

MARCEL DOSSA

**Solutions  $C^\infty$  d'une classe de problèmes de Cauchy  
quasi-linéaires hyperboliques du second ordre  
sur un conoïde caractéristique**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6<sup>e</sup> série*, tome 11,  
n° 3 (2002), p. 351-376

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_2002\\_6\\_11\\_3\\_351\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_2002_6_11_3_351_0)

© Université Paul Sabatier, 2002, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annaes/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Solutions $C^\infty$ d'une classe de problèmes de Cauchy quasi-linéaires hyperboliques du second ordre sur un conoïde caractéristique<sup>(\*)</sup>

MARCEL DOSSA<sup>(1)</sup>

---

**RÉSUMÉ.** — Nous décrivons un résultat d'existence et de régularité  $C^\infty$  pour le problème de Cauchy associé à une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles hyper quasi-linéaires hyperboliques du second ordre, les données initiales étant portées par un demi-conoïde caractéristique.

**ABSTRACT.** — We describe an existence, uniqueness and  $C^\infty$  smoothness result for the Cauchy problem linked to a class of systems of second order hyperbolic hyper quasi linear partial differential equations, with Cauchy data given on a characteristic conoid.

---

### 1. Introduction

Le résultat qu'on se propose de présenter ici est un résultat d'existence et de régularité  $C^\infty$  portant sur l'étude d'une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles hyper quasi-linéaires hyperboliques du second ordre et pour des données initiales prescrites sur un conoïde caractéristique. Il s'inscrit dans le cadre d'un programme d'études mathématiques portant sur les problèmes de Cauchy caractéristiques non linéaires et dont l'ultime étape serait la résolution sous des hypothèses de différentiabilité minimales sur les données du problème de Cauchy sur un conoïde caractéristique pour les Equations d'Einstein. Ce résultat relativement ancien de [5], malgré son

---

(\*) Reçu le 2 septembre 2002, accepté le 31 décembre 2002

(1) Université de Yaoundé I, Faculté des Sciences, B.P. 812 Yaoundé, Cameroun.  
E-mail : mdossa@uydc.uninet.cm

applicabilité évidente (cf [7], [8], [11], [12], [13]) n'a fait l'objet jusqu'à maintenant d'aucune publication détaillée (en dehors de la brève note [6]). Il nous paraît donc important de combler cette lacune dans le présent travail.

Considérons donc dans le domaine  $Y$  intérieur à un demi-conoïde  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , de sommet 0 et d'équation

$$x^0 = S(x^1, \dots, x^n)$$

le problème de Cauchy pour un système de  $N$  équations aux dérivées partielles ( $E_r$ ) de  $N$  fonctions inconnues ( $w_r$ ) de  $n + 1$  variables réelles  $x^\alpha$  de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} A^{\lambda\mu}(x^\alpha, w_s) D_{\lambda\mu} w_r + f_r(x^\alpha, w_s, D_\nu w_s) = 0 \\ r, s = 1, 2, \dots, N; \alpha, \lambda, \mu, \nu = 0, 1, \dots, n; D_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu}, D_{\lambda\mu} = \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \end{array} \right. \quad (1)$$

de type  $x^0$ -hyperbolique avec  $A^{00} > 0$  et la forme quadratique  $A^{ij} X_i X_j$  définie négative ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), avec des conditions initiales de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_r = \bar{w}_r \text{ sur } \mathcal{C}, \mathcal{C} \text{ étant un demi-conoïde de sommet } 0, \\ \text{caractéristique pour l'opérateur différentiel} \\ A^{\lambda\mu}(x^\alpha, \bar{w}_s(x^\alpha)) D_{\lambda\mu}, \text{ et les données de Cauchy } \bar{w}_r \text{ étant définies} \\ \text{dans un voisinage de } 0 \text{ dans } \mathbb{R}^{n+1} \end{array} \right. \quad (2)$$

Sous des hypothèses de classe  $C^\infty$  sur les données  $(A^{\lambda\mu}, \bar{w}_r, f_r)$ , on se propose de montrer qu'il existe un voisinage ( $Y$ ) de 0 dans  $Y$  dans lequel le problème (1), (2) possède une solution unique ( $w_r$ ) de classe  $C^\infty$  dans ( $Y$ ) (y compris au sommet 0 du conoïde  $\mathcal{C}$ ).

La démonstration de ce résultat reposera sur une combinaison convenable de deux résultats antérieurs dus respectivement à F.G. Friedlander [9] et à F. Cagnac [1].

Le résultat de Friedlander dit, grosso modo, que lorsque les équations ( $E_r$ ) sont *linéaires* et les données sont  $C^\infty$ , le problème (1), (2) possède une solution unique définie et de classe  $C^\infty$  dans  $Y$  (y compris au sommet 0 du conoïde  $\mathcal{C}$ ).

Décrivons maintenant le résultat de Cagnac. Dans [1], sous des hypothèses de différentiabilité finie sur les données  $(A^{\lambda\mu}, \bar{w}_r, f_r)$ , il traite le cas  $n = 3$  du problème de Cauchy (1), (2) en transformant ce problème en un problème à données initiales nulles qu'on peut résoudre à l'aide de la théorie de Leray [10]. Plus précisément, recherchant des solutions du

problème (1), (2) dans l'espace de Sobolev hilbertien classique  $H^{t+1}(Y)$  ( $t \geq 6$ ), F. Cagnac montre d'abord, sous des hypothèses de différentiabilité de classe  $C^{2t}$ ,  $C^{2t-2}$ ,  $C^{2t}$  sur les données  $(A^{\lambda\mu}, f_r, \bar{w}_r)$  et moyennant la condition supplémentaire suivante notée  $(O_t)$  :

« les  $\bar{w}_r$  vérifient au point 0 les équations  $(E_r)$  et toutes les équations dérivées jusqu'à l'ordre  $t - 2$  » que (cf. propositions 3.2, 3.4) :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ la donnée de } w_r|_C = \bar{w}_r|_C \text{ permet de déterminer de façon} \\ \text{unique les fonctions } \psi_r^{(\ell)} \text{ (} 1 \leq \ell \leq t \text{) égales aux restrictions} \\ \text{au conoïde } \mathcal{C} \text{ des dérivées } D_0^\ell w_r \text{ des fonctions inconnues } w_r \\ 2) \text{ le polynôme de Taylor à l'ordre } t \text{ en 0 de la fonction} \\ \text{inconnue } w_r \text{ est égale au polynôme de Taylor d'ordre } t \text{ en 0,} \\ \omega_r^0, \text{ de la donnée de Cauchy } \bar{w}_r. \end{array} \right. \quad (3)$$

Posant alors  $w_r = v_r + \omega_r$ , F. Cagnac introduit de nouvelles fonctions inconnues  $(v_r)$  vérifiant un problème de Cauchy à données nulles ( $D_0^\ell v_r = 0$  sur  $\mathcal{C}$  ( $0 \leq \ell \leq t$ )), qu'on peut résoudre dans  $H^{t+1}(Y)$  à l'aide de la théorie de Leray ; cela impose aux fonctions  $(\omega_r)$  de vérifier les conditions :

$$\omega_r \in H^{t+2}(Y); D_0^\ell \omega_r = \psi_r^{(\ell)} \text{ sur } \mathcal{C} \text{ (} 0 \leq \ell \leq t \text{)}.$$

Tenant compte de (3), F. Cagnac construit finalement sous la condition  $(O_t)$  et les hypothèses de différentiabilité de classe respective  $C^{3t+2}$ ,  $C^{3t}$ ,  $C^{3t+2}$  ( $t \geq 6$ ) sur les données  $(A^{\lambda\mu}, f_r, \bar{w}_r)$ , les  $(\omega_r)$  sous la forme :

$$\begin{aligned} \omega_r(x^0, x^1, x^2, x^3) &= \omega_r^0(x^0, x^1, x^2, x^3) \\ &+ \sum_{k=0}^t (x^0 - S(x^1, x^2, x^3))^k \sigma_r^{(k)} \\ &+ (x^0 - S(x^1, x^2, x^3))^{t+1} R_r \end{aligned}$$

$$\text{où : } \sigma_r^{(k)}(x^1, x^2, x^3) = \psi_r^{(k)}(x^1, x^2, x^3) - D_0^k \omega_r^0(S(x^i), x^1, x^2, x^3),$$

le facteur  $R_r$  du reste étant choisi de façon que, malgré le point singulier 0, sommet du conoïde  $\mathcal{C}$ ,  $\omega_r$  appartienne à  $H^{t+2}$ .

Utilisant les résultats de [1] et [9] décrits ci-dessus, notre méthode de solution du problème (1), (2) consiste, dans un premier temps, à construire, sous la seule hypothèse que les données  $(A^{\lambda\mu}, f_r, \bar{w}_r)$  sont de classe  $C^\infty$ , une nouvelle donnée initiale  $(\tilde{w}_r)$  de classe  $C^\infty$ , telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \tilde{w}_r|_C = \bar{w}_r|_C \\ \cdot (\tilde{w}_r) \text{ vérifient au point 0 les équations } (E_r) \\ \text{et les équations dérivées de tout ordre.} \end{array} \right.$$

On en déduit d'après [1] :

- $$\left\{ \begin{array}{l} (i) \text{ la détermination unique des fonctions } \psi_r^{(\ell)} \ (\ell \in \mathbb{N}) \text{ égales} \\ \text{aux restrictions au conoïde } \mathcal{C} \text{ des dérivées } D_0^\ell w_r \\ \text{des fonctions inconnues } w_r \\ \\ (ii) \text{ la coïncidence de la série de Taylor au point } 0 \text{ de } \tilde{w}_r \\ \text{avec celle au point } 0 \text{ de la fonction inconnue } w_r \end{array} \right.$$

Comme dans [1], on pose ensuite

$$w_r = v_r + \omega_r$$

et on transforme le problème (1), (2), en un problème (★) d'inconnues  $(v_r)$  à données initiales nulles sur  $\mathcal{C}$  :

$$D_0^\ell v_r = 0 \text{ sur } \mathcal{C} \ \forall \ell \in \mathbb{N} \tag{4}$$

Comme dans [12], en utilisant un argument de domaine de dépendance de solution de systèmes hyperboliques, on réduit le problème (★) en un problème de Cauchy ordinaire à donnée initiales nulles portées par l'hyper-surface spatiale d'équation  $x^0 = 0$  qu'on peut résoudre à l'aide de méthodes classiques (cf. [4], [10], [3]).

Cela impose aux fonctions auxiliaires  $\omega_r$  de vérifier, vu (3) :

$$D_0^\ell \omega_r |_{\mathcal{C}} = \psi_r^{(\ell)} \ \forall \ell \in \mathbb{N} \tag{5}$$

On choisit les  $\omega_r$  sous la forme :

$$\omega_r = \tilde{w}_r + \omega_r^1 \tag{6}$$

Les  $\omega_r^1$  sont alors astreintes aux conditions :

$$D_0^\ell \omega_r^1 |_{\mathcal{C}} = \sigma^{(\ell)} \equiv \psi_r^{(\ell)} - D_0^\ell \tilde{w}_r |_{\mathcal{C}} \ \forall \ell \in \mathbb{N}$$

Leur construction se fait au moyen d'une variante du lemme classique de Borel (cf. proposition 2.8).

### Le plan du travail est :

2. Quelques préliminaires techniques pour les chapitres suivants.

2.1 Notations, définitions, hypothèses.

Solutions  $C^\infty$  d'une classe de problèmes de Cauchy quasi-linéaires hyperboliques

2.2 Représentation paramétrique des conoïdes caractéristiques  $\mathcal{C}$  déterminés par les données  $(A^{\lambda\mu}, \bar{w}_r)$ .

2.3 Le résultat d'existence  $C^\infty$  de F.G. Friedlander [9].

2.4 Quelques variantes du lemme classique de Borel.

3. Détermination des restrictions au demi-conoïde  $\mathcal{C}$  des dérivées successives de la solution  $(w_r)$  du problème (1), (2).

3.1 Quelques résultats utiles de [1].

3.2 Quelques notations et définitions.

3.3 Les résultats obtenus.

4. Résolution du problème de Cauchy (1), (2).

## 2. Quelques préliminaires techniques pour les chapitres suivants

### 2.1. Notations, définitions, hypothèses

HYPOTHÈSE  $\alpha_p$  ( $p \geq 2$ )

Les  $A^{\lambda\mu}(x^\alpha, w_s)$  sont définies et de classe  $C^p$  dans un domaine  $U \times W$  où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^{n+1}$  contenant 0, où  $W$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ .

Dans  $U \times W$  les  $A^{\lambda\mu}(x^\alpha, w_s)$  définissent une forme quadratique définie de signature  $+$  - ... - ;  $A^{00} > 0$ ,  $A^{ij}X_iX_j$  définie  $< 0$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ).

Il existe un point  $(a_r) \in W$  tel que :

$$A^{00}(0; a_r) = 1, \quad A^{0i}(0; a_r) = 0, \quad A^{ij}(0; a_r) = -\delta_j^i$$

(à un changement de variables linéaires près, ces dernières hypothèses sont toujours vérifiées).

HYPOTHÈSE  $\beta_p$  ( $p \geq 0$ )

Les fonctions  $f_r(x^\alpha, w_s, w_{s\nu})$  sont définies et de classe  $C^p$  dans un domaine  $U \times W \times W'$  où  $W'$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^{(n+1)N}$  ; si  $p = 0$ , les  $f_r$  sont lipschitziennes par rapport aux  $w_{s\nu}$ .

HYPOTHÈSE  $\gamma_p$  ( $p \geq 2$ )

Les  $\bar{w}_r$  sont des applications de  $U$  dans  $W$  de classe  $C^p$  et telles que :  $\bar{w}_r(o) = a_r$ , le point  $(a_{r\lambda}) = (D_\lambda \bar{w}_r(0)) \in W'$ .

*Notation.* — On note respectivement  $A^{(\ell)}$ ,  $a^{(\ell)}$ ,  $f^{(\ell)}$  l'ensemble des dérivées jusqu'à l'ordre  $\ell$  par rapport à toutes leurs variables des fonctions respectives  $A^{\lambda\mu}$ ,  $\bar{w}_r$ ,  $f_r$  aux points respectifs  $(0; a_r)$ ,  $0$ ,  $(0; a_r; a_{r\lambda})$ .

**2.2. Représentation paramétrique des conoïdes caractéristiques  $\mathcal{C}$  déterminés par les données  $(A^{\lambda\mu}, \bar{w}_r)$ .**

DÉFINITION 2.1. — Une hypersurface  $(\Sigma)$  de  $U (\subset \mathbb{R}^{n+1})$  d'équation :

$$x^0 = S(x^1, \dots, x^n)$$

est dite caractéristique relativement à l'opérateur différentiel  $A^{\lambda\mu}(x^\alpha, \bar{w}_r)$   $D_{\lambda\mu}$  si  $S$  est solution de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :

$$A^{00} + 2A^{0i}q_i + A^{ij}q_iq_j = 0 \quad (q_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i}, \quad i, j = 1, \dots, n) \quad (7)$$

les  $A^{\lambda\mu}$  étant pris pour les arguments

$$x^0 = S(x^1, \dots, x^n) \text{ et } w_s = \bar{w}_s(S(x^i), x^i) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Une hypersurface caractéristique est engendrée par des bicaractéristiques. Les bicaractéristiques passant par  $0$  admettent des représentations paramétriques  $x^\alpha(\lambda_1, q_i^0)$ , projections sur  $U$ , des bandes caractéristiques de (7), qui sont solutions du système intégral :

$$\begin{cases} x^\alpha(\lambda_1, q_i^0) = \int_0^{\lambda_1} T^\alpha(x^\mu, q_j)d\lambda_1 \\ q_i(\lambda_1, q_i^0) = q_i^0 + \int_0^{\lambda_1} R_i(x^\mu, q_j)d\lambda_1 \end{cases} \quad (8)$$

où :

$$\begin{cases} T^\alpha(x^\mu, q_j) = A^{\alpha 0} + A^{\alpha j}q_j, \quad R_i(x^\mu, q_j) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial F}{\partial x^i} - q_i \frac{\partial F}{\partial x^0} \right] \\ F(x^\alpha, q_j) = A^{00} + 2A^{0i}q_i + A^{ij}q_iq_j \\ \text{les } A^{\lambda\mu} \text{ étant pris pour les arguments } w_s = \bar{w}_s(x^\alpha) \\ \text{les } q_i^0 \text{ étant choisis de façon que :} \end{cases} \quad (9)$$

$$F(x^\alpha, q_i^0) = 0 \quad (10)$$

On appelle demi-conoïde caractéristique de sommet  $0$  déterminé par les données  $(A^{\lambda\mu}, \bar{w}_r)$ , la réunion  $\mathcal{C}$  des bicaractéristiques issues du point  $0$  ( $\lambda_1 \geq 0$ ).

Sous les hypothèses  $(\alpha_p, \gamma_p)$  ( $p \geq 2$ ) sur les données  $(A^{\lambda\mu}, \bar{w}_r)$ , il existe un voisinage  $(\mathcal{C})$  du point 0 dans  $\mathcal{C}$ , qui admet une représentation par une équation

$$x^0 = S(x^1, \dots, x^n) \quad (11)$$

où  $S$  vérifie les propriétés suivantes :

- $S$  est définie et continue dans un voisinage  $\mathcal{D}$  de 0 dans  $\mathbb{R}^n$
- $S$  est de classe  $C^p$  dans  $\mathcal{D} - \{0\}$  et  $\frac{\partial S}{\partial x^i} = -q_i$
- $S$  admet un développement limité en *f.r.h* de  $x^i, s$  (fractions rationnelles homogènes en  $x^i, s$  de dénominateur  $s^\ell$ ) de la forme :

$$S(x^i) = s + \sum_{k=2}^{p+1} S_k + o(s^{p+1}) \quad (12)$$

où  $S_k$  est une fonction *universelle* des arguments  $x^i, s, A^{(k-1)}, a^{(k-1)}$ , *f.r.h* de degré  $k$  en  $x^i, s$  et polynomes en  $A^{(k-1)}, a^{(k-1)}$ .

Les dérivées de  $S$  admettent aussi des développements en *f.r.h* de  $x^i, s$  dont les parties régulières s'obtiennent à partir de (12) par dérivation terme à terme.

*Notations géométriques*

$$Y = \{(x^\alpha) \in U / S(x^i) \leq x^0\}, Y_T = Y \cap \{x^0 \leq T\}, \mathcal{C}_T = \mathcal{C} \cap \{x^0 \leq T\}$$

$\mathfrak{D}$  = projection sur l'espace des  $(x^i)$  de  $\mathcal{C}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

$\mathfrak{D}_T$  = projection sur l'espace des  $(x^i)$  de  $\mathcal{C}_T$ .

### 2.3. Le résultat d'existence $C^\infty$ de F.G. Friedlander [9].

Dans ce paragraphe, on va rappeler un résultat de F.G. Friedlander [9], qui servira dans la suite. Il s'agit d'un théorème d'existence relatif au problème de Cauchy linéaire hyperbolique du second ordre avec des données  $C^\infty$  sur un cône caractéristique. Mais auparavant, on va introduire quelques notations et définitions utiles pour la formulation de ce résultat.

Dans tout ce paragraphe, on considère un espace-temps  $(M, g)$  constitué d'une variété  $C^\infty$   $M$  de dimension  $n+1$ , munie d'une métrique  $g$  de signature  $(+ - \dots -)$ . On notera  $\nabla$  la dérivation covariante dans la métrique  $g$ .

**DÉFINITION 2.2.** — On appelle *domaine géodésiquement convexe* de  $(M, g)$  tout ouvert connexe  $\Omega_0$  de  $M$  tel que deux points quelconques  $p$  et  $q$  de  $\Omega_0$  sont reliés par une unique géodésique entièrement contenue dans  $\Omega_0$ .

**DÉFINITION 2.3.** — Soit  $\Omega_0$  un domaine géodésiquement convexe de  $(M, g)$ .

Soit  $q$  un point de  $\Omega_0$ . On appelle *demi-conoïde isotrope futur* issu de  $q$  et on note  $C^+(q)$  l'ensemble de tous les points  $p \in \Omega_0$  qui peuvent être atteints par des géodésiques isotropes, orientées vers le futur et issues du point  $q$ .

On appelle *demi-conoïde isotrope passé* et aboutissant à  $q$  et on note  $C^-(q)$  l'ensemble de tous les points  $p \in \Omega_0$  qui peuvent être atteints par des géodésiques isotropes, orientées vers le passé et aboutissant au point  $q$ .

On appelle *domaine de dépendance futur*  $D^+(q)$  l'ensemble de tous les points  $p \in \Omega_0$  qui peuvent être atteints par des géodésiques temporelles, orientées vers le futur et issues du point  $q$ .

On appelle *domaine de dépendance passé*  $D^-(q)$  l'ensemble de tous les points  $p \in \Omega_0$  qui peuvent être atteints par des géodésiques temporelles, orientées vers le passé et aboutissant au point  $q$ .

On appelle *émission futur* de  $q$  et on note  $J^+(q)$  la fermeture de  $D^+(q)$  dans  $\Omega_0$  :  $J^+(q) = \overline{D^+(q)}$ .

On appelle *émission passée* de  $q$  et on note  $J^-(q)$  la fermeture de  $D^-(q)$  dans  $\Omega_0$  :  $J^-(q) = \overline{D^-(q)}$ .

Un ouvert connexe  $\Omega$  de  $(M, g)$  sera appelé un *domaine causal* si :

- (i) : il existe un domaine géodésiquement convexe  $\Omega_0$  de  $(M, g)$  tel que  $\Omega \subset \Omega_0$ .
- (ii) : pour tout couple  $(p, q) \in \Omega^2$ ,  $J^+(q) \cap J^-(p)$  est un sous-ensemble compact ou vide de  $\Omega$ .

**PROPOSITION 2.4** (cf. théorème 4-4-1, page 147, de [9]). — Tout point d'un espace-temps  $(M, g)$  possède un voisinage qui est un domaine causal.

**PROPOSITION 2.5** (cf. théorème 5-4-2, page 194, de [9] et aussi Chapitre 6 de [9]). — Soit  $\Omega$  un domaine causal de  $(M, g)$ .

Soit  $p_0$  un point de  $\Omega$ .

Soient :

- .  $B$  un champ de vecteurs  $C^\infty$  sur  $\Omega$
- .  $C, u_0, f$  des fonctions  $C^\infty$  sur  $\Omega$

Alors :

- (i) : il existe une unique fonction  $u$  telle que :
- .  $u \in C^\infty(J^+(p_0))$
  - . (E) :  $g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta u + B^\alpha \nabla_\alpha u + C.u = f$  dans  $D^+(p_0)$
  - .  $u = u_0$  sur  $C^+(p_0)$ .
- (ii) : comme  $J^+(p_0) = \overline{D^+(q)}$ ,  $u$  vérifie donc au point  $p_0$ , sommet du demi-conoïde  $C^+(p_0)$ , l'équation (E) et toutes les équations dérivées de tout ordre.

*Remarque 2.6.* — L'examen de la démonstration de la proposition 2.5 telle qu'elle est exposée dans [9], montre qu'en fait,  $u$  est définie et de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega$  tout entier.

## 2.4. Quelques variantes du lemme classique de Borel.

PROPOSITION 2.7. — *Lemme de Borel généralisé*

Soit  $n$  un entier  $\geq 0$ .

Soit  $(\mathbf{a}_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}}$  une famille de nombres complexes.

Alors il existe une fonction  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$  telle que,  $D^\alpha f(0) = \mathbf{a}_\alpha$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$ .

PROPOSITION 2.8. — Soit  $(\sigma_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$  une suite de fonction  $C^\infty$  sur  $\mathcal{D}_T$ , nulles au point 0 ainsi que toutes leurs dérivées de tout ordre. Soit  $\theta$  une fonction  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , à support compact, telle que

$$\theta(t) = 1 \text{ pour } |t| \leq \frac{1}{2} \text{ et } \theta(t) = 0 \text{ pour } |t| \geq 1.$$

Alors il existe une suite  $(k_\ell)$  d'entiers naturels croissant suffisamment vite de façon que

$$v(x^0, x^i) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} \sigma_\ell(x^i) (x^0 - S(x^i))^\ell \theta [k_\ell (x^0 - S(x^i))]$$

soit une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega_T = [0, T[ \times \mathcal{D}_T$  telle que :  $\frac{\partial^\ell v}{(\partial x^0)^\ell} |_{C_T} = \sigma_\ell \forall \ell \in \mathbb{N}$ .

De, plus  $\forall \beta \in \mathbb{N}^{n+1}$ , on a  $D^\beta v(0) = 0$ .

*Remarque 2.9.* — La proposition 2.8 est une variante du lemme classique de Borel.

*Preuve de la proposition 2.8.* — Soit  $(k_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$  une suite d'entiers naturels.  $\forall \ell \in \mathbb{N}$ , soit  $v_\ell$  la fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega_T = [0, T] \times \mathfrak{D}_T$  définie par :

$$v_\ell(x^0, x^i) = \frac{1}{\ell!} \sigma_\ell(x^i) (x^0 - S(x^i))^\ell \theta [k_\ell (x^0 - S(x^i))] \quad (13)$$

On se propose de montrer que si on prend la suite  $(k_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$  croissant suffisamment vite et tendant vers l'infini, alors la série  $\sum_{\ell=0}^{+\infty} v_\ell$  définit une fonction  $v$  de classe  $C^\infty$  telle que :

$$\frac{\partial^\ell v}{(\partial x^0)^\ell} |_{C_T} = \sigma_\ell \quad \forall \ell \in \mathbb{N}.$$

Montrons d'abord qu'il existe une suite  $(k_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$  d'entiers naturels telle que pour tout  $\ell$  et tout multi-indice  $\beta$  de longueur  $\leq \ell - 1$ , on a :

$$\text{Sup}_{x \in \Omega_T} |D^\beta v_\ell(x)| \leq 2^{-\ell} \quad (14)$$

En effet, pour tout multi-indice  $\beta$  de longueur  $\leq \ell - 1$  on a, grâce à la formule de Leibniz :

$$D^\beta v_\ell(x) = \frac{1}{\ell!} \sum_{\delta \leq \beta} \sum_{\delta' \leq \beta - \delta} \mathbf{C}_\beta^\delta \mathbf{C}_{\beta - \delta}^{\delta'} D^\delta \sigma_\ell D^{\delta'} u_\ell D^{\beta - \delta - \delta'} w_\ell \quad (15)$$

avec :

$$u_\ell(x) = (x^0 - S(x^i))^\ell \quad \text{et} \quad w_\ell(x) = \theta [k_\ell (x^0 - S(x^i))] \quad (16)$$

Pour tout  $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$  posons  $\hat{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{N}^n$ ; on a alors :

$$D^{\delta'} u_\ell(x) = \sum_{\substack{t_1 + \dots + t_p = \hat{\delta}' \\ 0 \leq p \leq |\hat{\delta}'|}} \frac{\ell!}{(\ell - \delta'_0 - p)!} u_{\ell - \delta'_0 - p}(x) (-1)^p D^{t_1} S \dots D^{t_p} S \quad (17)$$

$$\begin{aligned} D^{\beta - \delta - \delta'} w_\ell(x) &= \sum_{\substack{t_1 + \dots + t_r = \hat{\beta} - \hat{\delta} - \hat{\delta}' \\ 0 \leq r \leq |\hat{\beta}| - |\hat{\delta}| - |\hat{\delta}'|}} \theta^{(\beta_0 - \delta_0 - \delta'_0 + r)} [k_\ell (x^0 - S(x^i))] k_\ell^{\beta_0 - \delta_0 - \delta'_0 + r} \\ &\quad \times (-1)^r D^{t_1} S \dots D^{t_r} S \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{Posons } K_{|\beta|} = \text{Sup}_{\substack{0 \leq k \leq |\beta| \\ \mathbb{R}}} |\theta^{(k)}(t)|.$$

Solutions  $C^\infty$  d'une classe de problèmes de Cauchy quasi-linéaires hyperboliques

D'autre part on peut associer à tout  $t_k \in \mathbb{N}^n$  une constante  $K_{t_k} > 0$  indépendante de  $k_\ell$  et  $x$ , telle que :

$$|D^{t_k} S| \leq K_{t_k} s^{-|t_k|+1} \text{ sur } \mathfrak{D}_T \quad (19)$$

De plus on a :

$$\theta [k_\ell (x^0 - S(x^i))] = 0 \text{ si } k_\ell |x^0 - S(x^i)| \geq 1 \quad (20)$$

on déduit alors de (15),(16),(17),(18),(19) et (20) :

$$|D^\beta v_\ell(x)| \leq \frac{K_{|\beta|}}{\ell!} \sum_{\substack{0 \leq p \leq |\delta'| \\ 0 \leq r \leq |\beta - \delta - \delta'| \\ \delta' \leq \beta - \delta, \delta \leq \beta}} \frac{\ell!}{(\ell - \delta'_0 - p)!} \mathbf{C}_\beta^\delta \mathbf{C}_{\beta-\delta}^{\delta'} |D^\delta \sigma_\ell| \frac{k_\ell^{\beta_0 - \delta_0 - \delta'_0 + r}}{k_\ell^{\ell - \delta'_0 - p}} \\ \times M_{\hat{\delta}}, M_{\hat{\beta} - \hat{\delta} - \hat{\delta}'} s^{-|\hat{\beta}| + |\hat{\delta}| + p + r} \quad (21)$$

avec :

$$M_{\hat{\delta}'} = \sum_{\substack{t_1 + \dots + t_p = \hat{\delta}' \\ 0 \leq p \leq |\hat{\delta}'|}} \prod_{i=1}^p K_{t_i}, \text{ etc...}$$

$$\text{Posons : } M_\ell = \sup_{|\beta'| \leq \ell - 1} M_{\beta'}$$

(21) entraîne alors :

$$|D^\beta v_\ell(x)| \leq K_{|\beta|} M_\ell^2 \sum_{\substack{0 \leq p \leq |\delta'| \\ 0 \leq r \leq |\beta - \delta - \delta'| \\ \delta' \leq \beta - \delta, \delta \leq \beta}} \frac{1}{(\ell - \delta'_0 - p)!} \mathbf{C}_\beta^\delta \mathbf{C}_{\beta-\delta}^{\delta'} |D^\delta \sigma_\ell| \frac{1}{k_\ell^{\ell - \beta_0 + \delta_0 - p - r}} \\ \times s^{-|\hat{\beta}| + |\hat{\delta}| + p + r} \quad (22)$$

or on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C}_\beta^\delta \leq \beta! \leq (\ell - 1)! \\ \mathbf{C}_{\beta-\delta}^{\delta'} \leq (\beta - \delta)! \leq (\ell - 1)! \end{array} \right. \quad (23)$$

$$\frac{1}{(\ell - \delta'_0 - p)!} \leq 1 \quad (24)$$

$$\frac{1}{k_\ell^{\ell - \beta_0 + \delta_0 - p - r}} \leq \frac{1}{k_\ell} \text{ si } k_\ell \geq 1 \text{ car} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
 \ell - \beta_0 + \delta_0 - p - r &\geq \ell - \beta_0 + \delta_0 - \left| \hat{\delta} \right| - \left| \hat{\beta} \right| + \left| \hat{\delta} \right| + \left| \hat{\delta}' \right| \\
 &= \ell - \beta_0 + \delta_0 - \left| \hat{\beta} \right| + \left| \hat{\delta}' \right| \\
 &\geq \ell - |\beta| + \delta_0 + \left| \hat{\delta}' \right| \geq \ell - |\beta| \geq 1
 \end{aligned}$$

Posons :  $\|\sigma_\ell\|_{K^{\ell-1}(C_T)} = \underset{\substack{x \in \mathcal{D}_T \\ k+|\beta| \leq \ell-1}}{\text{Sup}} s^{-k} |D^\beta \sigma_\ell(x)|$

on a :

$$s^{-|\hat{\beta}|+|\hat{\delta}|+p+r} \left| D^{\hat{\delta}} \sigma_\ell \right| \leq \|\sigma_\ell\|_{K^{\ell-1}(C_T)} \text{ sur } \mathcal{D}_T \text{ car} \quad (26)$$

$$\left( \left| \hat{\beta} \right| - \left| \hat{\delta} \right| - p - r \right) + \left| \hat{\delta} \right| = \left| \hat{\beta} \right| - p - r \leq \left| \hat{\beta} \right| \leq |\beta| \leq \ell - 1$$

Posons :

$$A_\ell = \sum_{|\beta| \leq \ell-1} \sum_{\delta \leq \beta} \sum_{\delta' \leq \beta - \delta} \sum_{\substack{0 \leq p \leq |\delta'|, 0 \leq r \leq |\hat{\beta}| - |\delta| - |\delta'|}} 1 \quad (27)$$

Alors en substituant (23),(24),(25),(26) et (27) dans (22) on obtient si  $\ell \geq 1$  :

$$\left| D^\beta v_\ell(x) \right| \leq K_{|\beta|} \frac{1}{k_\ell} M_\ell^2 A_\ell [(\ell - 1)!]^2 \|\sigma_\ell\|_{K^{\ell-1}(C_T)} \text{ si } k_\ell \geq 1 \quad (28)$$

Si l'on choisit alors  $k_\ell$  de façon que :

$$k_\ell \geq \max \left\{ 1, 2^\ell K_{\ell-1} M_\ell^2 A_\ell [(\ell - 1)!]^2 \|\sigma_\ell\|_{K^{\ell-1}(C_T)} \right\} \quad (29)$$

On a :

$$\underset{x \in \Omega_T}{\text{Sup}} \left| D^\beta v_\ell(x) \right| \leq 2^{-\ell}, \forall \beta \text{ avec } |\beta| \leq \ell - 1 \quad (30)$$

La série  $\sum_{\ell=0}^{+\infty} v_\ell(x)$  est alors normalement convergente et définit une fonction continue

$$v(x) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} v_\ell(x).$$

Solutions  $C^\infty$  d'une classe de problèmes de Cauchy quasi-linéaires hyperboliques

De plus, si  $\beta \in \mathbb{N}^{n+1}$ , la série  $\sum_{\ell=0}^{+\infty} D^\beta v_\ell(x)$  est normalement convergente sur  $\Omega_T$  car :

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty} D^\beta v_\ell(x) = \sum_{\ell=0}^{|\beta|} D^\beta v_\ell(x) + \sum_{\ell=|\beta|+1}^{+\infty} D^\beta v_\ell(x) \quad (31)$$

La deuxième somme du membre de droite de (31) est normalement convergente sur  $\Omega_T$  d'après (30).

Donc  $v$  est  $C^\infty$  sur  $\Omega_T$  et  $\forall \beta \in \mathbb{N}^{n+1}$  on a :  $D^\beta v(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} D^\beta v_m(x)$

En particulier pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$  on a :  $D_0^\ell v(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} D_0^\ell v_m(x)$

Or on a pour tout  $m \in \mathbb{N}$

$$D_0^\ell v_m(x) = \frac{1}{m!} \sigma_m(x^i) \sum_{r=0}^{\ell} C_\ell^r \frac{m!}{(m-r)!} (x^0 - S(x^i))^{m-r} k_m^{\ell-r} \theta^{(\ell-r)} [k_m (x^0 - S(x^i))]$$

Comme  $\theta(t) = 1$  pour  $|t| \leq \frac{1}{2}$  on a :

$$\theta^{(\ell-r)} [k_m (x^0 - S(x^i))] = 0 \text{ si } x^0 - S(x^i) = 0 \text{ et } \ell - r > 0$$

donc :

$$\begin{aligned} D_0^\ell v_m(x) |_{c_T} &= \frac{1}{m!} \sigma_m(x^i) \frac{m!}{(m-\ell)!} (x^0 - S(x^i))^{m-\ell} \Big|_{c_T} \\ &= \sigma_m(x^i) \frac{1}{(m-\ell)!} (x^0 - S(x^i))^{m-\ell} \Big|_{c_T} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq \ell \\ \sigma_m(x^i) & \text{si } m = \ell \end{cases} \end{aligned}$$

Donc  $\forall \ell \in \mathbb{N}$  on a :  $D_0^\ell v(x) |_{c_T} = \sigma_\ell(x^i)$ .

De plus  $\forall \beta \in \mathbb{N}^{n+1}$  on a :  $D^\beta v(0) = \sum_{m=0}^{+\infty} D^\beta v_m(0) = \sum_{m=0}^{+\infty} 0 = 0 \quad \square$

**3. Détermination des restrictions au demi-conoïde  $C$  des dérivées successives de la solution  $(w_r)$  du problème de Cauchy caractéristique**

$$\left\{ \begin{array}{l} A^{\lambda\mu}(x^\alpha, w_s)D_{\lambda\mu}w_r + f_r(x^\alpha, w_s, D_\nu w_s) = 0 \quad (E_r) \\ w_r = \bar{w}_r \text{ sur } C \end{array} \right.$$

A propos de ce problème, F. Cagnac a établi les résultats suivants :

**3.1. Rappels de quelques résultats utiles de [1]**

**PROPOSITION 3.1** (cf. [1], pages 26, 27, et 28). — *Si les  $A^{\lambda\mu}$ ,  $f_r$ ,  $\bar{w}_r$  vérifient les hypothèses  $\alpha_2$ ,  $\beta_0$ ,  $\gamma_2$ , il existe un domaine  $(C') \subset (C)$ , voisinage de 0 dans  $C$ , sur lequel sont déterminées de façon unique les dérivées  $D_0w_r$  des fonctions  $w_r$*

- *qui sur  $(C')$  prennent les valeurs  $[\bar{w}_r]$*
- *qui sur  $(C') - \{0\}$  ont des dérivées premières continues et bornées, des dérivées secondes continues, et vérifient les équations  $(E_r)$ .*

*Si l'on pose  $\chi_r = [D_0w_r]$  la restriction de  $D_0w_r$  à  $(C')$ , les fonctions  $\chi_r$  sont de classe  $C^0$  sur  $(C') - \{0\}$  ; les  $\chi_r$  admettent des développements limités au voisinage de 0, en  $\lambda_1$ , ou en f.r.h de  $x^i$ , s jusqu'à l'ordre 1 ; la partie régulière du développement limité de  $\chi_r$  coïncide avec celle  $[D_0\bar{w}_r]$  à l'ordre 0 :  $\chi_r(0) = D_0\bar{w}_r(0)$ .*

**PROPOSITION 3.2** (cf. [1], pages 31-32)

*I) Si les  $A^{\lambda\mu}$ ,  $f_r$ ,  $\bar{w}_r$ , vérifient les hypothèses  $\alpha_p$ ,  $\beta_{p-2}$ ,  $\gamma_p$  ( $p \geq 2$ ), Si les  $A^{(q-3)}$ ,  $f^{(q-3)}$ ,  $a^{(q-1)}$ , ( $2q \leq p$ ) vérifient au point 0 les équations  $(E_r)$  et toutes les équations dérivées jusqu'à l'ordre  $q - 3$ ,*

*alors sont déterminées de façon unique sur  $(C')$ , les dérivées jusqu'à l'ordre  $q$  des fonctions  $w_r$  telles que :*

- *les  $w_r$  sont définies dans un voisinage de  $(C')$  ou dans un domaine ayant  $(C')$  pour frontière.*
- *dans ce domaine les  $w_r$  ont des dérivées jusqu'à l'ordre  $q + 1$  qui sont des fonctions localement sommables et y vérifient les équations  $(E_r)$ .*
- *Sur  $(C') - \{0\}$ , elles ont des dérivées jusqu'à l'ordre  $q$  qui sont bornées.*
- *Sur  $(C')$  elles prennent les valeurs  $\varphi_r = \bar{w}_r|_C$ .*

Si l'on pose  $\psi_r^{(\ell)} = [D_0^\ell w_r]$ , restriction de  $D_0^\ell w_r$  à  $(C')$   $1 \leq \ell \leq q$ , les fonctions  $\psi_r^{(\ell)}$  sont de classe  $C^{p-2\ell}$  sur  $(C') - \{0\}$  :

- les  $\psi_r^{(\ell)}$  admettent des développements limités au voisinage de 0 en  $\lambda_1$ , ou en f.r.h de  $x^i$ ,  $s$  jusqu'à l'ordre  $p - \ell$ , et leurs dérivées admettent les développements limités dérivés ;
- la partie régulière du développement limité de  $\psi_r^{(\ell)}$  coïncide avec celle de  $[D_0^\ell \bar{w}_r]$  jusqu'à l'ordre  $q - 1 - \ell$ .

II) Si en outre pour  $q \leq r' \leq p$ , les  $A^{(r'-2)}$ ,  $f^{(r'-2)}$ ,  $a^{(r')}$ , vérifient au point 0 les équations dérivées des  $(E_r)$  jusqu'à l'ordre  $r' - 2$ , alors il y'a coïncidence des développements limités de  $\psi_r^{(\ell)}$  et de  $[D_0^\ell \bar{w}_r]$  jusqu'à l'ordre  $r' - \ell$ .

*Remarque 3.3.* — Dans [1], les propositions 3.1 et 3.2 ont été, en fait, énoncées sous les conditions plus restrictives  $n = 3$ ,  $r' = q$  ; mais leurs démonstrations, dans [1], montrent qu'elles sont aussi vraies dans le cas plus général  $n \geq 1$ ,  $r' \leq p$ .

**PROPOSITION 3.4** (cf. [1], page 36). — *Sous les hypothèses de la partie I de la proposition précédente, si des fonctions  $w_r$  sont telles que*

- elles sont définies dans un voisinage de  $(C)$  ou dans un domaine ayant  $(C)$  pour frontière,
- Sur  $(C)$  elles prennent les valeurs  $[\bar{w}_r]$ ,
- Sur  $(C) - \{0\}$  elles ont des dérivées jusqu'à l'ordre  $q + 1$  localement sommables, et telles que :  $[D_0^\ell w_r] = \psi_r^{(\ell)}$ ,  $1 \leq \ell \leq q$

Alors sur  $(C) - \{0\}$ , les fonctions  $w_r$  vérifient les équations  $(E_r)$  et les équations dérivées par rapport à  $x^0$  jusqu'à l'ordre  $q - 1$ .

On se propose de montrer, dans la suite de ce Chapitre que les conditions de type algébrique qu'on a dû imposer dans les deux propositions précédentes aux  $A^{(q-3)}$ ,  $f^{(q-3)}$ ,  $a^{(q-1)}$ , ne sont pas nécessaires pour la détermination des  $\psi_r^{(\ell)}$ , ( $1 \leq \ell \leq q$ ).

### 3.2. Quelques notations et définitions

Soit  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 2$ . Considérons des données  $(A^{\lambda\mu}, f_r, \bar{w}_r)$  vérifiant les hypothèses  $\alpha_p, \beta_{p-2}, \gamma_p$ .

On note :

- $A_{(p)}^{\lambda\mu}$  = le polynôme de Taylor d'ordre  $p$  de  $A^{\lambda\mu}$  au point  $(0, a_r)$ .
- $f_{r,(p)}$  = le polynôme de Taylor d'ordre  $p - 2$  de  $f_r$  au point  $(0, a_r, a_{s\nu})$ .
- ${}^{(p)}\bar{w}_r$  = le polynôme de Taylor d'ordre  $p$  de  $\bar{w}_r$  au point 0.

On notera aussi :  $A_{(\infty)}^{\lambda\mu} = A^{\lambda\mu}$ ;  $f_{r,(\infty)} = f_r$ ;  ${}^{(\infty)}\bar{w}_r = \bar{w}_r$ .

Il découle des hypothèses  $(\alpha_p)$  et  $(\gamma_p)$  que :

$$A_{(p)}^{\lambda\mu} \left( 0, {}^{(p)}\bar{w}_r(0) \right) = A_{(p)}^{\lambda\mu} (0, \bar{w}_r(0)) = \eta^{\lambda\mu}$$

où  $(\eta^{\lambda\mu})$  est la métrique de Minkowski sur  $\mathbb{R}^{n+1}$  :

$$\eta^{00} = 1, \eta^{0i} = 0, \eta^{ij} = -\delta^{ij}$$

on en déduit que la métrique  $C^\infty(A_{(p)}^{\lambda\mu} (x^\alpha, {}^{(p)}\bar{w}_r(x^\alpha)))$  hyperbolique au point 0, est aussi hyperbolique dans un voisinage  $\mathcal{D}$  de 0 dans  $U$ .

On notera  ${}^{(p)}\mathcal{C}$  le demi-conoïde de sommet 0, orienté vers les  $x^0 \geq 0$ , caractéristique par rapport à l'opérateur différentiel  $A_{(p)}^{\lambda\mu} (x^\alpha, {}^{(p)}\bar{w}_r(x^\alpha)) D_{\lambda\mu}$ .

D'après les résultats du Chapitre 2, le demi-conoïde  ${}^{(p)}\mathcal{C}$  de sommet 0 admet une représentation paramétrique de la forme :

$$x^0 = {}^{(p)}S(x^i)$$

où :

- .  ${}^{(p)}S$  est définie et continue dans un voisinage  ${}^{(p)}\mathcal{D}$  de 0 dans  $\mathbb{R}^n$ .
- .  ${}^{(p)}S$  est de classe  $C^\infty$  dans  ${}^{(p)}\mathcal{D} - \{0\}$ .
- .  ${}^{(p)}S$  admet un développement limité en  $f.r.h$  de  $x^i, s$

$${}^{(p)}S(x^i) = s + \sum_{k=2}^{p+1} S_k + o(s^{p+1}) \quad (32)$$

dont la partie régulière coïncide avec celle de  $S$  ( $x^0 = S(x^i)$  est l'équation du demi-conoïde caractéristique  $\mathcal{C}$ , de sommet 0, orienté vers les  $x^0 \geq 0$  déterminé par les données  $(A^{\lambda\mu}, \bar{w}_r)$ )

Les dérivées de  ${}^{(p)}S$  admettent aussi des développements en  $f.r.h$  de  $x^i, s$  dont la partie régulière s'obtient à partir de (32) par dérivation terme à terme.

On notera  ${}^{(p)}Y$  l'intérieur du demi-conoïde  ${}^{(p)}\mathcal{C}$ .

PROPOSITION 3.5. — Soit  $p \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ ,  $p \geq 2$ . On suppose que les données  $(A^{\lambda\mu}, f_r, \bar{w}_r)$  vérifient les hypothèses  $\alpha_p, \beta_{p-2}, \gamma_p$ .

Alors il existe deux suites (décroissantes)  $(\tilde{\mathbf{D}}_k)_{k \in \mathbb{N}}, (\mathbf{D}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de voisinages de 0 dans  $U$  et une suite  $({}^{(p)}\omega_{r,k})_{k \in \mathbb{N}}$  de fonctions  $({}^{(p)}\omega_{r,k})$  définies et de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbf{D}_k$  telles que :

- .  $\tilde{\mathbf{D}}_0 = \mathbf{D}_0 = \mathcal{D}$ ,  $({}^{(p)}\omega_{r,0}) = ({}^{(p)}\bar{w}_r)$
  - . pour  $k \geq 1$  :  $\tilde{\mathbf{D}}_k$  est un voisinage de 0 dans  $\mathbf{D}_{k-1}$  dans lequel la métrique
- $$(A^{\lambda\mu}_{(p)}(x^\alpha, ({}^{(p)}\omega_{r,k-1}(x^\alpha))) \text{ est hyperbolique ;}$$

$\mathbf{D}_k$  est un voisinage de 0 dans  $\tilde{\mathbf{D}}_k$ , qui est de plus un domaine causal de  $\tilde{\mathbf{D}}_k$  pour la métrique  $(A^{\lambda\mu}_{(p)}(x^\alpha, ({}^{(p)}\omega_{r,k-1}(x^\alpha)))$ ;

$({}^{(p)}\omega_{r,k})$  est la fonction  $C^\infty$  définie sur  $\mathbf{D}_k$  et solution du problème de Cauchy caractéristique linéaire.

$$\left\{ \begin{array}{l} A^{\lambda\mu}_{(p)}(x^\alpha, ({}^{(p)}\omega_{s,k-1}(x^\alpha))) D^{\lambda\mu}_{(p)} \omega_{r,k} + \\ f_{r,(p)}(x^\alpha, ({}^{(p)}\omega_{s,k-1}(x^\alpha)), D^{\lambda\mu}_{(p)} \omega_{s,k-1}(x^\alpha)) = 0 \text{ dans } ({}^{(p)}Y \cap \mathbf{D}_k \\ ({}^{(p)}\omega_{r,k}) = ({}^{(p)}\omega_{r,k-1}) = ({}^{(p)}\bar{w}_r) \text{ sur } ({}^{(p)}C \cap \mathbf{D}_k \end{array} \right. \quad (33)$$

Preuve. — La construction de la suite  $(\tilde{\mathbf{D}}_k, \mathbf{D}_k, ({}^{(p)}\omega_{r,k}))_{k \in \mathbb{N}}$  se fera par récurrence sur  $k$ .

Pour  $k = 0$ , on prend, par définition :

$$\tilde{\mathbf{D}}_0 = \mathbf{D}_0 = \mathcal{D}, ({}^{(p)}\omega_{r,0}) = ({}^{(p)}\bar{w}_r)$$

Soit  $k \geq 1$ . Supposons que les  $(\tilde{\mathbf{D}}_s, \mathbf{D}_s, ({}^{(p)}\omega_{r,s}))$  sont construits pour  $0 \leq s \leq k-1$ . construisons maintenant  $(\tilde{\mathbf{D}}_k, \mathbf{D}_k, ({}^{(p)}\omega_{r,k}))$ .

D'après les hypothèses  $(\alpha_p), (\gamma_p)$  on a :

$$A^{\lambda\mu}_{(p)}(0, ({}^{(p)}\omega_{r,k-1}(0))) = A^{\lambda\mu}(0, ({}^{(p)}\bar{w}_r(0))) = \eta^{\lambda\mu}$$

où  $(\eta^{\lambda\mu})$  est la métrique de Minkowski sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

On déduit que la métrique  $C^\infty(A^{\lambda\mu}_{(p)}(x^\alpha, ({}^{(p)}\omega_{r,k-1}(x^\alpha)))$  est hyperbolique dans un voisinage  $\tilde{\mathbf{D}}_k$  de 0 dans  $\mathbf{D}_{k-1}$ . D'après la proposition 2.4, il existe

$\mathbf{D}_k$  un voisinage de 0 dans  $\tilde{\mathbf{D}}_k$ , qui est un domaine causal de  $\tilde{\mathbf{D}}_k$  pour la métrique  $(A_{(p)}^{\lambda\mu}(x^\alpha, {}^{(p)}\omega_{r,k-1}(x^\alpha)))$ .

D'après la proposition 2.4 et la remarque 2.6, il existe une fonction  $({}^{(p)}\omega_{r,k}) \in C^\infty(\mathbf{D}_k)$  solution du problème de Cauchy caractéristique linéaire (33).

**PROPOSITION 3.6.** — *Les hypothèses et notations étant celles de la proposition précédente, on a les assertions suivantes :*

- (i) pour tout entier naturel  $k$ ,  $1 \leq k < p$ , les polynômes de Taylor à l'ordre  $k$  en 0 des fonctions  $({}^{(p)}\omega_{r,k})$  et  $({}^{(p)}\omega_{r,k-1})$  coïncident.
- (ii) pour tout entier naturel  $k$ ,  $1 \leq k < p$ , la fonction  $({}^{(p)}\omega_{r,k})$  vérifie au point 0 les équations  $(E_r)$  et les équations dérivées jusqu'à l'ordre  $k - 1$ .

*Preuve.* — Elle se fera par récurrence sur  $k$ .

Introduisons d'abord quelques notations. On notera :

- . pour toute fonction  $v$ ,  $[v]$  désigne la restriction de  $v$  au demi-conoïde  $({}^{(p)}\mathcal{C})$ .
- . pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(E_r^{(k)})$  les équations aux dérivées partielles linéaires (d'inconnue  $({}^{(p)}\omega_{r,k+1})$  :

$$A_{(p)}^{\lambda\mu} \left( x^\alpha, {}^{(p)}\omega_{s,k} \right) D_{\lambda\mu}^{(p)} \omega_{s,k+1} + f_{r,(p)} \left( x^\alpha, {}^{(p)}\omega_{s,k}, D_\nu^{(p)} \omega_{s,k} \right) = 0$$

*Preuve de (i) pour  $k = 1$ .* — D'après la proposition 3.1, la fonction  $({}^{(p)}\omega_{r,1})$ , comme solution du problème de Cauchy linéaire caractéristique :

$$\begin{cases} ({}^{(p)}\omega_{r,1}) \text{ est solution des équations } (E_r^{(0)}) \text{ dans } \mathbf{D}_1 \\ ({}^{(p)}\omega_{r,1}) = ({}^{(p)}\omega_{r,0}) = ({}^{(p)}\bar{w}_r) \text{ sur } ({}^{(p)}\mathcal{C}) \cap \mathbf{D}_1 \end{cases} \quad (34)$$

vérifie au point 0 sommet du sommet demi-conoïde  $({}^{(p)}\mathcal{C})$  les relations suivantes :

$$({}^{(p)}\omega_{r,1})(0) = ({}^{(p)}\omega_{r,0})(0) \quad (35)$$

$$D_0 ({}^{(p)}\omega_{r,1})(0) = D_0 ({}^{(p)}\omega_{r,0})(0) \quad (36)$$

D'autre part, on a les égalités suivantes pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  :

$$\left[ D_i ({}^{(p)}\omega_{r,t}) \right] = D_i \left[ ({}^{(p)}\omega_{r,t}) \right] - D_i ({}^{(p)}S) \left[ D_0 ({}^{(p)}\omega_{r,t}) \right] \quad (t = 0, 1) \quad (37)$$

Les égalités (35) et (36) entraînent que les parties régulières des développements limités en *f.r.h* de  $x^i, s$  à l'ordre 0, en 0 des membres de gauche des égalités (37) pour  $t = 0$  et pour  $t = 1$  coïncident ; on en déduit que :

$$D_i {}^{(p)}\omega_{r,1}(0) = D_i {}^{(p)}\omega_{r,0}(0) \quad (38)$$

*Preuve de (ii) pour  $k = 1$ .* — Par définition la fonction  $({}^{(p)}\omega_{r,1})$  vérifie les équations  $(E_r^{(0)})$  au point 0. Compte tenu des égalités (35), (36), (38), elle vérifie donc, aussi, au point 0, les équations non linéaires  $(E_r)$ .

**HYPOTHÈSE DE RÉCURRENCE.** — Supposons que les assertions (i) et (ii) sont vraies pour  $k$ .

Montrons qu'elles sont aussi vraies pour  $k + 1$ .

D'après l'hypothèse de récurrence, la fonction  $({}^{(p)}\omega_{r,k})$  vérifie au point 0 les équations  $(E_r)$  et les équations dérivées jusqu'à l'ordre  $k - 1$  ; donc elle vérifie aussi au point 0 les équations  $(E_r^{(k)})$  et les équations dérivées jusqu'à l'ordre  $k - 1$ . On en déduit en utilisant la proposition 3.2, que la fonction  $({}^{(p)}\omega_{r,k+1})$ , comme solution du problème de Cauchy caractéristique linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} ({}^{(p)}\omega_{r,k+1} \text{ est solution des équations } (E_r^{(k)}) \text{ dans } \mathbf{D}_{k+1} \cap ({}^{(p)}Y \\ ({}^{(p)}\omega_{r,k+1} = ({}^{(p)}\omega_{r,k} = ({}^{(p)}\bar{w}_r \text{ sur } ({}^{(p)}\mathcal{C} \cap \mathbf{D}_{k+1} \end{array} \right. \quad (39)$$

vérifie la propriété suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } s' \in \{0, 1, \dots, k + 1\}, \text{ les parties régulières} \\ \text{des développements limités en } f.r.h \text{ de } x^i, s \text{ des fonctions} \\ \left[ D_0^{s'} ({}^{(p)}\omega_{r,k+1} \right], \left[ D_0^{s'} ({}^{(p)}\omega_{r,k} \right] \text{ coïncident jusqu'à l'ordre } k + 1 - s' \end{array} \right. \quad (40)$$

Considérons maintenant un multi-indice  $\alpha = (m, u_1, \dots, u_n)$  tel que  $|\alpha| \leq k + 1$ . Pour  $t \in \{k, k + 1\}$ , on a :

$$\left[ D^\alpha ({}^{(p)}\omega_{r,t} \right] = \sum_{\substack{v+t_1+\dots+t_s=u \\ 0 \leq s' \leq |u|, m+s \leq |\alpha|}} D^v \left[ D_0^{m+s'} ({}^{(p)}\omega_{r,t} \right] D^{t_1} ({}^{(p)}S) \dots D^{t_s} ({}^{(p)}S) \quad (41)$$

La propriété (40) entaine que les parties régulières des développements limités en *f.r.h* de  $x^i, s$  à l'ordre 0 en 0, des membres de gauche des égalités (41) pour tout  $t = k, k + 1$  coïncident. On en déduit que :

$$D^\alpha ({}^{(p)}\omega_{r,k+1}(0) = D^\alpha ({}^{(p)}\omega_{r,k}(0)$$

pour tout multi-indice  $\alpha$  tel que  $|\alpha| \leq k + 1$  ; cela achève la preuve de (i) pour  $k + 1$ .

*Preuve de (ii) pour  $k + 1$ .* — Comme solution  $C^\infty$  sur le domaine  $\mathbf{D}_{k+1} \cap {}^{(p)}Y$  (contenant le point 0 sommet du demi-conoïde  ${}^{(p)}\mathcal{C}$ ) des équations  $(E_r^{(k)})$ , la fonction  ${}^{(p)}\omega_{r,k+1}$  vérifie au point 0 les équations  $(E_r^{(k)})$  et toutes les équations dérivées de tout ordre. La fonction  ${}^{(p)}\omega_{r,k+1}$  vérifie donc, en particulier les équations dérivées de  $(E_r^{(k)})$  jusqu'à l'ordre  $k$ .

Comme  $D^\alpha {}^{(p)}\omega_{r,k+1}(0) = D^\alpha {}^{(p)}\omega_{r,k}(0)$  pour tout multi-indice  $\alpha$  tel que  $|\alpha| \leq k + 1$  cela signifie aussi que  ${}^{(p)}\omega_{r,k+1}$  vérifie au point 0 les équations non linéaires  $(E_r)$  et les équations dérivées jusqu'à l'ordre  $k$ . cela achève la preuve de (ii) pour  $k + 1$ .

**PROPOSITION 3.7.** — *Les hypothèses et notations étant celles de la proposition 3.5, soient  $k$  un entier naturel  $< p$  et  ${}^{(p)}\bar{\omega}_{r,k}$  le polynôme de Taylor à l'ordre  $k + 1$  en 0 de la fonction  ${}^{(p)}\omega_{r,k}$ .*

Alors :

- (i) la fonction polynôme  ${}^{(p)}\bar{\omega}_{r,k}$  vérifie au point 0 les équations  $(E_r)$  et toutes les équations dérivées jusqu'à l'ordre  $k - 1$ .
- (ii) Il existe une fonction  $(\tilde{w}_r)$  de  $U$  dans  $W$ , de classe  $C^{k+1}$ , telle que :
  - 1) le polynôme de Taylor à l'ordre  $k + 1$ , en 0 de  $\tilde{w}_r$  est égal à  ${}^{(p)}\bar{\omega}_{r,k}$ .
  - 2)  $\tilde{w}_r = \bar{w}_r$  sur  $\mathcal{C}$ .

*Preuve de (ii).* — Comme  ${}^{(p)}S$  et  $S$  sont continues au voisinage de 0 et  ${}^{(p)}S(0) = S(0) = 0$ , il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{D}_p$  de 0 dans  $\mathcal{D}$  tel que :

$$(x^i) \in \mathcal{D}_p \Rightarrow {}^{(p)}S(x^i) \text{ est défini et } ({}^{(p)}S(x^i), x^i) \in \mathcal{D}_p, \quad (S(x^i), x^i) \in \mathcal{D}_p$$

Notons :

$$P = \{v : \mathcal{D}_p \rightarrow \mathbb{R}^N / v \text{ est de classe } C^{k+1} \text{ dans } \mathcal{D}_p \text{ et } D^\alpha v(0) = 0, \quad \forall \alpha, |\alpha| \leq k + 1\}$$

$$\tilde{P} = \{\tilde{v} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^N / \tilde{v} \text{ est de classe } C^{k+1} \text{ dans } \mathcal{D} \text{ et } D^\alpha \tilde{v}(0) = 0, \quad \forall \alpha, |\alpha| \leq k + 1\}$$

Rappelons que :

$${}^{(p)}\bar{w}_r \left( {}^{(p)}S(x^i), x^i \right) = {}^{(p)}\omega_{r,k} \left( {}^{(p)}S(x^i), x^i \right), \quad \forall (x^i) \in \mathcal{D}_p \quad (42)$$

Pour tout  $(x^i) \in \mathcal{D}_p$ , la fonction  ${}^{(p)}\bar{w}_r(S(x^i), x^i)$  admet compte tenu de (42), la décomposition suivante :

$${}^{(p)}\bar{w}_r(S(x^i), x^i) = {}^{(p)}\bar{\omega}_{r,k}(S(x^i), x^i) + v_r^{(1)}(x^i) + v_r^{(2)}(x^i) + v_r^{(3)}(x^i) \quad (43)$$

avec

$$v_r^{(1)}(x^i) = {}^{(p)}\omega_{r,k}(S(x^i), x^i) - {}^{(p)}\bar{\omega}_{r,k}(S(x^i), x^i) \quad (44)$$

$$v_r^{(2)}(x^i) = {}^{(p)}\omega_{r,k}({}^{(p)}S(x^i), x^i) - {}^{(p)}\omega_{r,k}(S(x^i), x^i) \quad (45)$$

$$v_r^{(3)}(x^i) = {}^{(p)}\bar{w}_r(S(x^i), x^i) - {}^{(p)}\bar{w}_r({}^{(p)}S(x^i), x^i) \quad (46)$$

Si  $p = +\infty$ , les fonctions  $S$  et  ${}^{(p)}S$  sont égales.

Si  $p < +\infty$ , les fonctions  $S$  et  ${}^{(p)}S$  sont de classe  $C^p$  dans  $\mathcal{D}_p - \{0\}$  et les parties régulières de leur développement limité en *f.r.h* de  $x^i, s$ , en 0, à l'ordre  $p + 1$ , sont égales. On en déduit que :

$$v_r^{(\ell)} \in P, \quad \forall \ell \in \{1, 2, 3\} \quad (47)$$

Soit  $K$  un voisinage compact de 0 dans  $\mathcal{D}_p$ .

Soit  $\sigma$  une fonction définie et de classe  $C^\infty$  sur  $\mathcal{D}$ , égale à 1 sur  $K$  et à support compact contenu dans  $\mathcal{D}_p$ .

Alors  $\forall (S(x^i), x^i) \in \mathcal{C}$ , on a :

$${}^{(p)}\bar{w}_r(S(x^i), x^i) = {}^{(p)}\bar{\omega}_{r,k}(S(x^i), x^i) + \sum_{\ell=1}^5 \tilde{v}_r^{(\ell)}(x^i) \quad (48)$$

avec :

$$\tilde{v}_r^{(\ell)}(x^i) = (\sigma \cdot v_r^{(\ell)})(x^i), \quad \forall \ell \in \{1, 2, 3\} \quad (49)$$

$$\tilde{v}_r^{(4)}(x^i) = (\sigma - 1)(x^i) \cdot {}^{(p)}\bar{\omega}_{r,k}(S(x^i), x^i) \quad (50)$$

$$\tilde{v}_r^{(5)}(x^i) = (1 - \sigma)(x^i) \cdot {}^{(p)}\bar{w}_r(S(x^i), x^i) \quad (51)$$

Il est évident, vu le choix de  $\sigma$ , que :

$$\tilde{v}_r^{(\ell)} \in \tilde{P} \quad \forall \ell \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad (52)$$

Soit  $\tilde{w}_r$  la fonction définie sur le domaine  $U' = U \cap (\mathbb{R} \times \mathcal{D})$  ( $U =$  domaine de définition de  $\bar{w}_r$ ) par :

$$\tilde{w}_r(x^0, x^i) = {}^{(p)}\bar{\omega}_{r,k}(x^0, x^i) + \sum_{\ell=1}^5 \tilde{v}_r^{(\ell)}(x^i) + (\bar{w}_r - {}^{(p)}\bar{w}_r)(x^0, x^i)$$

Alors :

- 1) il découle de (52) que le polynôme de Taylor à l'ordre  $k + 1$  en 0, de  $\tilde{w}_r$  est égal à  ${}^{(p)}\bar{\omega}_{r,k}$ .
- 2) il découle de (48) que  $\tilde{w}_r = w_r$  sur  $\mathcal{C}$ .

La fonction  $\tilde{w}_r$  ainsi définie prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}^N$ , mais comme  $\tilde{w}_r = \bar{w}_r$  sur  $\mathcal{C}$  et  $\bar{w}_r(U) \subset W$ , on peut en modifiant si nécessaire la définition de  $\tilde{w}_r$  en dehors d'un voisinage convenable de  $\mathcal{C}$  dans  $U$  supposer que  $\tilde{w}_r$  prend ses valeurs dans  $W$ .

Ce qui achève la preuve de (ii).

*Preuve de (i).* — Elle découle immédiatement de la proposition 3.6.

Il découle immédiatement des propositions 3.2, 3.4 et 3.7.

Les théorèmes suivants qui améliorent les propositions 3.2 et 3.4.

**THÉORÈME 3.8.** — *Si les  $A^{\lambda\mu}$ ,  $f_r$ ,  $\bar{w}_r$  vérifient les hypothèses  $\alpha_p$ ,  $\beta_{p-2}$ ,  $\gamma_p$ , ( $p \geq 2$ ), alors sont déterminées de façon unique sur  $(\mathcal{C}')$ , les dérivées jusqu'à l'ordre  $q$  ( $2q \leq p$ ) des fonctions  $w_r$  telles que :*

- les  $w_r$  sont définies dans un voisinage de  $(\mathcal{C}')$  où dans un domaine ayant  $(\mathcal{C}')$  pour frontière,
- dans ce domaine les  $w_r$  ont des dérivées jusqu'à l'ordre  $q + 1$  qui sont des fonctions localement sommables et y vérifient les équations  $(E_r)$ ,
- sur  $(\mathcal{C}') - \{0\}$  elles ont des dérivées jusqu'à l'ordre  $q$  qui sont bornées.
- sur  $(\mathcal{C}')$  elles prennent les valeurs  $\varphi_r = \bar{w}_r|_{\mathcal{C}}$ .

*Si l'on pose  $\psi_r^{(\ell)} = [D_0^\ell w_r]$  restriction de  $D_0^\ell w_r$  à  $(\mathcal{C}')$ ,  $1 \leq \ell \leq q = [\frac{p}{2}] =$  partie entière de  $\frac{p}{2}$ ,*

*les fonctions  $\psi_r^{(\ell)}$  sont de classe  $C^{p-2\ell}$  sur  $(\mathcal{C}') - \{0\}$ ;*

- les fonctions  $\psi_r^{(\ell)}$  admettent des développements limités au voisinage de 0 en  $\lambda_1$ , ou en f.r.h de  $x^i$ ,  $s$  jusqu'à l'ordre  $p - \ell$  si  $p < +\infty$  et de tout ordre si  $p = +\infty$  ; leurs dérivées admettent les développements limités dérivées.

*Si  $\ell \leq k < p$  la partie régulière du développement limité de  $\psi_r^{(\ell)}$  coïncide avec celle de  $[D_0^\ell {}^{(p)}\bar{\omega}_{r,k}]$  jusqu'à l'ordre  $k + 1 - \ell$ .*

**THÉORÈME 3.9.** — *Sous les hypothèses du théorème précédent, si des fonctions  $w_r$  sont telles que :*

- elles sont définies dans un voisinage de  $(C)$  ou dans un domaine ayant  $(C)$  pour frontière
- sur  $(C)$  elles prennent les valeurs  $[\bar{w}_r]$
- sur  $(C) - \{0\}$ , elles ont des dérivées jusqu'à l'ordre  $q + 1$  localement sommables et telles que

$$[D_0^\ell w_r] = \psi_r^{(\ell)}, \quad 1 \leq \ell \leq q$$

Alors sur  $(C) - \{0\}$ , les fonctions  $w_r$  vérifient les équations  $(E_r)$  et les équations dérivées par rapport à  $x^0$  jusqu'à l'ordre  $q - 1$ .

#### 4. Résolution du problème de Cauchy (1), (2)

##### 4.1. Énoncé du résultat obtenu

**THÉORÈME 4.1.** — *Si les données  $A^{\lambda\mu}$ ,  $f_r$ ,  $\bar{w}_r$  vérifient les hypothèses  $\alpha_\infty$ ,  $\beta_\infty$ ,  $\gamma_\infty$ , alors il existe un réel  $T_0 > 0$  tel que le problème de Cauchy (1), (2) possède, dans le domaine  $Y_{T_0}$ , une solution unique  $(w_r) \in C^\infty(Y_{T_0})$ .*

*Remarque 4.2.* — Si le système  $(E_r)$  est linéaire, la solution est bien sûr, globale et appartient à  $C^\infty(Y)$ .

*Preuve du Théorème 4.1.* — Considérons les fonctions  $(\infty)\omega_{r,k}$  associées aux données  $(A^{\lambda\mu}, f_r, \bar{w}_r)$  et introduites à la proposition 3.5.

D'après la proposition 3.5, il existe une fonction  $\omega_r^0$  de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{n+1}$  telle que  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\forall \beta \in \mathbb{N}^{n+1}$  de longueur  $k$ , on a :

$$D^\beta \omega_r^0(0) = D^\beta (\infty)\omega_{r,k}(0). \quad (53)$$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , posons alors :

$$\sigma_r^{(k)}(x^i) = \psi_r^{(k)}(x^i) - D_0^k \omega_r^0(S(x^i), (x^i)). \quad (54)$$

D'après le théorème 3.8,  $\sigma_r^{(k)}$  est une fonction  $C^\infty$  sur  $\mathfrak{D}$  dont les dérivées de tout ordre sont nulles au point 0.

Soit maintenant  $\theta(t)$  une fonction  $C^\infty$ , à support compact telle que

$$0 \leq \theta \leq 1, \quad \theta = 1 \text{ pour } |t| \leq \frac{1}{2} \text{ et } \theta = 0 \text{ pour } |t| \geq 1.$$

D'après la proposition 2.8, il existe alors une suite  $(k_\ell)$  d'entiers naturels croissant suffisamment vite de façon que :

$$\omega_r^1(x^\alpha) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} \sigma_r^{(\ell)}(x^i) (x^0 - S(x^i))^\ell \theta [k_\ell (x^0 - S(x^i))] \quad (55)$$

soit une fonction  $C^\infty$  telle que  $\forall k \in \mathbb{N}$  :

$$[D_0^k \omega_r^1] = \sigma_r^{(k)} \text{ sur } \mathcal{C} \quad (56)$$

Posons :

$$\omega_r = \omega_r^0 + \omega_r^1 \quad (57)$$

Il découle de (54) et (56) que,  $\forall k \in \mathbb{N}$  :

$$[D_0^k \omega_r] = \psi_r^{(k)} \text{ sur } \mathcal{C} \quad (58)$$

D'après le théorème 3.9 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{la fonction } (\omega_r) \text{ vérifie sur } \mathcal{C} \text{ les équations } (E_r) \text{ et} \\ \text{toutes les équations dérivées de tout ordre.} \end{array} \right. \quad (59)$$

Introduisons maintenant pour le problème de Cauchy (1),(2), les nouvelles fonctions inconnues  $(v_r)$  définies par :

$$w_r = \omega_r + v_r \quad (60)$$

Le problème de Cauchy (1), (2) se réduit alors au problème à données nulles sur  $\mathcal{C}$  suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}^{\lambda\mu}(x^\alpha, v_s) D_{\lambda\mu} v_r + \tilde{f}_r(x^\alpha, v_s, D_\nu v_s) = 0 \text{ dans } Y \\ \text{sur } \mathcal{C}, D_0^\ell v_r = 0 \text{ pour tout } \ell \in \mathbb{N} \end{array} \right. \quad (61)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}^{\lambda\mu}(x^\alpha, v_s) = A^{\lambda\mu}(x^\alpha, \omega_s(x^\alpha) + v_s) \\ \tilde{f}_r(x^\alpha, v_s, D_\nu v_s) = A^{\lambda\mu}(x^\alpha, \omega_s(x^\alpha) + v_s) D_{\lambda\mu} \omega_r(x^\alpha) \\ + f_r(x^\alpha, \omega_s(x^\alpha) + v_s, D_\nu \omega_s(x^\alpha) + D_\nu v_s) \end{array} \right. \quad (62)$$

Soit  $T_1$  un réel  $> 0$  tel que  $[0, T_1] \times \mathfrak{D} \subset U$ .

Soit  $R_r$  la fonction définie par :

$$R_r(x^\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } x^\alpha \in Y_{T_1} \\ \tilde{f}_r(x^\alpha, 0, 0) & \text{si } x^\alpha \in ([0, T_1[ \times \mathfrak{D}) \end{cases} \quad (63)$$

D'après (59) et (62),  $R_r \in C^\infty([0, T_1[ \times \mathfrak{D})$ .

Considérons maintenant le problème de Cauchy à données initiales nulles sur l'hypersurface spatiale  $x^0 = 0$ , et à coefficients  $C^\infty$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}^{\lambda\mu}(x^\alpha, u_s) D_{\lambda\mu} u_r + \tilde{f}_r(x^\alpha, u_s, D_\nu u_s) = R_r \\ \text{dans } [0, T_1[ \times \mathfrak{D}. \\ \text{sur } x^0 = 0, D_0^\ell u_r = 0 \text{ pour } 0 \leq \ell \leq t \end{array} \right. \quad (64)$$

D'après la théorie de Leray [10]- Dionne [4]- Choquet -Bruhat [3],

il existe  $T_0$  ( $0 < T_0 \leq T_1$ ) tel que le problème (64) possède une solution unique  $(u_r) \in C^\infty([0, T_0[ \times \mathfrak{D})$  et de support contenu dans  $Y$  (à cause du choix de  $R_r$ ) ; cette solution vérifie donc  $D_0^\ell u_r = 0$  sur  $x^0 = 0$ , pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$ .

Posons alors :

$$v_r = u_r |_{Y_{T_0}} \quad (65)$$

Il est évident que  $(v_r)$  est l'unique solution du problème (61),(62). La fonction  $(w_r) = (\omega_r + v_r)$  est alors l'unique solution de classe  $C^\infty$  du problème (1), (2) dans le domaine  $Y_{T_0}$   $\square$

*Remarque 4.3.* — Un théorème de Cauchy-Kovalewska sur un conoïde caractéristique

Il serait intéressant d'obtenir, pour le problème de Cauchy (1), (2), un résultat de régularité analytique. Il faudrait pour cela, montrer que lorsque les données  $(A^{\lambda\mu}), (f_r), (\bar{w}_r)$  sont analytiques, alors la série entière

$$w_r = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{|\beta|=k} \frac{1}{\beta!} D^\beta (\infty) \omega_{r,k}(0) x^\beta$$

$$(\text{avec } x^\beta = (x^0)^{\beta_0} \dots (x^n)^{\beta_n}, \beta! = \beta_0! \dots \beta_n! \text{ si } \beta = (\beta_0, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^{n+1})$$

a un rayon de convergence non nulle.

$(w_r)$  est alors la solution analytique du problème de Cauchy (1),(2).

## Bibliographie

- [1] CAGNAC (F.). — Problèmes de Cauchy sur un conoïde caractéristique pour des équations quasi-linéaires, 1980, *Annali di Matematica Pura ed Applicata* (VI), Vol. 129, 13–41.
- [2] CAGNAC (F.). — Problème de Cauchy sur un conoïde caractéristique, Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Paris V, 1973.
- [3] CHOQUET-BRUHAT (Y.). — *Journal of General Relativity and Gravitation*, N°4 (1972), 359–362.
- [4] DIONNE (P.A.). — Sur les problèmes de Cauchy hyperboliques bien posés, Thèse, *Journal d'Analyse mathématique*, Jérusalem, 1962–1963.
- [5] DOSSA (M.). — Problèmes de Cauchy hyperboliques, pour des équations non linéaires, Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Yaoundé, 1992.
- [6] DOSSA (M.). — Problèmes de Cauchy sur un conoïde caractéristique pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques, *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, Vol. 16, N° 1 (1994), 17–22.
- [7] DOSSA (M.). — Espaces de Sobolev non isotropes à poids et problèmes de Cauchy quasi-linéaires sur un conoïde caractéristique, *Ann. Inst., H. Poincaré, Phys. Théor.*, Vol. 66, N°1 (1997), 37–107.
- [8] DOSSA (M.). — Problèmes de Cauchy sur un conoïde caractéristique pour des Equations de Yang-Mills-Higgs et pour les équations d'Einstein (conformes) du vide, à paraître aux *Annales Henri Poincaré*, 2003.
- [9] FRIEDLANDER (F.G.). — *The wave equation on a curved spacetime*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics 2, 1975.
- [10] LERAY (J.). — *Hyperbolic Differential Equations*, Princeton, IAS, 1952.
- [11] MÜLLER ZUM HAGEN (H.). — Characteristic initial value problem for hyperbolic systems of second order differential equations, *Ann. Inst., H. Poincaré, Phys. Théor.*, Vol. 53, N°2 (1990), 159–216.
- [12] RENDALL (A.D.). — Reduction of the characteristic initial value problem to the Cauchy problem and its applications to the Einstein Equations, *Proc. Roy. Soc. London Ser A*, Vol. 427 (1990), 221–239.
- [13] RENDALL (A.D.). — The characteristic initial value problem for the Einstein equations, *Nonlinear hyperbolic equations and field theory (Lake Como 1991)* Pitman, Res. Notes, Maths-Ser., 253, Longman Sci. Techn. Harlow (1992), 154–163.