert et Micu dans [1] qui est une méthode inspirée de la technique WKB. Pour la preuve nous renvoyons le lecteur à l'article [1], paragraphe 4.3, pages 580-591.

LEMME 4.1 (ALLIBERT ET MICU - 1999). — *Pour tout entier* q *impair et pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $T(q,\varepsilon)$ *plus petit que* $C_q\, \varepsilon^{\frac{1+q}{1-q}}$ *tel que* $(n, k_0) \in \mathbb{N}^* \times (\mathbb{Z}^* \cup \{*, **\})$ *et il existe une fonction* $h^{k_0,n}_{\varepsilon,q}$ *qui satisfait*

1.
$$supp(h^{k_0,n}_{\varepsilon,q}) \subset [-T(q,\varepsilon), T(q,\varepsilon)].$$

2. *Pour* (k_0, n) *tel que* $k_0 \in \{*, **\}$ *ou* $|k_0| \leqslant n$,
$$||h^{k_0,n}_{\varepsilon,q}||^2_{L^2} \leqslant C\, e^{2\varepsilon n}.$$

3. *Si* $k \neq \pm k_0$,
$$\int h^{k_0,n}_{\varepsilon,q}(t)\, e^{\lambda_{n,k} t}\, dt = 0.$$

4. *Si* $n \geqslant n_1(\varepsilon, q)$ *et* (k_0, n) *tel que* $k_0 \in \{*, **\}$ *ou* $|k_0| \leqslant n$,
$$\int h^{k_0,n}_{\varepsilon,q}(t)\, e^{\lambda_{n,\pm k_0} t}\, dt \geqslant \frac{c}{n^{N_q}}.$$

Les constantes dépendent uniquement de q *et* ε. *De plus il est possible de choisir* $h^{k_0,n}_{\varepsilon,q}$ *paire ou impaire, que nous noterons par* $h^{k_0,n}_{p_{\varepsilon,q}}$ *et* $h^{k_0,n}_{i_{\varepsilon,q}}$. □

L'analogue de la Proposition 4.2 est démontré par Allibert et Micu dans [1, Lemme 6]. La preuve dans notre cas est la même, mot pour mot. Nous allons, pour être complet en donner les grandes lignes.

Preuve de la Proposition 4.2. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant n_1(\varepsilon)$, et

$$\begin{pmatrix} \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ w^0 \\ w^1 \end{pmatrix} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^* \cup \{*, **\}} a_{n,k}\, \Phi_{n,k} \in \mathcal{Z}_n.$$

Donc,

$$\frac{\partial v}{\partial t}(\xi, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^* \cup \{*, **\}} \lambda_{n,k}\, a_{n,k}\, \Phi^3_{n,k}\, e^{\lambda_{n,k} t}.$$

D'où il vient pour (k_0, n) tel que $k_0 \in \{*, **\}$ ou $|k_0| \leqslant n$ et $L \in \mathbb{N}^*$,

$$\int h_{p_{\varepsilon,q}}^{k_0,n}(t)\, K\Big(\sum_{|k|=*,|k|\leqslant L} a_{n,k}\, \Phi_{n,k}\Big)(t)\, dt =$$

$$\sum_{k=*,1<k<L} \lambda_{n,k}\, (a_{n,k} + a_{n,-k})\, \Phi_{n,k}^3 \int h_{p_{\varepsilon,q}}^{k_0,n}(t)\, e^{\lambda_{n,k} t}\, dt,$$

où K est un opérateur défini par

$$\begin{array}{llll} K: & \mathcal{Z}_n & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1) & \longrightarrow & K(\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1) = \dfrac{\partial v}{\partial t}(\xi, .). \end{array}$$

Si $L \geqslant k_0$, alors de (3) du Lemme 4.1 on a

$$\int h_{p_{\varepsilon,q}}^{k_0,n}(t)\, K\Big(\sum_{|k|=*,|k|\leqslant L} a_{n,k}\, \Phi_{n,k}\Big)(t)\, dt =$$

$$\lambda_{n,k_0}\, (a_{n,k_0} + a_{n,-k_0})\, \Phi_{n,k_0}^3 \int h_{p_{\varepsilon,q}}^{k_0,n}(t)\, e^{\lambda_{n,k_0} t}\, dt.$$

De (4) du Lemme 4.1, de l'inégalité (4.4), [19, Lemme 3.4] et de (2.4), il vient

$$\left| \int h_{p_{\varepsilon,q}}^{k_0,n}(t)\, K\Big(\sum_{|k|=*,|k|\leqslant L} a_{n,k}\, \Phi_{n,k}\Big)(t)\, dt \right| \geqslant \frac{c}{|\lambda_{n,k_0}|}\, |a_{n,k_0} + a_{n,-k_0}|\, e^{-n^{\frac{2}{3}}}.$$

Maintenant si on fait tendre L vers l'infini, on obtient

$$\left| \int h_{p_{\varepsilon,q}}^{k_0,n}(t)\, K\Big(\sum_{k\in \mathbf{Z}^* \cup \{*,**\}} a_{n,k}\, \Phi_{n,k}\Big)(t)\, dt \right| \geqslant \frac{c}{|\lambda_{n,k_0}|}\, |a_{n,k_0} + a_{n,-k_0}|\, e^{-n^{\frac{2}{3}}}.$$

On peut avoir de la même façon

$$\left| \int h_{i_{\varepsilon,q}}^{k_0,n}(t)\, K\Big(\sum_{k\in \mathbf{Z}^* \cup \{*,**\}} a_{n,k}\, \Phi_{n,k}\Big)(t)\, dt \right| \geqslant \frac{c}{|\lambda_{n,k_0}|}\, |a_{n,k_0} + a_{n,-k_0}|\, e^{-n^{\frac{2}{3}}}.$$

Donc, on obtient

$$\frac{|a_{n,k_0}|}{|\lambda_{n,k_0}|} \leqslant \frac{1}{c}\, e^{n^{\frac{2}{3}}} \left(\left| \int h_{p_{\varepsilon,q}}^{k_0,n}(t)\, K\Big(\sum_{k\in \mathbf{Z}^* \cup \{*,**\}} a_{n,k}\, \Phi_{n,k}\Big)(t)\, dt \right| + \right.$$

$$\left| \int h_{i_{\varepsilon,q}}^{k_0,n}(t)\, K\Big(\sum_{k\in \mathbf{Z}^*\cup\{*,**\}} a_{n,k}\, \Phi_{n,k}\Big)(t)\, dt \right| \Bigg). \tag{4.7}$$

Comme, pour tout $n \geqslant n_1(\varepsilon)$, on a

$$||(\varphi_2^0, \varphi_2^1, w_2^0, w_2^1)||^2_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)\times L^2(0,1)\times H^{-2}(0,1)} = \sum_{|k|=*,|k|\leqslant n} \frac{|a_{n,k}|^2}{|\lambda_{n,k}|^2}$$

alors de (4.7) on déduit

$$||(\varphi_2^0, \varphi_2^1, w_2^0, w_2^1)||^2_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)\times L^2(0,1)\times H^{-2}(0,1)} \leqslant \frac{1}{c}$$

$$\left(\sum_{|k|=*,|k|\leqslant n} e^{n^{\frac{2}{3}}} \left| \int h_{i_{\varepsilon,q}}^{k_0,n}(t)\, \frac{\partial v}{\partial t}(\xi,t)\, dt \right|^2 + \sum_{|k|=*,|k|\leqslant n} e^{n^{\frac{2}{3}}} \left| \int h_{p_{\varepsilon,q}}^{k_0,n}(t)\, \frac{\partial v}{\partial t}(\xi,t)\, dt \right|^2 \right)$$

D'où de (1) du Lemme 4.1,

$$||(\varphi_2^0, \varphi_2^1, w_2^0, w_2^1)||^2_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)\times L^2(0,1)\times H^{-2}(0,1)} \leqslant \frac{1}{c}\, e^{n^{\frac{2}{3}}}$$

$$\sum_{|k|=*,|k|\leqslant n} e^{n^{\frac{2}{3}}} \int \left| h_{i_{\varepsilon,q}}^{k_0,n}(t) \right|^2 dt \int_{-T(q,\varepsilon)}^{T(q,\varepsilon)} \left| \frac{\partial v}{\partial t}(\xi,t) \right|^2 dt.$$

De (2) du Lemme 4.1,

$$||(\varphi_2^0, \varphi_2^1, w_2^0, w_2^1)||^2_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)\times L^2(0,1)\times H^{-2}(0,1)} \leqslant$$

$$\frac{1}{c}\, e^{n^{\frac{2}{3}}}\, e^{2\varepsilon n} \int_{-T(q,\varepsilon)}^{T(q,\varepsilon)} \left| \frac{\partial v}{\partial t}(\xi,t) \right|^2 dt.$$

Comme lorsque $q \to \infty$, $\dfrac{1+q}{1-q} = -1-\delta$, avec $\delta \to 0$, en décalant légèrement ε, on a montré la Proposition 4.2. $\square$

PROPOSITION 4.3. — *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n < n_1(\varepsilon)$, pour tout $\xi \in [Q \setminus \mathcal{A}_n] \cap (0,1)$ et tout $(\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1) \in \mathcal{Y}_n$ la solution (u,v) de* (3.11)-(3.18) *satisfait*

$$\int_0^{T(\varepsilon,\delta)} \left| \frac{\partial v}{\partial t}(\xi,t) \right|^2 dt \geqslant C_{\varepsilon,\delta,n,\xi}\, ||(\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1)||^2_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)\times L^2(0,1)\times H^{-2}(0,1)}, \tag{4.8}$$

où $C_{\varepsilon,\delta,n_1(\varepsilon),\xi}$ est une constante qui dépend uniquement de $\varepsilon, \delta, \xi, n_1(\varepsilon)$.

Preuve. — Soit

$$\begin{pmatrix} \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ w^0 \\ w^1 \end{pmatrix} = \sum_{(n,k)\in I_{n_1(\varepsilon)}} a_{n,k}\,\Phi_{n,k} \in \mathcal{Y}_n,$$

où

$$I_{n_1(\varepsilon)} = \Big\{n,\ 0 \leqslant n < n_1(\varepsilon)\Big\} \times \Big\{k,\ |k| \leqslant n,\ \text{ou}\, k = *, **\Big\}.$$

Donc,

$$\frac{\partial v}{\partial t}(\xi, t) = \sum_{(n,k)\in I_{n_1(\varepsilon)}} \lambda_{n,k}\, a_{n,k}\, \Phi^3_{n,k}(\xi)\, e^{\lambda_{n,k} t}$$
$$= \sum_{(n,k)\in I_{n_1(\varepsilon)}\setminus\{(0,*),(0,**)\}} \lambda_{n,k}\, a_{n,k}\, \Phi^3_{n,k}(\xi)\, e^{\lambda_{n,k} t}.$$

Comme d'après une extension de la formule classique de Weyl (voir [13]) la fonction $n(t) = card\Big\{\lambda_{n,k},\ i\,\lambda_{n,k} \leqslant t\Big\}$ admet l'asymptotique suivante

$$n(t) = \frac{1}{4\pi} + O(t^{\frac{1}{2}}).$$

D'où, d'après le corollaire 2.3.5 de [14] (voir aussi [13]), il existe $T > \frac{1}{2}$ tel que

$$\int_0^T \left|\frac{\partial v}{\partial t}(\xi, t)\right|^2 dt \geqslant \left(\sum_{(n,k)\in I_{n_1(\varepsilon)}} C^2_{n,k}\right)^{-1} \sum_{(n,k)\in I_{n_1(\varepsilon)}\setminus\{(0,*),(0,**)\}} \frac{|a_{n,k}|^2}{|\lambda_{n,k}|^2}.$$

□

En combinant la Proposition 4.2 et la proposition précédente, on obtient le résultat suivant

COROLLAIRE 4.1. — *Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Donc, pour tout $\xi \in [Q \setminus \mathcal{A}_n] \cap (0,1)$ et tout $(\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1) \in \mathcal{Y}_n$ la solution (u, v) de (3.11)-(3.18) satisfait*

$$\int_0^{T(\varepsilon,\delta)} \left|\frac{\partial v}{\partial t}(\xi, t)\right|^2 dt \geqslant$$

$$C_{\varepsilon,\delta,n,\xi}\, \|(\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1)\|^2_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)\times L^2(0,1)\times H^{-2}(0,1)}, \tag{4.9}$$

où $C_{\varepsilon,\delta,n,\xi} = C_{\varepsilon,\delta,\xi}\, e^{-2\varepsilon n}$, $C_{\varepsilon,\delta,\xi} > 0$ est une constante qui dépend uniquement de ε, δ, ξ. □

REMARQUE 4.1. — *En remarquant que pour n fixé on a $|\lambda_{n,k}| \leqslant (n+1)^2\pi^2$, $\forall |k| \leqslant n$ ou $k = *, **$. Alors, pour tout $\xi \in [Q \setminus \mathcal{A}_n] \cap (0,1)$ et tout $(\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1) \in \mathcal{Y}_n$ la solution (u,v) de (3.11)-(3.18) satisfait*

$$\int_0^{T(\varepsilon,\delta)} \left| \frac{\partial v}{\partial t}(\xi, t) \right|^2 dt \geqslant$$

$$C_{\varepsilon,\delta,n,\xi} \, \|(\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1)\|_X^2, \tag{4.10}$$

où $C_{\varepsilon,\delta,n,\xi} = C_{\varepsilon,\delta,\xi} \frac{e^{-2\varepsilon n}}{(n+1)^2\pi^2}$, $C_{\varepsilon,\delta,\xi} > 0$ est une constante qui dépend uniquement de ε, δ, ξ. $\square$

5. Preuve du résultat principal

La stabilité forte, donnée par la première assertion du Théorème 2.1, découle du principe d'invariance de LaSalle. Donc, nous introduisons $T(t)$ le semigroupe de contractions engendré par l'opérateur A, déjà introduit dans la Section 1. Dans le but de prouver la stabilité forte des solutions de (1.1)-(1.8), il suffit de prouver

$$\lim_{t \to \infty} T(t) \begin{pmatrix} \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ w^0 \\ w^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \\ C_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \forall\, (\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1) \in \mathcal{D}(A), \tag{5.1}$$

où C_1, C_2 sont des fonctions constantes.

On va commencer par montrer (5.1) pour tout

$$\xi \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{A}_n. \tag{5.2}$$

Comme l'injection $\mathcal{D}(A) \subset X$ est compacte, l'ensemble

$$\text{orb} \begin{pmatrix} \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ w^0 \\ w^1 \end{pmatrix} = \bigcup_{t \geqslant 0} T(t) \begin{pmatrix} \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ w^0 \\ w^1 \end{pmatrix}$$

est précompact dans X pour tout $(\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1)$ dans $\mathcal{D}(A)$. Dans ce cas l'ensemble ω-limite de $\begin{pmatrix} \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ w^0 \\ w^1 \end{pmatrix}$ est défini par

$$\omega \begin{pmatrix} \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ w^0 \\ w^1 \end{pmatrix} = \left\{ U \in X, \exists (t_n),\ t_n \to \infty, T(t_n) \begin{pmatrix} \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ w^0 \\ w^1 \end{pmatrix} \to U, \quad n \to \infty \right\},$$

est non vide pour tout $\begin{pmatrix} \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ w^0 \\ w^1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{D}(A)$. D'autre part, le principe d'invariance de LaSalle (on réfere à [10] pour plus de détails) assure :

$$\text{si} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \in \omega \begin{pmatrix} \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ w^0 \\ w^1 \end{pmatrix}$$

alors

$$T(t) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(\cdot,t) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\cdot,t) \\ w(\cdot,t) \\ \frac{\partial w}{\partial t}(\cdot,t) \end{pmatrix} \in \omega \begin{pmatrix} \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ w^0 \\ w^1 \end{pmatrix}$$

et

$$||(\varphi(\cdot,t), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\cdot,t), w(\cdot,t), \frac{\partial w}{\partial t}(\cdot,t))||_X = ||(\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1)||_X, \text{pour tout } t \geqslant 0.$$

La relation précédente et (2.2) impliquent que (φ, w) satisfait le système (1.1)-(1.8) avec

$$\frac{\partial w}{\partial t}(\xi, t) = 0,\ \forall t \in (0,T). \tag{5.3}$$

Cela implique en particulier que (φ, w) est solution de (3.11)-(3.18). Soit

$$\begin{pmatrix} \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ w^0 \\ w^1 \end{pmatrix} = \sum_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}^* \cup \left\{*,**\right\}} a_{n,k}\, \Phi_{n,k} \in X,$$

et

$$J = \left\{(n,k),\ n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}^* \cup \left\{*,**\right\}\right\} \setminus \left\{(0,*),(0,**)\right\}.$$

On obtient donc

$$\frac{\partial w}{\partial t}(\xi,t) = \sum_{n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}^*\cup\{*,**\}} a_{n,k}\, e^{\lambda_{n,k}t}\, \Phi^4_{n,k}(\xi)$$

$$= \sum_{(n,k)\in J} \frac{a_{n,k}}{\Theta_{n,k}} e^{\lambda_{n,k}t} \left[\frac{\sqrt{n^2\pi^2+\lambda^2_{n,k}}}{\lambda_{n,k}} sh(\sqrt{n^2\pi^2+\lambda^2_{n,k}}) \right] \cos(n\pi\xi). \quad (5.4)$$

Comme pour tout $(n,k),(p,q)\in J$, on a

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T e^{\lambda_{n,k}t}\, e^{\lambda_{p,q}t}\,dt = 0,\ \forall\,(n,k)\neq(p,q). \quad (5.5)$$

Alors, d'après (5.4), (5.5) et [16], il vient que $\frac{\partial w}{\partial t}(\xi,t)=0$ si et seulement si

$$a_{n,k}\left[\frac{\sqrt{n^2\pi^2+\lambda^2_{n,k}}}{\lambda_{n,k}} sh(\sqrt{n^2\pi^2+\lambda^2_{n,k}}) \right] \cos(n\pi\xi) = 0,\ \forall\,(n,k)\in J.$$

Ceci implique que $a_{n,k} = 0, \forall\,(n,k)\in J$ (car $\cos(n\pi\xi)\neq 0, \forall\xi\notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\mathcal{A}_n$), donc $\varphi\equiv a_{0,*}, w\equiv a_{0,**}$. On conclut donc que la condition (5.2) est suffisante pour la stabilité forte des solutions de (1.1)-(1.8) à données dans X.

Si on suppose que ξ ne satisfait pas (5.2), i.e. $\xi = \frac{2p-1}{2n}$, avec $n\in\mathbb{N}^*$, $p\in\{1,2,..,n\}$, on peut voir facilement que la solution (φ,w) de (1.1)-(1.8) avec données initiales

$$\begin{pmatrix}\varphi^0\\ \varphi^1\\ w^0\\ w^1\end{pmatrix} = \Phi_{n,k}$$

satisfait $E(t)=E(0)$, $\forall t\geqslant 0$, d'où (5.2) est aussi une condition nécessaire pour la stabilité forte des solutions de (1.1)-(1.8) à données initiales dans X. $\square$

Soit $(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial t}, w, \frac{\partial w}{\partial t}) \in C(0,T;X)$ solution de (1.1)-(1.8). Alors (φ,w) peut s'écrire sous la forme

$$(\varphi,w) = (u,v) + (\tilde{\phi},\tilde{\psi}), \quad (5.6)$$

où (u, v) est solution de (3.11)-(3.18) et $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})$ satisfait le système (3.1)-(3.8) avec $g(t) = -\dfrac{\partial w}{\partial t}(\xi, t)$.

L'ingrédient principal pour la preuve de l'assertion 2 et de l'assertion 3 du Théorème 2.1 est le résultat suivant.

LEMME 5.1. — *Supposons que* $(\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1) \in X$. *Alors la solution* (φ, w) *de* (1.1)-(1.8) *et la solution* (u, v) *de* (3.11)-(3.18) *satisfait*

$$C_1 \int_0^T \left|\frac{\partial v}{\partial t}(\xi, t)\right|^2 dt \leqslant \int_0^T \left|\frac{\partial w}{\partial t}(\xi, t)\right|^2 dt \leqslant 4 \int_0^T \left|\frac{\partial v}{\partial t}(\xi, t)\right|^2 dt, \tag{5.7}$$

où $C_1 > 0$ *est une constante indépendante de* $(\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1)$.

REMARQUE 5.1. — *D'après l'estimation d'énergie* (2.2), $\dfrac{\partial w}{\partial t}(\xi, \cdot) \in L^2(0, T)$. *Donc, l'équation* (3.4) *a un sens. Le résultat précédent montre que la norme* L^2 *de* $\dfrac{\partial w}{\partial t}(\xi, \cdot)$ *est équivalente à la norme* L^2 *de* $\dfrac{\partial v}{\partial t}(\xi, \cdot)$ *(on note qu'on a* $\dfrac{\partial v}{\partial t}(\xi, \cdot) \in L^2(0, T)$ *d'après le Lemme 3.1).*

Preuve du Lemme. — 5.1. La relation (5.6) implique que

$$\int_0^T \left|\frac{\partial v}{\partial t}(\xi, t)\right|^2 dt \leqslant 2\left\{\int_0^T \left|\frac{\partial w}{\partial t}(\xi, t)\right|^2 dt + \int_0^T \left|\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t}(\xi, t)\right|^2 dt\right\}.$$

L'estimation précédente combinée avec l'inégalité (3.10) de la Proposition 3.1 implique qu'il existe une constante $C_1 > 0$, indépendante de $(\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1)$, telle que

$$C_1 \int_0^T \left|\frac{\partial v}{\partial t}(\xi, t)\right|^2 dt \leqslant \int_0^T \left|\frac{\partial w}{\partial t}(\xi, t)\right|^2 dt. \tag{5.8}$$

D'autre part, d'après la Remarque 5.1 et la relation (5.6) on a que $\dfrac{\partial v}{\partial t}(\xi, \cdot) \in L^2(0, T)$. C'est à dire que l'équation (3.4) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\partial^4 \tilde{\psi}}{\partial x^4}(x, t) + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t}(\xi, t)\,\delta_\xi + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}(0, y, t) = -\frac{\partial v}{\partial t}(\xi, t)\,\delta_\xi \quad \text{dans } (0,1)\times(0,T). \tag{5.9}$$

Si on multiplie formellement (5.9) par $\overline{\dfrac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t}}$ et (3.1) par $\overline{\dfrac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}}$ (ceci peut se faire rigoureusement en considérant une suite régularisante), on obtient

$$\int_0^T \left| \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t}(\xi, t) \right|^2 dt \leqslant \left| \int_0^T \frac{\partial v}{\partial t}(\xi, t) \overline{\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t}}(\xi, t) dt \right|,$$

ceci implique facilement que

$$\left\| \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t}(\xi, t) \right\|^2_{L^2(0,T)} \leqslant \left\| \frac{\partial v}{\partial t}(\xi, t) \right\|^2_{L^2(0,T)}.$$

La relation (5.6) et l'inégalité précédente impliquent que

$$\left\| \frac{\partial w}{\partial t}(\xi, t) \right\|^2_{L^2(0,T)} \leqslant 4 \left\| \frac{\partial v}{\partial t}(\xi, t) \right\|^2_{L^2(0,T)}. \tag{5.10}$$

La conclusion (5.7) découle des inégalités (5.8) et (5.10). □

Avant de donner la preuve du résultat principal on a besoin encore d'un lemme technique. Voir [20] pour la preuve.

LEMME 5.2. — *Soit $(\mathcal{E}_k)$ une suite des nombres réels positifs satisfaisant*

$$\mathcal{E}_{k+1} \leqslant \mathcal{E}_k - C\mathcal{E}^2_{k+1}, \ \forall k \geqslant 0, \tag{5.11}$$

où $C > 0$ est une constante. Alors, il existe une constante positive M (qui dépend de C) tel que

$$\mathcal{E}_k \leqslant \frac{M}{k+1}, \ \forall k \geqslant 0. \tag{5.12}$$

□

On peut maintenant prouver l'assertion 2, 3 et l'assertion 4 du Théorème 2.1.

Preuve de l'assertion 2 du Théorème 2.1.

Supposons que toutes les solutions à données initiales dans $\mathcal{X}_n$ satisfaient l'estimation

$$E(t) \leqslant M e^{-\omega t} E(0), \qquad \forall\, t \geqslant 0, \tag{5.13}$$

où $M, \omega > 0$ sont des constantes dépendant uniquement de ξ et de n. La relation (5.13) implique l'existence d'un temps $T > 0$ et d'une constante $C > 0$ (dépendant de T et de n) tels que

$$E(0) - E(T) \geqslant C\, E(0), \qquad \forall\, (\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1) \in \mathcal{X}_n.$$

La relation précédente combinée avec (2.2) devient

$$\int_0^T \left| \frac{\partial w}{\partial t}(\xi, s) \right|^2 ds \geqslant C\, E(0), \qquad \forall\, (\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1) \in \mathcal{X}_n,$$

donc, le Lemme 5.1 implique que la solution (u, v) de (3.11)-(3.18) satisfait

$$\int_0^T \left| \frac{\partial v}{\partial t}(\xi, s) \right|^2 ds \geqslant \frac{C}{4}\, E(0), \qquad \forall\, (\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1) \in \mathcal{X}_n.$$

L'inégalité précédente contredit clairement l'assertion 2 de la Proposition 4.1. Alors l'hypothèse (5.13) est fausse. De cette façon là on termine la preuve de la deuxième assertion du Théorème 2.1. De la même façon on montre, d'après la Remarque 4.1 et le Lemme 5.1, la stabilité exponentielle des basses fréquences i.e., pour tout $\xi \in [Q \setminus \mathcal{A}_n] \cap (0,1)$ et pour tout $t \geqslant 0$ on a :

$$E(t) \leqslant M_{\varepsilon,\xi,n}\, e^{-\omega_{\varepsilon,\xi,n}\, t} E(0), \qquad \forall\, (\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1) \in \mathcal{Y}_n$$

où $M_{\varepsilon,\xi,n} = 1 + C_{\varepsilon,\xi} \frac{e^{-2\varepsilon n}}{(n+1)^2\pi^2}$, $\omega_{\varepsilon,\xi,n} = \frac{1}{T} \ln(1 + C_{\varepsilon,\xi} \frac{e^{-2\varepsilon n}}{(n+1)^2\pi^2}) > 0$, $C_{\varepsilon,\xi} > 0$ est une constante qui dépend uniquement de ε, ξ.

Preuve de l'assertion 3 et 4 du Théorème 2.1.

Soit $\xi \in [Q \setminus \mathcal{A}_n] \cap (0,1)$. D'après la Proposition 4.1 et le Lemme 5.1, la solution (φ, w) de (1.1)-(1.8) satisfait l'inégalité suivante

$$\int_0^T \left| \frac{\partial w}{\partial t}(\xi, t) \right|^2 dt \geqslant K_1 \|(\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)\times L^2(0,1)\times H^{-2}(0,1)},$$
$$\forall (\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1) \in \mathcal{X}_n,$$

où $K_1 > 0$ est une constante. La relation précédente et (2.2) impliquent que

$$\begin{aligned} \|\{\varphi(T), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(T), w(T), \frac{\partial w}{\partial t}(T)\}\|_X^2 &\leqslant \|\{\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1\}\|_X^2 - \\ &-K_1 \|\{\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1\}\|^2_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)\times L^2(0,1)\times H^{-2}(0,1)}, \\ &\forall\, (\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1) \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{X}_n. \end{aligned} \tag{5.14}$$

En utilisant une inégalité d'interpolation simple (cf. [18, p.49]), le fait que la fonction

$$t \to \|\{\varphi(t), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t), w(t), \frac{\partial w}{\partial t}(t)\}\|_X^2$$

est décroissante et la relation (5.14), on obtient l'existence d'une constante $K_2 > 0$ telle que

$$\|\{\varphi(T), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(T), w(T), \frac{\partial w}{\partial t}(T)\}\|_X^2 \leqslant \|\{\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1\}\|_X^2 -$$

$$-K_2 \frac{\{\|\varphi(T), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(T), w(T), \frac{\partial w}{\partial t}(T)\}\|_X^4}{\|\{\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1\}\|_{\mathcal{D}(A)}^2}. \tag{5.15}$$

L'estimation (5.15) reste valable sur des intervalles successifs $[kT, (k+1)T]$. Donc, pour tout $k \geqslant 0$, on a

$$\|\{\varphi((k+1)T), \frac{\partial \varphi}{\partial t}((k+1)T), w((k+1)T), \frac{\partial w}{\partial t}((k+1)T)\}\|_X^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|\{\varphi(kT), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(kT), w(kT), \frac{\partial w}{\partial t}(kT)\}\|_X^2$$

$$-K_2 \frac{\|\{\varphi((k+1)T), \frac{\partial \varphi}{\partial t}((k+1)T), w((k+1)T), \frac{\partial w}{\partial t}((k+1)T)\}\|_X^4}{\|\{\varphi(kT), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(kT), w(kT), \frac{\partial w}{\partial t}(kT)\}\|_{\mathcal{D}(A)}^2}.$$

Comme A engendre un semigroupe de contractions de $\mathcal{D}(A)$, la relation précédente implique l'existence d'une constante $K_3 > 0$ telle que

$$\|\{\varphi((k+1)T), \frac{\partial \varphi}{\partial t}((k+1)T), w((k+1)T), \frac{\partial w}{\partial t}((k+1)T)\}\|_X^2 \leqslant$$

$$\|\{\varphi(kT), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(kT), w(kT), \frac{\partial w}{\partial t}(kT)\}\|_X^2 -$$

$$-K_3 \frac{\|\{\varphi((k+1)T), \frac{\partial \varphi}{\partial t}((k+1)T), w((k+1)T), \frac{\partial w}{\partial t}((k+1)T)\}\|_X^4}{\|\{\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1\}\|_{\mathcal{D}(A)}^2},$$

$$\forall\ (\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1) \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{X}_n. \tag{5.16}$$

Si on adapte la notation suivante

$$\mathcal{E}_k = \frac{\|\{\varphi(kT), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(kT), w(kT), \frac{\partial w}{\partial t}(kT)\}\|_X^2}{\|\{\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1\}\|_{\mathcal{D}(A)}^2}, \tag{5.17}$$

la relation (5.16) implique

$$\mathcal{E}_{k+1} \leqslant \mathcal{E}_k - K_3 \mathcal{E}_{k+1}^2, \ \forall k \geqslant 0. \tag{5.18}$$

En appliquant le Lemme 5.2 et en utilisant la relation (5.18) on obtient l'existence d'une constante $M > 0$ telle que

$$\|\{\varphi(kT), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(kT), w(kT), \frac{\partial w}{\partial t}(kT)\}\|_X^2 \leqslant \frac{M\|\{\varphi^0, \varphi^1, w^0, w^1\}\|_{\mathcal{D}(A)}^2}{k+1}, \ \forall k \geqslant 0.$$

La conclusion (2.5) en découle par le simple fait que la fonction

$$t \to \|\{\varphi(t), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t), w(t), \frac{\partial w}{\partial t}(t)\}\|_X^2$$

est décroissante.

De la même façon on établit d'après la Proposition 4.2, le Lemme 5.1 et le Lemme 5.2, l'estimation (2.5) pour toutes données dans $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{Y}_n$.

Finalement, pour expliciter la constante $C_{\xi,n,\varepsilon}$, qui intervient dans (2.5), il suffit de voir la preuve du Lemme 5.3 dans [4]. □

Bibliographie

[1] ALLIBERT (B.) and MICU (S.). — Controllability of analytic functioncs for a wave equation coupled with a beam, *Rev. Mat. Iberoamericana.*, **15** (1999), 547-592.

[2] AMMARI (K.). — *Stabilisation d'une classe d'équations d'évolution du deuxième ordre en temps,* Thèse de doctorat de l'École Polytechnique, 2000.

[3] AMMARI (K.) and TUCSNAK (M.). — Stabilization of second order evolution equations by a class of unbounded feedbacks, *ESAIM Control Optim. Calc. Var,* à paraître.

[4] AMMARI (K.) and TUCSNAK (M.). — Stabilization of Bernoulli-Euler beams by means of a pointwise feedback force, *SIAM J. Control. Optim.,* **39** (2000), 1160-1181.

[5] AVALOS (G.), LASIECKA (I.) and REBARBER (R.). — Lack of time-delay robustness for stabilization of a structural acoustics model, *SIAM. J. Control. Optim.,* **37** (2000), 1394-1418.

[6] AVALOS (G.) and LASIECKA (I.). — A differential Riccati equation for the active control of a problem in structural acoustics, *J. Optim. Theory Appl.* **91** (1996), 695-728.

[7] BANKS (H.T.), FANG (W.), SILOX (R.J.) and SMITH (R.C.). — Approximation methods for control of acoustic/structure models with piezoceramic actuators, *Journal of intelligent Material systems and Structures.,* **4** (1993), 98-116.

[8] BARDOS (C.), LEBEAU (G.) and RAUCH (J.). — Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary, *SIAM J. Control Optim.,* **30** (1992), 1024-1065.

[9] BENSOUSSAN (A.), DA PRATO (G.), DELFOUR (M.) and MITTER (S.). *Representation and Control of Infinite Dimensional Systems*, vol. 1, Birkhäuser, Boston, 1992.

[10] DAFERMOS (C.). — *Asymptotic behavior of solutions of evolution equations in "Nonlinear evolution equations"* (M.G. Crandall, Ed.), 103-123, Academic Press, New York, 1978.

[11] DOETSCH (G.). — *Introduction to the theory and application of the Laplace transformation*, Springer, Berlin, 1974.

[12] GRISVARD (P.). — Caratérisation de quelques espaces d'interpolation, *Arch. Rational. Mech. Anal.,* **25** (1967), 40-63.

[13] HARAUX (A.). — Quelques propriétés des séries lacunaires utiles dans l'étude des systèmes élastiques, *Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, Vol. XII (Paris, 1991–1993), 113–124, Pitman Res. Notes Math. Ser., 302, Longman Sci. Tech., Harlow, 1994.*

[14] HARAUX (A.) and JAFFARD (S.). — Pointwise and spectral control of plate vibrations, *Rev. Mat. Iberoamericana,* **7** (1997), 1-23.

[15] INGHAM (A.E.). — Some trigonometrical inequalities with applications in the theory of series, *Math. Z.*, **41** (1936), 367-369.

[16] KATZNELSON (Y.). — *An introduction to harmonic analysis,* Dover, New York, 1968.

[17] LASIECKA (I.) and TRIGGIANI (R.). — *Control theory for partial differential equations: continuous and approximation theories. II. Abstract hyperbolic-like systems over a finite time horizon.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 75. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[18] LIONS (J.L.) et MAGENES (E.). — *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris, 1968.

[19] REBARBER (R.). — Exponential stability of beams with dissipative joints : a frequency domain approach, *SIAM. J. Control. Optim.*, **33** (1995), 1-28.

[20] RUSSELL (D.L.). — Decay rates for weakly damped systems in Hilbert space obtained with control theoretic methods, *J. Diff. Eq.*, **19** (1975), 344-370.

[21] WEISS (G.). — Transfer functions of regular linear systems, part I: charaterization of regularity, *Trans. Amer. Math. Soc.* **342** (1994), 827-854.