

ANNE DUVAL

**Séries de  $q$ -factorielles, opérateurs aux  $q$ -différences et confluence**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6<sup>e</sup> série*, tome 12, n° 3 (2003), p. 335-374

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_2003\\_6\\_12\\_3\\_335\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_2003_6_12_3_335_0)

© Université Paul Sabatier, 2003, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Séries de $q$ -factorielles, opérateurs aux $q$ -différences et confluence<sup>(\*)</sup>

ANNE DUVAL <sup>(1)</sup>

---

**RÉSUMÉ.** — On étudie quelques propriétés des séries de  $q$ -factorielles et on montre comment elles donnent par confluence les séries de factorielles habituelles. On applique ceci à l'étude de systèmes aux différences réguliers à l'infini.

**ABSTRACT.** — We study some properties of  $q$ -factorial and allied series and show how by confluence they give rise to usual factorial series. We apply this mechanism to the study of difference systems regular at infinity viewed as limits of  $q$ -difference systems.

---

Dans [9], J. Sauloy utilise comme caractères pour résoudre certaines équations aux  $q$ -différences des fonctions méromorphes sur  $\mathbf{C}^*$  construites avec une fonction thêta de Jacobi. Cela se révèle un outil commode pour aborder des problèmes de confluence d'opérateurs aux  $q$ -différences vers un opérateur différentiel. Dans le même esprit, nous nous intéressons à certaines équations aux différences en considérant l'opérateur de translation, homothétie à un point fixe, comme limite d'homographies à deux points fixes lorsque ceux-ci confluent.

Après avoir, dans le premier paragraphe, explicité cette confluence et dégagé une échelle naturelle de fonctions jouant le rôle des puissances (négatives), nous étudions du point de vue de la confluence le cas « régulier ». Cela nous amène à (ré)introduire et étudier les séries de  $q$ -factorielles. C'est l'objet du deuxième paragraphe où nous introduisons aussi les séries de

---

(\*) Reçu le 10 décembre 2002, accepté le 2 septembre 2003

(1) Laboratoire AGAT, UMR-CNRS 8524, U.F.R. de Mathématiques, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex.

E-mail : duval@agat.univ-lille1.fr

factorielles mixtes. Les résultats de convergence de ces deux types de séries vers les séries de factorielles sont présentés au troisième paragraphe. Enfin au quatrième paragraphe nous étudions les séries obtenues comme solutions d'opérateurs réguliers et leur comportement par confluence.

## 1. Description de la confluence étudiée et des puissances adaptées

### 1.1. Un procédé de confluence

La famille d'homographies de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ ,  $\sigma_{q,1}(x) = qx+1$  vérifie  $\lim_{q \rightarrow 1} \sigma_{q,1} = \tau$  (translation de pas 1), ce qui correspond à la confluence des deux points fixes  $\infty$  et  $\frac{1}{1-q}$  de  $\sigma_{q,1}$  vers l'unique point fixe ( $\infty$ ) de  $\tau$ .

Toute homographie  $h$  est l'exponentielle d'un champ de vecteurs de Riccati  $e^{P(x)\frac{d}{dx}}$  où  $P$  est un polynôme de degré au plus 2. Rappelons ([7] par exemple) que par définition, pour toute fonction suffisamment régulière  $f$ ,  $e^{P(x)\frac{d}{dx}} f(x) = f(\varphi_x(1))$  où  $\varphi_x(t)$  est la solution de l'équation différentielle  $P(\varphi) = \varphi'$  satisfaisant la condition initiale  $\varphi(0) = x$ . En particulier  $\tau = e^{\frac{d}{dx}}$  et l'homographie  $\sigma_q : x \mapsto qx$  s'écrit  $\sigma_q = q^{x\frac{d}{dx}}$ , formules que l'on trouve dans Jackson [5], reprises dans un contexte proche du nôtre, par J.-P. Ramis dans [8].

On a aussi  $\sigma_{q,1} = e^{(x+\frac{1}{q-1}) \ln q \frac{d}{dx}}$  et la confluence peut se lire à ce niveau puisque

$$\lim_{q \rightarrow 1} \sigma_{q,1} = \lim_{q \rightarrow 1} e^{(x+\frac{1}{q-1}) \ln q \frac{d}{dx}} = e^{\frac{d}{dx}} = \tau.$$

Par ailleurs pour tout  $\lambda \in \mathbf{C}^*$ , l'homographie  $\varphi_\lambda(x) = \lambda(x + \frac{1}{q-1})$  vérifie  $\varphi_\lambda \circ \sigma_{q,1} = \sigma_q \circ \varphi_\lambda$  et toute homographie  $h$  telle que  $h \circ \sigma_{q,1} = \sigma_q \circ h$  est de la forme  $h = \varphi_\lambda$ . Cette propriété explique pourquoi l'étude des équations aux  $q$ -différences suffit à traiter le cas de toutes les équations fonctionnelles associées à une homographie à deux points fixes. On peut interpréter cette propriété en disant que le changement de variable  $t = \lambda(x + \frac{1}{q-1})$  « normalise »  $\sigma_{q,1}$  en  $\sigma_q$ .

Il est d'autre part possible de normaliser toutes les homographies en la translation  $\tilde{\tau} = e^{\frac{d}{du}}$  en utilisant une nouvelle variable faisant intervenir  $q^u$ . En particulier, le changement de variable  $\Phi_\mu(u) = \mu q^u + \frac{1}{1-q}$  ( $\mu \in \mathbf{C}^*$ ) transforme  $\sigma_{q,1}$  en  $\tilde{\tau}$ .

Lorsque  $q \rightarrow 1$ , quel que soit le choix de  $\lambda$ , l'application  $\varphi_\lambda$  n'a pas de limite, alors qu'en choisissant  $\mu = \frac{1}{q-1}$ , on a  $\Phi_\mu(u) = [u]_q$  (notation de Jackson) et  $\lim_{q \rightarrow 1} [u]_q = u$ , ou encore  $\lim_{q \rightarrow 1} \Phi_{\frac{1}{q-1}} = id$ , ce qui permet d'étudier la confluence du plan des  $u$  vers celui des  $x$ . On note  $\Phi$  l'application  $\Phi_\mu$  avec  $\mu = \frac{1}{q-1}$  et on utilisera le plus souvent  $\varphi = \varphi_\lambda$  avec  $\lambda = q-1$ , autrement dit le changement de variable  $t = (q-1)x + 1$ . Le passage du plan des  $t$  au plan des  $u$  est alors  $t = q^u$  qui est la façon classique de « redresser »  $\sigma_q$  en  $\tilde{\tau}$ .

La stratégie de confluence que nous voulons décrire est la suivante. On part d'une équation aux différences dans le plan des  $x$ . On la déforme dans le plan des  $x$  en une équation pour l'opérateur  $\sigma_{q,1}$  qui ait pour limite l'équation de départ lorsque  $q \rightarrow 1$ . Cette équation est transportée par  $\Phi^{-1}$  dans le plan des  $u$  et par  $\varphi$  dans le plan des  $t$  où elle est étudiée à la manière de J. Sauloy dans [9]. Les résultats obtenus sont transportés dans le plan des  $u$  où le passage à la limite permet de revenir au plan des  $x$ . Bien sûr la première étape n'est pas du tout canonique et seulement certains choix, que les exemples permettent de deviner, rendent réalisable le processus.

## 1.2. Puissances adaptées à certaines pseudo-dérivations

Soit  $(K, D)$  un corps différentiel commutatif de corps des constantes  $\mathbf{C}$ . On sait que, s'il existe  $u_0 \in K$  est tel que  $D(u_0) = 1$ , alors il découle de la formule de Leibniz que, pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ ,  $u_0^n$  est vecteur propre pour la valeur propre  $n$  de l'opérateur  $u_0 D$ . En appliquant ceci à  $K = \mathbf{C}((\frac{1}{x}))$ , corps des séries méromorphes formelles à l'infini, on obtient les puissance de  $x$  et l'opérateur d'Euler  $x \frac{d}{dx}$ , qui apparaît comme l'opérateur « fuchsien » ou singulier-régulier type. Ceci rend naturel l'utilisation des séries de puissances dans le cas différentiel...

De façon analogue, si  $T \neq id$  est un automorphisme d'un corps commutatif  $K$ , on sait que toute pseudo-dérivation associée à  $T^{-1}$  peut s'écrire  $\Delta = u_0(T^{-1} - id)$  où  $u_0 \in K$ . Si  $v_0 \in K$  vérifie  $\Delta v_0 = 1$ , autrement dit, si on choisit  $v_0$  tel que  $T(v_0) \neq v_0$  et que l'on pose

$$\Delta = \frac{T^{-1} - id}{(T^{-1} - id)(v_0)}$$

la « formule de Leibniz »

$$\Delta(v_0 f) = T^{-1}(v_0) \Delta(f) + f$$

permet d'obtenir à partir de  $e_1 = \frac{1}{v_0}$  des vecteurs propres pour l'opérateur

« fuchsien »

$$\Delta_T = T^{-1}(v_0)\Delta = T^{-1}(v_0)\frac{T^{-1} - id}{T^{-1}(v_0) - v_0}$$

dans les deux cas suivants

1. si  $\Delta$  et  $T$  commutent,
2. si  $\Delta T = \lambda T \Delta$  ( $\lambda \neq 1$ ) pour une *constante*  $\lambda$ , c'est-à-dire un élément  $\lambda$  de  $K$  tel que  $T(\lambda) = \lambda$ .

Clairement  $e_0 = 1$  est vecteur propre de  $\Delta_T$  pour la valeur propre 0. Pour  $n \geq 1$  posons  $e_n = \frac{1}{v_0 T(v_0) T^2(v_0) \dots T^{n-1}(v_0)}$  et  $\bar{e}_n = T^{-1}(v_0) T^{-2}(v_0) \dots T^{-n}(v_0)$ .

PROPOSITION 1.1. — Pour tout  $n \geq 1$ ,

1. si  $T$  et  $\Delta$  commutent,

- $e_n$  est vecteur propre de  $\Delta_T$  pour la valeur propre  $-n$
- $\bar{e}_n$  est vecteur propre de  $\Delta_T$  pour la valeur propre  $n$

2. si  $\Delta T = \lambda T \Delta$  où  $\lambda \neq 1$  vérifie  $T(\lambda) = \lambda$ ,

- $e_n$  est vecteur propre de  $\Delta_T$  pour la valeur propre  $-[n]_\lambda = \frac{\lambda^n - 1}{1 - \lambda}$
- $\bar{e}_n$  est vecteur propre de  $\Delta_T$  pour la valeur propre  $-[-n]_\lambda$

*Preuve.* — Lorsque  $\Delta$  et  $T$  commutent, supposons avoir établi  $\Delta_T(e_n) = -ne_n$ , formule vraie pour  $n = 0$ . Alors  $\Delta(e_n) = -\frac{n}{T^{-1}(v_0)}e_n$  et  $\Delta T(e_n) = T\Delta(e_n) = -n\frac{T(e_n)}{v_0} = -ne_{n+1}$ , puisque  $v_0 e_{n+1} = T(e_n)$ . On déduit alors de la formule de Leibniz que

$$-ne_{n+1} = \Delta T(e_n) = \Delta(v_0 e_{n+1}) = \Delta_T(e_{n+1}) + e_{n+1}$$

et donc  $e_{n+1}$  est vecteur propre de  $\Delta_T$  pour la valeur propre  $-(n+1)$ . D'autre part  $\Delta(\bar{e}_1) = \Delta T^{-1}(v_0) = T^{-1}\Delta(v_0) = T^{-1}(1) = 1$ . Montrons alors par récurrence que pour  $n \geq 2$ ,  $\Delta(\bar{e}_n) = nT^{-1}(\bar{e}_{n-1})$ . Ceci fait, on aura  $\Delta_T(\bar{e}_n) = \bar{e}_1\Delta(\bar{e}_n) = n\bar{e}_1T^{-1}(\bar{e}_{n-1}) = n\bar{e}_n$ . D'abord  $\Delta(\bar{e}_2) = \Delta(\bar{e}_1 T^{-1}(\bar{e}_1)) = T^{-1}(\bar{e}_1)\Delta T^{-1}(\bar{e}_1) + \Delta(\bar{e}_1)T^{-1}(\bar{e}_1) = 2T^{-1}(\bar{e}_1)$ , ce qui amorce la récurrence.

Ensuite de  $\bar{e}_{n+1} = \bar{e}_1 T^{-1}(\bar{e}_n)$ , on déduit

$$\Delta(\bar{e}_{n+1}) = \Delta[\bar{e}_1 T^{-1}(\bar{e}_n)] = T^{-1}(\bar{e}_1)\Delta T^{-1}(\bar{e}_n) + \Delta(\bar{e}_1)T^{-1}(\bar{e}_n).$$

L'hypothèse de récurrence donne, puisque aussi  $\Delta(\bar{e}_1) = 1$ ,  
 $\Delta(\bar{e}_{n+1}) = nT^{-1}(\bar{e}_1)T^{-2}(\bar{e}_{n-1})+T^{-1}(\bar{e}_n) = nT^{-1}[\bar{e}_1T^{-1}(\bar{e}_{n-1})]+T^{-1}(\bar{e}_n) =$   
 $(n+1)T^{-1}(\bar{e}_n)$ , ce qui termine la preuve du cas commutatif.

Dans le deuxième cas, supposons  $\Delta_T(e_n) = -[n]_\lambda e_n$ , formule clairement vraie pour  $n = 0$ . Alors  $\Delta(e_n) = -\frac{[n]_\lambda}{T^{-1}(v_0)}e_n$  et

$$\Delta T(e_n) = \lambda T \Delta(e_n) = -\lambda [n]_\lambda e_1 T(e_n) = -\lambda [n]_\lambda e_{n+1}.$$

D'où, utilisant  $T(e_n) = v_0 e_{n+1}$  et la formule de Leibniz

$$-\lambda [n]_\lambda e_{n+1} = \Delta T(e_n) = \Delta(v_0 e_{n+1}) = \Delta_T(e_{n+1}) + e_{n+1}.$$

Donc

$$\Delta_T(e_{n+1}) = -(1 + \lambda [n]_\lambda) e_{n+1} = -[n+1]_\lambda e_{n+1}.$$

En suivant une démarche analogue à celle du cas commutatif, on constate que l'affirmation concernant les  $\bar{e}_n$  équivaut à la relation  $\Delta(\bar{e}_n) = -[-n]_\lambda T^{-1}(\bar{e}_{n-1})$ , que l'on établit par un calcul parallèle au précédent à partir des relations  $\Delta T^{-1} = \lambda^{-1} T^{-1} \Delta$  et  $\Delta(\bar{e}_1) = \lambda^{-1}$ .  $\square$

Remarquons que le cas différentiel apparaît comme le cas particulier  $T = id$  et  $\Delta = D$ .

Particularisons cette construction lorsque  $K = \mathbf{C}((\frac{1}{x}))$  et  $v_0 = x$ .

1. Si  $T = \tau$ , opérateur de translation  $+1$ , on a  $\Delta = \frac{\Delta}{-1}$ , opérateur aux différences de pas  $-1$  et  $\Delta_T = (x-1) \frac{\Delta}{-1}$ . Les vecteurs propres  $e_n$  sont donnés pour  $n \geq 1$  par  $\frac{1}{x(x+1) \cdots (x+n-1)}$ , que nous noterons  $x^{-[n]}$ . C'est l'échelle qui sert à définir les séries de factorielles.

Lorsqu'on se restreint à un sous-corps de  $K$  constitué de fonctions holomorphes dans un domaine  $U$ , il est naturel de supposer  $\tau(U) \subset U$ , autrement dit il s'agit de fonctions définies dans un voisinage de  $+\infty$  et par exemple  $U$  est un demi-plan vertical  $\Re x \gg 0$ . On retrouve ainsi le fait connu ([4]) que l'opérateur « fuchsien » type en  $+\infty$  est  $(x-1) \frac{\Delta}{-1}$  et que les séries naturelles sont les séries de factorielles.

Aucun voisinage de l'infini de la forme  $\{|x| > R > 0\}$  n'est stable par  $\tau$ , c'est ce qui oblige à distinguer  $+\infty$  de  $-\infty$  dans la théorie des opérateurs aux différences.

2. Lorsque  $T = \sigma_q$  avec  $q \neq 1$ , posons  $p = \frac{1}{q}$ . On obtient  $\Delta = \frac{\sigma_p - id}{(p-1)x}$ , opérateur que nous noterons, classiquement,  $\delta_p$ . L'opérateur fuchsien associé est  $\Delta_T = px\delta_p$ . Comme  $\Delta\sigma_q = q\sigma_q\Delta$ , on (re)trouve le fait que  $q^{-\frac{n(n-1)}{2}}x^{-n}$  est vecteur propre de  $px\delta_p$  pour la valeur propre  $-[n]_q$ . Remarquons que l'équation  $px\delta_p(f) = -[n]_q f$  s'écrit aussi  $\sigma_q(f) = q^{-n}f$ , équation classique des caractères (entiers en  $\infty$ ) pour  $\sigma_q$ .

Si on prend  $K = \mathbf{C}(\{\frac{1}{x}\})$ , alors le voisinage de  $\infty$ ,  $U = \{|x| > R\}$  est stable par  $\sigma_q$  si et seulement si  $|q| > 1$ , ce que nous supposons dans toute la suite.

3. Prenons  $T = \sigma_{q,1}$  de sorte que  $T^{-1} = \sigma_{p,-p}$  qui agit sur  $f \in K$  par  $\sigma_{p,-p}(f)(x) = f(px - p)$ . Dans ce cas  $\Delta = \frac{\sigma_{p,-p} - id}{(p-1)x - p}$  et  $\Delta\sigma_{q,1} = q\sigma_{q,1}\Delta$ . On voit donc que les éléments  $e_n^{(q)}(x)$  de  $K$  définis par  $e_0^{(q)}(x) = 1$  et pour  $n \geq 1$ ,

$$e_n^{(q)}(x) = \frac{1}{x(qx + 1)(q^2x + [2]_q) \cdots (q^{n-1}x + [n-1]_q)}$$

vérifient l'équation des caractères :

$$(\star)_q \quad p(x-1) \frac{\sigma_{p,-p} - id}{(p-1)x - p} e_n^{(q)}(x) = -[n]_q e_n^{(q)}(x).$$

### 1.3. De nouveau la confluence

Clairement  $\lim_{q \rightarrow 1} e_n^{(q)}(x) = x^{-[n]}$  et  $\lim_{q \rightarrow 1} (\star)_q$  est l'équation vérifiée par  $x^{-[n]}$ .

Tout aussi clairement lorsque  $q \rightarrow 1$ , l'équation associée à  $\sigma_q$  tend vers celle associée à l'opérateur de dérivation  $x \frac{d}{dx}$  et la même propriété se retrouve au niveau des solutions.

Comme indiqué dans le premier paragraphe l'opérateur  $\sigma_{q,1}$  se normalise en  $\sigma_q$  par le changement de variable  $t = (q-1)x + 1$ . L'équation  $(\star)_q$  devient alors

$$(1-pt)\delta_p(f) = [n]_q f.$$

Elle a pour solution

$$e_n^{(q)}\left(\frac{t-1}{q-1}\right) = \frac{(1-q)^n}{(t; q)_n}$$

où  $(t; q)_0 = 1$  et pour  $n \geq 1$ ,

$$(t; q)_n = (1-t)(1-qt) \cdots (1-q^{n-1}t).$$

Les monômes  $\frac{1}{(t; q)_n}$  avec  $|q| > 1$  servent à définir les séries de  $q$ -factorielles que nous étudions ci-dessous.

Signalons aussi l'écriture :

$$e_n^{(q)}(x) = \frac{(1-q)^n}{((q-1)x+1; q)_n}.$$

## 2. Séries de factorielles, de $q$ -factorielles et de factorielles mixtes

### 2.1. Rappels sur les séries de factorielles

Nous indiquons sans preuves certaines propriétés des séries de factorielles. Une série  $\sum_{s \geq 0} a_s x^{-[s]}$  qui converge pour une valeur  $x_0$  converge pour

tout  $x$  non entier négatif tel que  $\Re x > \Re x_0$ . S'il est non vide, le domaine de convergence d'une série de factorielles est donc un demi-plan vertical  $\Pi_\sigma = \{\Re x > \sigma\}$  où le nombre réel  $\sigma$ , appelé *abscisse de convergence* de la série, est lié au comportement de la suite de nombres complexes  $(a_s)_{s \geq 0}$ . En particulier on utilisera la propriété suivante, qui n'est pas le meilleur résultat possible : s'il existe  $C > 0$  et  $\lambda \in \mathbf{R}$  tels que pour tout  $s \in \mathbf{N}^*$ ,  $|a_s| \leq C s^{\lambda-1} \Gamma(s)$ , alors la série  $\sum_{s \geq 0} a_s x^{-[s]}$  converge absolument dans le

demi-plan  $\Pi_\lambda$  privé (si  $\lambda < 0$ ) des points de  $-\mathbf{N}$  et la convergence est uniforme sur tout domaine  $\{\Re x \geq \mu, d(x, -\mathbf{N}) \geq \varepsilon\}$  pour tout  $\mu > \lambda$  et tout  $\varepsilon > 0$ .

La somme d'une série de factorielles convergente dans un demi-plan  $\Pi_\sigma$  définit une fonction holomorphe dans ce demi-plan sauf aux (éventuels) points entiers négatifs qui peuvent être des pôles simples. Si une fonction holomorphe dans un demi-plan  $\Pi_\sigma$  admet un développement en série de factorielles, celui-ci est unique. Toute fonction *holomorphe à l'infini* admet un développement en série de factorielles, mais la réciproque est fautive.

Il y a une notion naturelle de série de factorielles formelle : il suffit d'oublier la condition de convergence.

Les calculs avec ce type de séries sont moins faciles qu'avec les séries de puissances et s'appuient souvent sur la formule suivante, dite *formule de translation*. Pour  $\beta \in \mathbf{C}$ , et  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$(x - \beta)^{-[n]} = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{n+s-1}{s} \frac{x^{-[n+s]}}{\beta^{-[s]}}.$$



La somme est finie et comporte  $-\beta + 1$  termes si  $\beta \in -\mathbf{N}$ . Si  $\beta \notin -\mathbf{N}$ , la série de factorielles converge absolument pour  $\Re x > \Re \beta$  comme le montre l'estimation suivante. Le coefficient  $a_{s+n}$  de  $x^{-[s+n]}$  vérifie

$$\frac{|a_{s+n}|}{(s+n)^{\Re \beta - 1} \Gamma(s+n)} = \frac{|\Gamma(\beta+s)|}{\Gamma(s+1)(s+n)^{\Re \beta - 1} \Gamma(n) |\Gamma(\beta)|} = O(1)$$

en utilisant la formule de Stirling.

La formule d'homothétie permet en particulier d'effectuer formellement le produit de deux séries de factorielles à partir de la formule valable pour  $n, p \geq 1$ ,

$$x^{-[n]} x^{-[p]} = \sum_{k \geq 0} \frac{(n+k-1)!(p+k-1)!}{k!(n-1)!(p-1)!} x^{-[n+p+k]}.$$

On obtient les formules suivantes. Si  $f = \sum_{s \geq 0} a_s x^{-[s]}$  et  $g = \sum_{s \geq 0} b_s x^{-[s]}$ , alors

$$f.g = \sum_{s \geq 0} u_s x^{-[s]} \text{ avec } u_0 = a_0 b_0 \text{ et pour } s \geq 1,$$

$$u_s = a_0 b_s + a_s b_0 + \sum_{(j,\ell,k) \in J_s} c_{j,\ell}^{(k)} a_j b_\ell$$

où

$$J_s = \{(j, \ell, k) \mid j, \ell \geq 1, k \geq 0, j + \ell + k = s\}$$

et

$$c_{j,\ell}^{(k)} = \frac{(j+k-1)!(\ell+k-1)!}{k!(j-1)!(\ell-1)!}.$$

On montre ([6]) que le produit de deux séries de factorielles convergentes est une série convergente. D'autre part une série formelle de factorielles est inversible si et seulement si  $a_0 \neq 0$ . Si de plus la série converge, son inverse converge aussi, dans un demi-plan éventuellement plus petit. Précisons ce point qui nous sera utile. Formellement l'inverse de la série  $\sum_{s \geq 0} a_s x^{-[s]}$  où

$a_0 \neq 0$  est la série  $\sum_{s \geq 0} b_s x^{-[s]}$  où  $b_0 = a_0^{-1}$  et pour  $s \geq 1$ ,  $b_s$  est donné par récurrence par la formule

$$b_s = a_0^{-1} \left[ a_s b_0 + \sum_{(j,\ell,k) \in J_s} c_{j,\ell}^{(k)} a_j b_\ell \right].$$

La formule de translation avec  $n = 1$  donne le classique exemple de la série

$$1 - \frac{\mu}{x - \lambda} = 1 - \mu \sum_{s \geq 1} \frac{\Gamma(\lambda + s - 1)}{\Gamma(\lambda)} x^{-[s]}$$

dont l'inverse est

$$1 + \frac{\mu}{x - \lambda - \mu} = 1 + \mu \sum_{s \geq 1} \frac{\Gamma(\lambda + \mu + s - 1)}{\Gamma(\lambda + \mu)} x^{-[s]}.$$

La première converge pour  $\Re x > \lambda$  et la seconde  $\Re x > \lambda + \mu$ .

On peut déduire de cet exemple la formule (\*) suivante, pour  $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$  et  $s$  entier  $\geq 1$ ,

$$\mu \sum_{(j, \ell, k) \in J_s} c_{j, \ell}^{(k)} \frac{\Gamma(\lambda + \mu + j - 1)}{\Gamma(\lambda + \mu)} \frac{\Gamma(\lambda + \ell - 1)}{\Gamma(\lambda)} = \frac{\Gamma(\lambda + \mu + s - 1)}{\Gamma(\lambda + \mu)} - \frac{\Gamma(\lambda + s - 1)}{\Gamma(\lambda)}.$$

En supposant  $\lambda$  et  $\mu$  positifs, on peut se servir de cet exemple comme d'une *série majorante* pour traiter le cas plus général suivant.

PROPOSITION 2.1. — Soit  $f = 1 - \sum_{s \geq 1} a_s x^{-[s]}$  une série de factorielles dont les coefficients vérifient  $|a_s| \leq C \frac{\Gamma(\lambda + s - 1)}{\Gamma(\lambda)}$  où  $C$  et  $\lambda$  sont deux réels positifs indépendants de  $s$ . Alors les coefficients de l'inverse  $g = 1 + \sum_{s \geq 1} b_s x^{-[s]}$  de  $f$  vérifient

$$|b_s| \leq C \frac{\Gamma(\lambda + C + s - 1)}{\Gamma(\lambda + C)}.$$

*Preuve.* — Remarquons tout d'abord que l'hypothèse faite sur les  $a_s$  n'est qu'une autre façon d'écrire la condition  $|a_s| \leq C' \Gamma(s) s^{\lambda-1}$ , lorsque  $\lambda > 0$ . Puisque  $b_1 = a_1$ , on a  $|b_1| \leq C = C \frac{\Gamma(\lambda + C)}{\Gamma(\lambda + C)}$ . Par récurrence, supposons la majoration établie pour  $b_\ell$  avec  $\ell \leq s - 1$ . On tire de la formule donnant  $b_s$  la majoration

$$\begin{aligned} |b_s| &\leq C \frac{\Gamma(\lambda + s - 1)}{\Gamma(\lambda)} + C^2 \sum_{(j, \ell, k) \in J_s} c_{j, \ell}^{(k)} \frac{\Gamma(\lambda + j - 1)}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(\lambda + C + \ell - 1)}{\Gamma(\lambda + C)} \\ &\leq C \frac{\Gamma(\lambda + C + s - 1)}{\Gamma(\lambda + C)} \end{aligned}$$

d'après la formule (\*).  $\square$

On note  $\widehat{\mathcal{O}}_f$  (resp.  $\mathcal{O}_f$ ) l'anneau des séries de factorielles formelles (resp. convergentes). C'est un anneau local d'idéal maximal  $\widehat{\mathcal{I}}_f = x^{-[1]} \widehat{\mathcal{O}}_f$  (resp.  $\mathcal{I}_f = x^{-[1]} \mathcal{O}_f$ ). Le corps des quotients de  $\widehat{\mathcal{O}}_f$  (resp.  $\mathcal{O}_f$ ) est noté  $\widehat{\mathcal{K}}_f$  (resp.  $\mathcal{K}_f$ ).

On a  $\widehat{\mathcal{K}}_f = x \mathbf{C}[x] \oplus \widehat{\mathcal{O}}_f = \mathbf{C}[x] \oplus \widehat{\mathcal{I}}_f$  (resp.  $\mathcal{K}_f = x \mathbf{C}[x] \oplus \mathcal{O}_f = \mathbf{C}[x] \oplus \mathcal{I}_f$ ).

## 2.2. Séries de factorielles géométriques ou de $q$ -factorielles

Les séries de *factorielles géométriques* ou (c'est plus court) de  $q$ -*factorielles* sont les séries de la forme  $a_0 + \sum_{s \geq 1} \frac{a_s}{(1-t)(1-qt) \cdots (1-q^{s-1}t)}$ . Elles semblent avoir été peu étudiées, bien qu'elles soient  $q$ -analogues des séries de factorielles, au même titre que les séries de  $q$ -Newton, très étudiées, sont les  $q$ -analogues des séries de Newton. La raison tient peut-être au fait (voir ci-dessous) que la classe des fonctions admettant un développement convergent de ce type coïncide avec celle des fonctions holomorphes à l'infini, pour lesquelles le développement taylorien en puissances de  $1/t$  est plus naturel. La seule référence à ces séries connue de l'auteur est la thèse soutenue à Lund en 1921 par Ryde, citée par C.R. Adams ([1]), qui résume les propriétés essentielles que nous (re)démontrons ci-dessous.

Commençons par l'exemple clé qui rend apparent l'analogie avec les séries de factorielles.

Pour  $t \in \mathbf{C}$  et  $n \in \mathbf{N}$  on pose  $(t; q)_n = (1-t)(1-qt) \cdots (1-q^{n-1}t)$  si  $n \geq 1$  et  $(t; q)_0 = 1$ . Si  $t \in \mathbf{C}$ , on note  $d(t, q^{-\mathbf{N}})$  la distance de  $t$  à l'ensemble  $\{q^{-n} \mid n \in \mathbf{N}\}$ . Pour  $R > 0$  et  $\varepsilon > 0$ , on note

$$U_{R,\varepsilon} = \{t \in \mathbf{C} \mid |t| \geq R, d(t, q^{-\mathbf{N}}) \geq \varepsilon\}.$$

LEMME 2.2. — Soit  $\alpha \in \mathbf{C}$ . La série de  $q$ -factorielles  $\sum_{s \geq 1} q^{s-1} \frac{(\alpha; q)_{s-1}}{(t; q)_s}$  converge pour  $|t| > |\alpha|$ ,  $t \notin q^{-\mathbf{N}}$  vers  $\frac{1}{\alpha - t}$ . Pour  $R > |\alpha|$  et  $\varepsilon > 0$ , la convergence est uniforme sur  $U_{R,\varepsilon}$ .

*Preuve.* — A partir de

$$\frac{1}{\alpha - t} = \frac{q^n}{1 - q^n t} + \frac{1 - q^n \alpha}{(\alpha - t)(1 - q^n t)}$$

et de  $(t; q)_{n+1} = (t; q)_n(1 - q^n t)$ , on établit par récurrence la formule

$$\frac{1}{\alpha - t} - \sum_{s=1}^n q^{s-1} \frac{(\alpha; q)_{s-1}}{(t; q)_s} = \frac{(\alpha; q)_n}{(\alpha - t)(t; q)_n}$$

En remarquant que, pour  $n \geq 1$  et  $t \neq 0$ ,

$$(t; q)_n = (-1)^n t^n q^{\binom{n}{2}} \left(\frac{1}{t}; p\right)_n$$

on a, si  $\alpha \neq 0$ ,

$$\frac{(\alpha; q)_n}{(t; q)_n} = \left(\frac{\alpha}{t}\right)^n \frac{(\frac{1}{\alpha}; p)_n}{(\frac{1}{t}; p)_n}$$

et puisque  $|p| < 1$ ,  $(\frac{1}{\alpha}; p)_n \rightarrow (\frac{1}{\alpha}; p)_\infty$  et de même pour le dénominateur. Le résultat suit. Lorsque  $\alpha = 0$ ,  $(\alpha; q)_n = 1$  pour tout  $n$  et la présence du terme  $q^{-\binom{n}{2}}$  fait tendre le reste vers 0 beaucoup plus rapidement.  $\square$

LEMME 2.3. — Si la série de  $q$ -factorielles  $\sum_{s \geq 0} \frac{a_s}{(t; q)_s}$  converge en  $t_0 \in \mathbf{C} \setminus q^{-\mathbf{N}}$ , alors elle converge pour tout  $t \notin q^{-\mathbf{N}}$  tel que  $|t| > |t_0|$ , uniformément sur  $U_{R, \varepsilon}$  pour  $R > |t_0|$  et  $\varepsilon > 0$ .

Preuve. — Cela provient de ce que la suite  $\frac{a_s}{(t_0; q)_s}$  étant bornée, on peut trouver  $M > 0$  tel que pour tout  $s$ ,

$$\left| \frac{a_s}{(t; q)_s} \right| \leq M \left| \frac{t_0}{t} \right|^s C_s(t)$$

où

$$C_s(t) = \left| \frac{(\frac{1}{t_0}; p)_s}{(\frac{1}{t}; p)_s} \right|$$

converge quand  $s \rightarrow \infty$ , uniformément sur  $U_{R, \varepsilon}$ .  $\square$

THÉORÈME 2.4. —

1. Soit  $(a_s)_{s \geq 0}$  une suite de nombres complexes. S'il existe  $\alpha \in \mathbf{C} \setminus q^{-\mathbf{N}}$  et  $M > 0$  tels que pour tout  $s$ ,  $|a_s| \leq M |(\alpha; q)_s|$ , alors la série de  $q$ -factorielles  $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s}{(t; q)_s}$  converge pour  $|t| > |\alpha|$ ,  $t \notin q^{-\mathbf{N}}$ . La convergence est uniforme sur tout domaine  $U_{R, \varepsilon}$  pour  $R > |\alpha|$ . Toute fonction développable en série de  $q$ -factorielles convergente est holomorphe à l'infini.
2. Soit  $F(t)$  une fonction holomorphe à l'infini dont le développement en série de puissances de  $\frac{1}{t}$  converge pour  $|t| > R$ , alors, en posant  $a_0 = F(\infty)$  et pour  $s \geq 1$ ,

$$a_s = -\frac{q^{s-1}}{2i\pi} \oint_{|u|=\rho} F(u)(u; q)_{s-1} du$$

où  $\rho$  est tel que  $|t| > \rho > R$  et  $\oint$  signifie que le cercle est parcouru dans le sens trigonométrique, la fonction  $F(t)$  est somme de la série de  $q$ -factorielles  $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s}{(t; q)_s}$  qui converge pour  $|t| > R$ ,  $t \notin q^{-\mathbf{N}}$ .

*Preuve.* — La première affirmation est un corollaire du lemme 2.3, en remarquant que les pôles de la série de  $q$ -factorielles sont tous situés dans le cercle  $|t| \leq 1$  et n'interviennent pas sur un voisinage de l'infini. Sous les hypothèses de la deuxième partie, la fonction  $f(t) = F(\frac{1}{t})$  étant holomorphe pour  $|t| < \frac{1}{R}$ , on peut écrire

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|\tau|=\frac{1}{\rho}} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

où  $\rho$  est tel que  $|t| < \frac{1}{\rho} < \frac{1}{R}$ . Donc pour  $|t| > \rho > R$ , on a

$$F(t) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|\tau|=\frac{1}{\rho}} \frac{f(\tau)}{\tau - \frac{1}{t}} d\tau = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|u|=\rho} \frac{tF(u)}{u(t-u)} du$$

Mais  $\frac{t}{u(t-u)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u-t}$  et puisque  $|t| > \rho = |u|$ , le lemme 2.2 permet de développer le terme  $\frac{1}{u-t}$  en série de  $q$ -factorielles (en  $t$ ) convergente et d'écrire

$$F(t) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|u|=\rho} \frac{F(u)}{u} du - \frac{1}{2i\pi} \oint_{|u|=\rho} F(u) \sum_{s \geq 1} q^{s-1} \frac{(u; q)_{s-1}}{(t; q)_s} du$$

La première intégrale vaut  $F(\infty)$  et dans la seconde on peut intervertir l'intégration et la sommation puisque, avec la définition donnée pour  $a_s$ , on a

$$|a_s| \leq |q|^{s-1} \rho M_\rho \max_{|u|=\rho} |(u; q)_{s-1}|$$

où  $M_\rho$  désigne le maximum de  $F$  sur le cercle  $|u| = \rho$ . Par compacité il existe  $u_\rho$  tel que  $|u_\rho| = \rho$  et  $\max_{|u|=\rho} |(u; q)_{s-1}| = |(u_\rho; q)_{s-1}|$ . On en déduit l'existence d'un constante  $C_\rho > 0$  telle que

$$|a_s| \leq C_\rho |(u_\rho; q)_s|$$

et la première partie permet de conclure.  $\square$

*Remarque.* — On peut noter que si  $F(t)$  admet un développement en série de puissances convergeant dans  $|t| > R$ , le développement en série de  $q$ -factorielles converge dans le même disque, indépendamment de  $q$ .

Dans l'exemple de la fonction  $F(t) = \frac{1}{\alpha - t}$ , l'application de ce théorème donne  $a_0 = 0$  et pour  $s \geq 1$ ,

$$a_s = -\frac{q^{s-1}}{2i\pi} \oint_{|u|=\rho} \frac{(u; q)_{s-1}}{\alpha - u} du = q^{s-1} (\alpha; q)_{s-1}$$

en appliquant le théorème des résidus. C'est bien la valeur donnée par le lemme 2.3.

Les formules de passage entre le développement de Taylor à l'infini et le développement en série de  $q$ -factorielles se déduisent facilement de classiques formules de  $q$ -combinatoire. Posons  $[n]! = [1]_q[2]_q \cdots [n]_q = \prod_{j=1}^n \frac{q^j - 1}{q - 1}$  si  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $[0]! = 1$ . Pour  $n \geq k$  (entiers positifs), notons

$$\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!} = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1}) \cdots (1-q^{n-k+1})}{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^k)} = \frac{(q^{n-k+1}; q)_k}{(q; q)_k}$$

Remarquons que clairement  $\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} n-k \\ n-k \end{matrix} \right]$ .

Puisque pour  $n \geq 1$ ,

$$\frac{1}{(t; q)_n} = \frac{(-1)^n q^{-\binom{n}{2}}}{t^n (\frac{1}{t}; p)_n} = \frac{(-1)^n q^{-\binom{n}{2}}}{t^n} \frac{(p^n; p)_\infty}{(\frac{1}{t}; p)_\infty}$$

le théorème  $p$ -binomial permet d'écrire

$$\frac{1}{(t; q)_n} = \frac{(-1)^n q^{-\binom{n}{2}}}{t^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(p^n; p)_k}{(p; p)_k} \frac{1}{t^k}$$

où la série converge pour  $|t| > 1$ . Comme

$$\frac{(p^n; p)_k}{(p; p)_k} = q^{-k(n-1)} \frac{(q^n; q)_k}{(q; q)_k} = q^{-k(n-1)} \left[ \begin{matrix} n+k-1 \\ k \end{matrix} \right]$$

on a aussi

$$\frac{1}{(t; q)_n} = (-1)^n q^{-\binom{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} q^{-k(n-1)} \left[ \begin{matrix} n+k-1 \\ n-1 \end{matrix} \right] \frac{1}{t^{n+k}}$$

On en déduit que l'égalité :

$$a_0 + \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{(t; q)_n} = b_0 + \sum_{s \geq 1} \frac{b_s}{t^s}$$

se traduit par les formules :  $b_0 = a_0$  et pour  $s \geq 1$ ,

$$b_{s+1} = - \sum_{k=0}^s (-1)^k q^{-ks + \frac{k(k-1)}{2}} \left[ \begin{matrix} s \\ k \end{matrix} \right] a_{k+1}.$$

Inversement, en appliquant le théorème 2.4, on a  $\frac{1}{t^s} = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{(t; q)_n}$  où

$$a_n = -\frac{q^{n-1}}{2i\pi} \oint_{|u|=\rho} \frac{(u; q)_{n-1}}{u^s} du$$

est, au facteur  $-q^{n-1}$  près, le coefficient de  $u^{s-1}$  dans le polynôme  $(u; q)^{n-1}$  qui est de degré  $n - 1$ . Donc si  $n \leq s - 1$ ,  $a_n = 0$ . On utilise l'identité

$$(u; q)_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\frac{k(k-1)}{2}} u^k$$

qui s'établit par récurrence ou peut se déduire de la formule  $p$ -binomiale finie exprimant le polynôme  $(zp^{-n}; p)_n$  sur la base  $1, z, z^2, \dots, z^n$ . On a donc

$$\frac{1}{t^s} = (-1)^s \sum_{n \geq s-1} q^{n + \frac{(s-1)(s-2)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ s-1 \end{bmatrix} \frac{1}{(t; q)_{n+1}}$$

Les  $a_n$  sont alors donnés en fonction des  $b_s$  par  $a_0 = b_0$  et pour  $n \geq 0$ ,

$$a_{n+1} = -q^n \sum_{k=0}^n (-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} b_{k+1}$$

Remarquons que dans le cas particulier des deux développements de la fonction  $\frac{1}{\alpha - t}$ , ces formules s'écrivent

$$\alpha^s = \sum_{k=0}^s (-1)^k q^{-k(s-1) - \frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} s \\ k \end{bmatrix} (\alpha; q)_k$$

et

$$(\alpha; q)_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \alpha^k$$

et cette dernière est l'identité précédemment utilisée.

Le théorème 2.4 a pour conséquence que le produit de deux séries de  $q$ -factorielles convergentes est une série de  $q$ -factorielles convergente. Si l'on veut une formule donnant les coefficients de la série produit en fonction de ceux des facteurs il n'est pas indiqué de faire le détour par les séries de puissance... On peut utiliser une « formule d'homothétie »  $q$ -analogue de la « formule de translation » pour les séries de factorielles.

Remarquons préalablement que si  $f(t) = \sum_{s \geq 0} a_s \frac{1}{(t; q)_s}$  est convergente pour  $|t| > R$ , alors puisque  $|qt| > R$ , on peut écrire pour  $|t| > R$  :

$$\delta_q f(t) = \sum_{s \geq 0} \frac{a_s}{(q-1)t} \left[ \frac{1}{(qt; q)_s} - \frac{1}{(t; q)_s} \right] = \sum_{s \geq 1} a_s [s]_q \frac{1}{(t; q)_{s+1}}$$

puisque  $\frac{1}{(qt; q)_s} = (1-t) \frac{1}{(t; q)_{s+1}}$  et  $\frac{1}{(t; q)_s} = (1-q^s t) \frac{1}{(t; q)_{s+1}}$ .

PROPOSITION 2.5. — Pour  $n \in \mathbf{N}^*$  et  $\beta \in \mathbf{C}^*$ , on a pour tout  $t \in \mathbf{C} \setminus q^{-\mathbf{N}}$  tel que  $|t| > |\beta|$ ,

$$\frac{1}{\left(\frac{t}{\beta}; q\right)_n} = \beta^n \sum_{s=0}^{\infty} q^s \left[ n + s - 1 \right] (\beta; q)_s \frac{1}{(t; q)_{n+s}}$$

Si  $\beta = q^{-k}$  avec  $k \in \mathbf{N}$ , la somme est finie et comporte  $k+1$  termes.

Preuve. — On constate que, pour  $n = 1$ , la formule coïncide avec celle donnée dans le lemme 2.2 puisque

$$\frac{1}{\left(\frac{t}{\beta}; q\right)_1} = \frac{1}{1 - \frac{t}{\beta}} = \frac{\beta}{\beta - t}$$

et que  $\left[ \begin{smallmatrix} s \\ s \end{smallmatrix} \right] = 1$  pour tout  $s \in \mathbf{N}$ .

On vérifie par récurrence sur l'entier  $n$  que

$$\delta_q^n \left( \frac{1}{1 - \frac{t}{\beta}} \right) = \frac{[n]!}{\beta^n \left(\frac{t}{\beta}; q\right)_{n+1}}$$

de sorte que, en particulier, pour  $s \geq 1$ ,

$$\frac{1}{(t; q)_s} = \frac{1}{[s-1]!} \delta_q^{s-1} \left( \frac{1}{1-t} \right)$$

et

$$\delta_q^n \left( \frac{-1}{(t; q)_s} \right) = \frac{1}{[s-1]!} \delta_q^{n+s-1} \left( \frac{1}{1-t} \right) = \frac{[n+s-1]!}{[s-1]!} \frac{1}{(t; q)_{n+s}}.$$

On a alors

$$\frac{1}{\left(\frac{t}{\beta}; q\right)_n} = \frac{\beta^{n-1}}{[n-1]!} \delta_q^{n-1} \left( \frac{1}{1 - \frac{t}{\beta}} \right)$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{\beta^{n-1}}{[n-1]!} \delta_q^{n-1} \left( \sum_{s \geq 1} \beta q^{s-1} (\beta; q)_{s-1} \frac{1}{(t; q)_s} \right) \\
 &= \frac{\beta^n}{[n-1]!} \sum_{s \geq 1} q^{s-1} (\beta; q)_{s-1} \delta_q^{n-1} \left( \frac{1}{(t; q)_s} \right) \\
 &= \beta^n \sum_{s \geq 1} q^{s-1} (\beta; q)_{s-1} \frac{[n+s-2]!}{[n-1]![s-1]!} \frac{1}{(t; q)_{n+s-1}}
 \end{aligned}$$

ce qui est la formule annoncée.  $\square$

COROLLAIRE 2.6. — Pour  $i \geq 1$  et  $j \geq 1$ , on a pour  $|t| > 1$ ,

$$\frac{1}{(t; q)_i} \frac{1}{(t; q)_j} = \frac{q^{ij}}{[i-1]![j-1]!} \sum_{s \geq 0} q^s (1-q)^s \frac{[i+s-1]![j+s-1]!}{[s]!} \frac{1}{(t; q)_{i+j+s}}$$

Preuve. — On part de la remarque:

$$\frac{1}{(t; q)_i} \frac{1}{(q^i t; q)_j} = \frac{1}{(t; q)_{i+j}}$$

et on utilise la proposition 2.5 avec  $\beta = q^i$ ,  $n = j$  et en remplaçant  $t$  par  $q^i t$ . On obtient la formule :

$$\frac{1}{(t; q)_i} \frac{1}{(t; q)_j} = q^{ij} \sum_{s \geq 0} q^s \left[ j + \frac{s-1}{s} \right] (q^i; q)_s \frac{1}{(t; q)_{i+j+s}}$$

Le deuxième membre de cette formule doit être symétrique en  $i$  et  $j$ , ce qui s'obtient en utilisant l'expression du coefficient  $q$ -binomial avec des  $q$ -factorielles et en remarquant que  $(q^i; q)_s = (1-q)^s \frac{[i+s-1]!}{[i-1]!}$ .  $\square$

On en déduit la formule de multiplication de deux séries de  $q$ -factorielles.

PROPOSITION 2.7. — Si  $f(t)$  admet le développement en série de  $q$ -factorielles  $\sum_{s \geq 0} a_s \frac{1}{(t; q)_s}$  convergeant pour  $|t| > R_1 \geq 1$  et si  $g(t)$  admet le développement  $\sum_{s \geq 0} b_s \frac{1}{(t; q)_s}$  convergeant pour  $|t| > R_2 \geq 1$ , alors la fonction  $f(t)g(t)$  admet le développement en série de  $q$ -factorielles convergente pour  $|t| > \max(R_1, R_2)$ ,  $\sum_{s \geq 0} u_s \frac{1}{(t; q)_s}$  où  $u_0 = a_0 b_0$ ,  $u_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$  et pour  $s \geq 2$ ,

$$u_s = a_0 b_s + a_s b_0 + \sum_{(i,j,k) \in J_s} c_{ij}^{(k)}(q) a_i b_j$$

avec

$$J_s = \{(i, j, k) \mid i, j \geq 1, k \geq 0, i + j + k = s\}$$

et

$$c_{ij}^{(k)}(q) = q^{k+ij}(1-q)^k \frac{[i+k-1]![j+k-1]!}{[i-1]![j-1]![k]!}$$

### 2.3. Séries de factorielles arithmético-géométriques ou mixtes

Les définitions et résultats du paragraphe 2.2 peuvent se transcrire dans le plan de la variable  $x = \frac{t-1}{q-1}$ . Indiquons quelques résultats obtenus par ce procédé.

Convenons d'appeler *série de factorielles mixtes*, (c'est plus court), une série

$$\sum_{s \geq 0} a_s e_s^{(q)}(x) = a_0 + \sum_{s \geq 1} \frac{a_s}{x(qx + [1]_q)(q^2x + [2]_q) \cdots (q^{s-1}x + [s-1]_q)}.$$

Le domaine « naturel » de convergence d'une telle série est de la forme  $|x - \frac{1}{1-q}| > R$ ,  $x \notin [-\mathbf{N}]_q$ . Par exemple le développement en série de factorielles mixtes de la fonction  $\frac{1}{x-\alpha}$  est obtenu à partir de celui de  $\frac{1}{\alpha-t}$  en remplaçant  $t$  par  $(q-1)x+1$ ,  $\alpha$  par  $(q-1)\alpha+1$  et en multipliant par  $1-q$ . On obtient

$$\frac{1}{x-\alpha} = \sum_{s \geq 1} q^{s-1} \frac{e_s^{(q)}(x)}{e_{s-1}^{(q)}(\alpha)}.$$

Cette série converge pour  $|x - \frac{1}{1-q}| > |\alpha - \frac{1}{1-q}|$ ,  $x \notin [-\mathbf{N}]_q$ . Remarquons que, cette fois, le domaine de convergence dépend de  $q$ .

La transcription du théorème 2.4 et le lemme 2.3 permettent d'énoncer la

PROPOSITION 2.8. —

1. Si la série  $\sum_{s \geq 0} a_s e_s^{(q)}(x)$  converge en  $x_0 \in \mathbf{C}$ , elle converge pour tout

$x \notin [-\mathbf{N}]_q$  tel que  $|x - \frac{1}{1-q}| > |x_0 - \frac{1}{1-q}|$ . La convergence est uniforme sur tout domaine  $\left\{ |x - \frac{1}{1-q}| \geq R, d(x, [-\mathbf{N}]_q) \geq \varepsilon \right\}$  où

$R > |x_0 - \frac{1}{1-q}|$  et  $\varepsilon > 0$ .

2. Soit  $(a_s)_{s \geq 0}$ , une suite de nombres complexes. S'il existe  $\alpha \in \mathbf{C} \setminus [-\mathbf{N}]_q$  et  $M > 0$  tels que pour tout  $s$ ,  $|a_s| \leq \frac{M}{|e_s^{(q)}(\alpha)|}$ , la série  $\sum_{s \geq 0} a_s e_s^{(q)}(x)$  converge pour tout  $x \notin [-\mathbf{N}]_q$  tel que  $\left| x - \frac{1}{1-q} \right| > \left| \alpha - \frac{1}{1-q} \right|$  et sa somme est holomorphe dans ce domaine et à l'infini.

La formule d'homothétie (proposition 2.5) se transcrit de deux façons différentes. L'une s'obtient en remplaçant  $\beta$  par  $q^\beta = (q-1)[\beta]_q + 1$ . On trouve

$$e_n^{(q)}(q^{-\beta}x + [-\beta]_q) = q^{n\beta} \sum_{s=0}^{\infty} q^s \left[ n + \frac{s}{q} - 1 \right] \frac{e_{n+s}^{(q)}(x)}{e_s^{(q)}([\beta]_q)}$$

où la série converge pour  $\left| x - \frac{1}{1-q} \right| > \left| \frac{q^\beta}{q-1} \right|$ ,  $x \notin [-\mathbf{N}]_q$ . La somme est finie et comporte  $k+1$  termes si  $\beta = -k$  où  $k \in \mathbf{N}$ . L'autre correspond au remplacement de  $\beta$  par  $(q-1)\beta + 1$ . On obtient

$$e_n^{(q)}\left(\frac{x-\beta}{(q-1)\beta+1}\right) = ((q-1)\beta+1)^n \sum_{s=0}^{\infty} q^s \left[ n + \frac{s}{q} - 1 \right] \frac{e_{n+s}^{(q)}(x)}{e_s^{(q)}(\beta)}$$

où la série converge pour  $\left| x - \frac{1}{1-q} \right| > \left| \beta - \frac{1}{1-q} \right|$ ,  $x \notin [-\mathbf{N}]_q$ . La somme est finie et comporte  $k+1$  termes si  $\beta = [-k]_q$  où  $k \in \mathbf{N}$ .

PROPOSITION 2.9. — *Le produit de deux séries de factorielles mixtes convergentes est une série convergente au moins dans le plus petit des domaines correspondants aux facteurs et*

$$\sum_{s \geq 0} a_s e_s^{(q)}(x) \cdot \sum_{s \geq 0} b_s e_s^{(q)}(x) = \sum_{s \geq 0} u_s e_s^{(q)}(x)$$

où  $u_0 = a_0 b_0$ ,  $u_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$  et pour  $s \geq 2$ ,

$$u_s = a_0 b_s + a_s b_0 + \sum_{(i,j,k) \in J_s} \tilde{c}_{ij}^{(k)}(q) a_i b_j$$

avec

$$J_s = \{(i, j, k) \mid i, j \geq 1, k \geq 0, i + j + k = s\}$$

et

$$\tilde{c}_{ij}^{(k)}(q) = q^{k+ij} \frac{[i+k-1]![j+k-1]!}{[i-1]![j-1]![k]!}$$

### 3. Convergence des séries de $q$ -factorielles et de factorielles mixtes vers les séries de factorielles

Il y a deux façons d'aller du plan des  $t$  au plan des  $x$ . On peut faire le changement de variable  $t = (q - 1)x + 1$  et utiliser la relation déjà signalée

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{(1 - q)^s}{(q - 1)x + 1; q)_s} = \lim_{q \rightarrow 1} e_s^{(q)}(x) = x^{-[s]}.$$

Cela revient à considérer un développement en série de factorielles mixtes et à en étudier le comportement lorsque  $q \rightarrow 1$ .

On peut aussi faire le changement de variable  $t = q^x$  et utiliser

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{(1 - q)^s}{(q^x; q)_s} = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{(1 - q)^s}{(1 - q^x)(1 - q^{x+1}) \cdots (1 - q^{x+s-1})} = x^{-[s]}.$$

Dans les deux cas, on supposera que  $q$  est réel et  $q > 1$ .

#### 3.1. L'exemple type de la fonction $\frac{1}{x - \alpha}$

Partons du développement en séries de factorielles mixtes

$$\frac{1}{x - \alpha} = \sum_{s \geq 1} q^{s-1} \frac{e_s^{(q)}(x)}{e_{s-1}^{(q)}(\alpha)}.$$

On a dit au paragraphe 2.3 qu'il était déduit par le changement de variable  $t = (q - 1)x + 1$  de celui de la fonction  $f_q(t) = \frac{1 - q}{(q - 1)\alpha + 1 - t}$  en série de  $q$ -factorielles. Pour  $x \notin [-\mathbf{N}]_q$ , la série de factorielles mixtes converge si  $|x - \frac{1}{1 - q}| > |\alpha - \frac{1}{1 - q}|$ . Cette condition exprime que  $x$  est extérieur au cercle de centre  $\frac{1}{1 - q}$  passant par  $\alpha$ . Le centre de ce cercle est situé sur l'axe réel négatif et tend vers  $-\infty$  quand  $q \rightarrow 1^+$ . On voit alors aisément que tout point d'un demi-plan  $\Re x \geq \mu > \Re \alpha$  vérifie cette condition pour  $q$  tel que  $1 < q < q_0$  où  $q_0$  dépend de  $\alpha$  et de la différence  $\mu - \Re \alpha$  et tend vers 1 quand cette différence tend vers 0. D'autre part  $[-\mathbf{N}]_q$  tend vers  $-\mathbf{N}$  quand  $q$  tend vers 1. Remarquons enfin que la série obtenue en prenant la limite terme à terme,

$$\sum_{s \geq 1} \frac{x^{-[s]}}{\alpha^{-[s-1]}} = \frac{1}{x} + \sum_{s \geq 2} \frac{\alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + s - 2)}{x(x + 1) \cdots (x + s - 1)},$$

constitue le développement en séries de factorielles de  $\frac{1}{x - \alpha}$  et que cette série a pour abscisse de convergence  $\Re\alpha$ .

On peut suivre une démarche analogue en partant du développement de  $\frac{1}{x - [\alpha]_q}$  qui correspond au remplacement de  $\alpha$  par  $q^\alpha = (q - 1)[\alpha]_q + 1$ . On obtient

$$\frac{1}{x - [\alpha]_q} = \sum_{s \geq 1} q^{s-1} \frac{e_s^{(q)}(x)}{e_{s-1}^{(q)}([\alpha]_q)}$$

série convergente pour  $x \notin [-\mathbf{N}]_q$  vérifiant  $|x - \frac{1}{1-q}| > \frac{q^{\Re\alpha}}{q-1}$ . En remarquant que  $\frac{q^{\Re\alpha}}{q-1} = [\Re\alpha]_q - \frac{1}{1-q}$ , on peut donner de cette condition la même interprétation géométrique que précédemment :  $x$  doit être extérieur au cercle de centre  $\frac{1}{1-q}$  passant par le point (réel)  $[\Re\alpha]_q$ . Ce point converge quand  $q \rightarrow 1^+$  vers  $\Re\alpha$  et le reste de l'analyse est inchangé.

La convergence de  $\frac{1}{x - [\alpha]_q}$  vers  $\frac{1}{x - \alpha}$  est uniforme sur  $|x - \alpha| \geq \mu > 0$ , a fortiori sur  $\Re x \geq \Re\alpha + \mu$ . En effet

$$\left| \frac{1}{x - [\alpha]_q} - \frac{1}{x - \alpha} \right| = \frac{|[\alpha]_q - \alpha|}{|x - \alpha| |x - [\alpha]_q|}$$

Puisque  $|[\alpha]_q - \alpha| \rightarrow 0$ , il existe  $q_0$  tel que si  $1 < q < q_0$ ,  $|[\alpha]_q - \alpha| \leq \frac{1}{2}\mu$  et donc  $|x - [\alpha]_q| \geq |x - \alpha| - |[\alpha]_q - \alpha| \geq \frac{1}{2}\mu$ . On en déduit

$$\left| \frac{1}{x - [\alpha]_q} - \frac{1}{x - \alpha} \right| \leq \frac{2}{\mu^2} |[\alpha]_q - \alpha|.$$

Examinons ensuite le deuxième type de confluence. Cette fois on part du développement en série de  $q$ -factorielles de  $f_q(t)$  et on y fait le changement de variable  $t = q^x = e^{x \ln q}$  où  $\ln q$  est un réel positif. La fonction  $f_q(q^x) = \frac{1}{[x]_q - \alpha}$  est définie, holomorphe pour  $x \notin \frac{\ln(1+(q-1)\alpha)}{\ln q} + \frac{2i\pi}{\ln q} \mathbf{Z}$  et tend vers  $\frac{1}{x - \alpha}$  quand  $q \rightarrow 1$ . Remarquons que ceci a lieu pour tout  $x \neq \alpha$ .  
On a

$$\frac{1}{[x]_q - \alpha} = (1 - q) \sum_{s \geq 1} q^{s-1} \frac{((q-1)\alpha + 1; q)_{s-1}}{(q^x; q)_s}$$

où la série converge pour  $x \notin -\mathbf{N} + \frac{2i\pi}{\ln q} \mathbf{Z}$  et  $|q^x| > |(q-1)\alpha + 1|$ , ou encore,

puisque  $q > 1$ ,  $\Re x > \lambda_q$  où  $\lambda_q = \frac{\ln |(q-1)\alpha + 1|}{\ln q}$ .

Comme  $\ln |(q-1)\alpha + 1| = \frac{1}{2} \ln(1 + 2(q-1)\Re\alpha + (q-1)^2|\alpha|^2)$ , on en déduit  $\lim_{q \rightarrow 1} \lambda_q = \Re\alpha$ .

Si on adopte le paramètre  $q^\alpha$ , on est conduit à étudier la fonction  $\frac{q-1}{q^x - q^\alpha}$ , qui est définie holomorphe dans  $\mathbf{C} \setminus (\alpha + \frac{2i\pi}{\ln q}\mathbf{Z})$  et converge aussi vers  $\frac{1}{x - \alpha}$ , et dont le développement en séries de  $q$ -factorielles

$$\frac{q-1}{q^x - q^\alpha} = (1-q) \sum_{s \geq 1} q^{s-1} \frac{(q^\alpha; q)_{s-1}}{(q^x; q)_s}$$

converge pour  $x \notin -\mathbf{N} + \frac{2i\pi}{\ln q}\mathbf{Z}$  et  $|q^x| > |q^\alpha|$ , c'est-à-dire dans le demi-plan  $\Re x > \Re\alpha$ , privé, si  $\Re\alpha < 0$ , des points de  $-\mathbf{N} + \frac{2i\pi}{\ln q}\mathbf{Z}$ .

Dans chacun des deux cas la convergence terme à terme est aisément constatée.

### 3.2. Quelques résultats généraux

Voici un théorème qui permet d'effectuer le premier type de confluence.

**THÉORÈME 3.1.** — *Soit  $(a_s(q))_{s \geq 0}$  une suite de nombres complexes définie pour  $q$  réel tel que  $1 < q \leq q_0$  et vérifiant*

1. *il existe  $M > 0$  et  $\lambda \in \mathbf{R} \setminus -\mathbf{N}$  tels que pour tout  $s \in \mathbf{N}^*$  et tout  $1 < q \leq q_0$ ,  $|a_s(q)| \leq \frac{M}{|e_s^{(q)}(\lambda)|}$ ,*
2.  $\lim_{q \rightarrow 1^+} a_s(q) = a_s$ .

Alors la série de factorielles  $\sum_{s=0}^{\infty} a_s x^{-[s]}$  converge pour tout  $x$  tel que  $\Re x > \lambda + 1$  et  $x \notin -\mathbf{N}$ . Sa somme  $f(x)$  est une fonction méromorphe dont les pôles sont simples et appartiennent à  $-\mathbf{N}$ .

Pour tout  $x$  tel que  $x \notin [-\mathbf{N}]_q$  et  $|x - \frac{1}{1-q}| > |\lambda - \frac{1}{1-q}|$ , la série de factorielles mixtes  $\sum_{s=0}^{\infty} a_s(q) e_s^{(q)}(x)$  converge et sa somme  $f_q(x)$  est une

fonction méromorphe dont les pôles sont simples et appartiennent à  $[-\mathbf{N}]_q$ . Elle vérifie

$$\lim_{q \rightarrow 1^+} f_q(x) = f(x)$$

uniformément sur  $\{\Re x \geq \mu, d(x, -\mathbf{N}) \geq \varepsilon\}$  pour tout  $\mu > \lambda + 1$  et tout  $\varepsilon > 0$ .

*Preuve.* — La première condition s'explique en

$$|a_s(q)| \leq M \left| \prod_{k=0}^{s-1} (q^k \lambda + [k]_q) \right|$$

et le terme de droite a pour limite quand  $q \rightarrow 1$ ,  $M \left| \frac{\Gamma(\lambda + s)}{\Gamma(\lambda)} \right|$ . La deuxième hypothèse et l'usage de la formule de Stirling conduisent à la majoration  $|a_s| \leq M' s^\lambda \Gamma(s)$ , à partir de laquelle les affirmations concernant la série de factorielles ont été rappelées au paragraphe 2.1.

La première condition assure que la série de factorielles mixtes converge pour  $|x - \frac{1}{1-q}| > |\lambda - \frac{1}{1-q}|$ ,  $x \notin [-\mathbf{N}]_q$  et possède les propriétés indiquées.

On prouve la convergence de  $f_q(x)$  vers  $f(x)$  par un argument de convergence dominée. Pour tout entier  $s \geq 1$ , on a

$$U_s(q) = \left| a_s(q) e_s^{(q)}(x) \right| \leq M \prod_{k=0}^{s-1} \left| \frac{q^k \lambda + [k]_q}{q^k x + [k]_q} \right|$$

Pour majorer ce produit on utilise la propriété suivante. Soit  $u$  et  $v$  deux réels tels que  $u < v$ , alors si  $k_0 \in \mathbf{N}$  est tel que  $k_0 + u > 0$ , il existe  $q_1 > 1$  tel que pour tout  $1 \leq q \leq q_1$ ,  $q^{k_0} u + [k_0]_q > 0$ , puisque cette quantité a pour limite  $u + k_0 > 0$  quand  $q$  tend vers 1. Alors, pour tout  $1 \leq q \leq q_1$  et tout  $k \geq k_0$ , on a  $\frac{q^k u + [k]_q}{q^k v + [k]_q} < \frac{u + k}{v + k}$ . En effet, puisque  $q^{k+1} u + [k+1]_q = q(q^k u + [k]_q) + 1$  et que  $q^k v + [k]_q > q^k u + [k]_q$ , les 4 termes de la formule sont positifs pour  $k \geq k_0$  et  $1 \leq q \leq q_1$ . Il suffit donc de montrer que sous les mêmes conditions,  $(v - u)(kq^k - [k]_q) > 0$ . Or  $kq^k - [k]_q = (q - 1)(kq^{k-1} + (k - 1)q^{k-2} + \dots + 2q + 1) > 0$ .

Pour  $\Re x > \lambda$ , en désignant par  $N$  l'entier positif à partir duquel  $N + \lambda > 0$  et en supposant  $s > N$ , on a alors pour  $s > N$  et  $1 < q \leq q_2 = \min(q_0, q_1)$ ,

$$U_s(q) \leq MC(N, x, \lambda) \prod_{k=N}^{s-1} \frac{\lambda + k}{\Re x + k} = MC(N, x, \lambda) \left| \frac{\Gamma(\Re x + N) \Gamma(\lambda + s)}{\Gamma(\lambda + N) \Gamma(\Re x + s)} \right|$$

où  $C(N, x, \lambda) = \sup_{1 \leq q \leq q_2} \prod_{k=0}^{N-1} \left| \frac{q^k \lambda + [k]_q}{q^k x + [k]_q} \right|$  qui est fini puisque  $x \notin [-\mathbf{N}]_q$ .

La formule de Stirling permet d'en déduire l'estimation  $U_s(q) = O(s^{\lambda - \Re x})$  et la convergence de la série pour  $\Re x > \lambda + 1$ .

Pour établir la convergence uniforme sur les domaines indiqués, on s'inspire de la preuve de la même propriété pour les séries de factorielles. Fixons  $\mu > \lambda + 1$ . D'après ce qui précède, il existe  $C > 0$  et  $Q_0 > 1$  tels que pour tout  $q \in ]1, Q_0]$ ,  $\left| a_s(q) e_s^{(q)}(\mu) \right| \leq \frac{C}{s^{\mu - \lambda}}$ . On supposera aussi, quitte à diminuer  $Q_0$ , que pour  $1 \leq q \leq Q_0$ ,  $\mu \notin [-\mathbf{N}]_q$ . Comme ci-dessus, on peut trouver  $n_0 \in \mathbf{N}^*$  et  $1 < Q_1 \leq Q_0$  tels que pour tout  $s \geq n_0$  et tout  $q \in [1, Q_1]$ ,  $q^s \mu + [s]_q > 0$ . Dans ce qui suit on supposera toujours que  $s$  et  $q$  vérifient ces contraintes. On utilise une transformation d'Abel pour majorer  $\left| \sum_{s=m}^n a_s(q) e_s^{(q)}(x) \right|$  en écrivant  $a_s(q) e_s^{(q)}(x) = b_s(q) c_s(q)$  où  $b_s(q) = a_s(q) e_s^{(q)}(\mu)$  et

$$c_s(q) = \frac{e_s^{(q)}(x)}{e_s^{(q)}(\mu)} = \prod_{k=0}^{s-1} \frac{q^k \mu + [k]_q}{q^k x + [k]_q}$$

de sorte que

$$c_s(q) - c_{s+1}(q) = c_s(q) \frac{q^s(x - \mu)}{q^s x + [s]_q}.$$

Supposons  $\Re x \geq \mu + \delta$  et  $d(x, -\mathbf{N}) \geq \delta$  où  $\delta > 0$ . En utilisant pour  $k \geq n_0$  les inégalités  $|q^k x + [k]_q| \geq q^k \Re x + [k]_q \geq q^k(\mu + \delta) + [k]_q \geq q^k \mu + [k]_q > 0$ , on obtient :

$$|c_s(q) - c_{s+1}(q)| \leq \left| \frac{\mu(x - \mu)}{x} \right| \left| \prod_{k=1}^{n_0-1} \frac{\mu + q_k}{x + q_k} \right| \frac{q^s d_s(q)}{q^s(\mu + \delta) + [s]_q}$$

où  $q_k = q^{-k} [k]_q = \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots + \frac{1}{q^k}$  et

$$d_s(q) = \prod_{k=n_0}^{s-1} \frac{q^k \mu + [k]_q}{q^k(\mu + \delta) + [s]_q}.$$

En remarquant que l'hypothèse  $d(x, -\mathbf{N}) \geq \delta$  implique  $|x| \geq \delta$ , on peut majorer le premier facteur par  $C_1(\mu, \delta) = |\mu| \left(1 + \frac{|\mu|}{\delta}\right)$ . Le second facteur, qui est



absent si  $n_0 = 1$ , se majore en remarquant que, puisque  $\frac{k}{q^k} < q_k < \frac{k}{q} < k$ ,

$$|x + q_k| \geq |x + k| - k\left(1 - \frac{1}{q^k}\right) \geq \delta - n_0\left(1 - \frac{1}{q^{n_0}}\right) \geq \frac{\delta}{2}$$

si  $Q_1$  est choisi suffisamment proche de 1. Le deuxième facteur est alors inférieur à

$$C_2(\mu, \delta) = \left(\frac{2}{\delta}\right)^{n_0-1} \prod_{k=1}^{n_0-1} (|\mu| + k).$$

On note ensuite que  $d_s(q) \in ]0, 1[$  et que

$$d_s(q) - d_{s+1}(q) = d_s(q) \frac{q^s \delta}{q^s(\mu + \delta) + [s]_q}$$

de sorte que

$$|c_s(q) - c_{s+1}(q)| \leq C(d_s(q) - d_{s+1}(q))$$

avec  $C = \frac{C_1(\mu, \delta)C_2(\mu, \delta)}{\delta}$ .

D'autre part, toujours sous les mêmes hypothèses et avec les mêmes notations, on a la majoration

$$|c_s(q)| \leq \left|\frac{\mu}{x}\right| \prod_{k=1}^{n_0-1} \frac{|\mu + q_k|}{|x + q_k|} d_s(q) \leq \frac{|\mu|}{\delta} C_2(\mu, \delta) d_s(q) \leq C d_s(q)$$

puisque  $C_1(\mu, \delta) \geq |\mu|$ .

Maintenant, la convergence de la série  $\sum_{s \geq 0} a_s(q) e_s^{(q)}(\mu)$  implique, d'après la première partie, que, pour  $\varepsilon > 0$  fixé, on peut déterminer  $N > n_0$  tel que pour tout  $n > m > N$  et tout  $q \in ]1, Q_1]$ ,  $\left| \sum_{s=m}^n b_s(q) \right| < \frac{\varepsilon}{C}$ .

La transformation d'Abel s'écrit

$$\sum_{s=m}^n b_s(q) c_s(q) = \sum_{s=1}^{n-1} B_s(q) (c_s(q) - c_{s+1}(q)) + c_n(q) B_n(q)$$

où  $B_s(q) = \sum_{k=m}^s b_k(q)$ . Les majorations indiquées donnent donc

$$\left| \sum_{s=m}^n b_s(q) c_s(q) \right| \leq \varepsilon \left( \sum_{s=m}^{n-1} (d_s(q) - d_{s+1}(q)) + d_n(q) \right) = \varepsilon d_m(q) \leq \varepsilon.$$

La preuve est ainsi achevée.  $\square$

Voici maintenant un théorème concernant le second type de confluence.

**THÉORÈME 3.2.** — Soit  $(a_s(q))_{s \geq 0}$  une suite de nombres complexes définie pour  $q$  réel tel que  $1 < q \leq q_0$  et vérifiant

1. il existe  $M > 0$  et  $\lambda \in \mathbf{R} \setminus -\mathbf{N}$  tels que pour tout  $s \in \mathbf{N}^*$  et tout  $1 < q \leq q_0$ ,  $|a_s(q)| \leq M|(q^\lambda; q)_s|$ ,
2.  $\lim_{q \rightarrow 1^+} a_s(q)(q-1)^{-s} = a_s$ .

Alors la série de factorielles  $\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s a_s x^{-[s]}$  converge pour tout  $x$  tel que  $\Re x > \lambda + 1$  et  $x \notin -\mathbf{N}$ . Sa somme  $f(x)$  est une fonction méromorphe dont les pôles sont simples et appartiennent à  $-\mathbf{N}$ .

Pour tout  $t$  tel que  $t \notin q^{-\mathbf{N}}$  et  $|t| > q^\lambda$ , la série de  $q$ -factorielles  $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s(q)}{(t; q)_s}$  converge et sa somme  $f_q(t)$  est une fonction méromorphe dans  $|t| > q^\lambda$  dont les pôles sont simples et appartiennent à  $q^{-\mathbf{N}}$ . La fonction  $f_q(q^x)$  est méromorphe dans  $\Re x > \Re \lambda$ , à pôles simples appartenant à  $-\mathbf{N} + \frac{2i\pi}{\ln q} \mathbf{Z}$ .

Elle vérifie

$$\lim_{q \rightarrow 1^+} f_q(q^x) = f(x)$$

uniformément sur  $\{\Re x \geq \mu, d(x, -\mathbf{N}) \geq \varepsilon\}$ ,  $d(x, -\mathbf{N} + I_K) \geq \varepsilon\}$ , pour tout  $\mu > \lambda + 1$ , tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $K > 0$ , avec  $I_K = \{\sigma + i\tau \mid \sigma = 0, |\tau| \geq K\}$ .

*Preuve.* — La première condition s'écrit maintenant, pour  $s \geq 1$  et  $1 < q \leq q_0$ ,

$$|a_s(q)|(q-1)^{-s} \leq M \left| \prod_{k=0}^{s-1} [\lambda + k]_q \right|$$

et le passage à la limite s'effectue comme dans le cas précédent.

Cette fois

$$U_s(q) = \left| \frac{a_s(q)}{(q^x; q)_s} \right| \leq M \prod_{k=0}^{s-1} \left| \frac{q^{k+\lambda} - 1}{q^{x+k} - 1} \right|$$

Pour majorer ce produit on utilise le lemme élémentaire suivant dont nous donnons la preuve pour ne pas en chercher de référence.

**LEMME 3.3.** — Si  $u$  et  $v$  sont deux réels non nuls tels que  $u < v$ , alors pour tout  $q > 1$ ,  $\left| \frac{q^u - 1}{q^v - 1} \right| < \left| \frac{u}{v} \right|$ .

*Preuve.* — Il suffit de montrer que pour tout  $q > 1$ ,  $\varphi(q) = |v(q^u - 1)| - |u(q^v - 1)|$  est négatif. Or si  $0 < u < v$ ,  $\varphi(q) = v(q^u - 1) - u(q^v - 1)$  qui est nul en  $q = 1$  et dont la dérivée  $\varphi'(q) = \frac{1}{q}uv(q^u - q^v)$  est négative pour  $q > 1$ . Si  $u < v < 0$ ,  $\varphi(q) = -v(1 - q^u) + u(1 - q^v)$  et la situation est la même. Si enfin  $u < 0 < v$ ,  $\varphi(q) = v(1 - q^u) + u(q^v - 1)$  dont la dérivée,  $-\frac{1}{q}uv(q^u - q^v)$  est encore négative pour  $q > 1$ .  $\square$

Appelons  $N$  l'entier positif à partir duquel  $N + \lambda > 0$ . Pour  $\Re x > \lambda$  et  $s > N$ , en utilisant, pour les termes correspondants à  $k \geq N$ , la majoration  $|q^z - 1| \geq q^{\Re z} - 1$  et le lemme, on obtient

$$U_s(q) \leq M\tilde{C}(N, x, \lambda) \prod_{k=N}^{s-1} \frac{\lambda + k}{\Re x + k}$$

avec  $\tilde{C}(N, x, \lambda) = \sup_{1 \leq q \leq q_2} \prod_{k=0}^{N-1} \left| \frac{q^{k+\lambda} - 1}{q^{k+x} - 1} \right|$  qui est fini puisque  $x \notin [-N]_q$ . On est ainsi dans la même situation que dans le théorème précédent.

Pour établir la convergence uniforme on suit la même démarche que plus haut. On fixe un réel  $\mu > \lambda + 1$  de façon à assurer la convergence de la série  $\sum_{s \geq 0} \left| \frac{a_s(q)}{(q^\mu; q)_s} \right|$  dominée sur  $[1, Q_1]$  par celle d'une série  $\frac{C}{s^{\mu-\lambda}}$ . Fixons aussi  $n_0$  tel que  $\mu + n_0 > 0$ .

Ecrivons  $\frac{a_s(q)}{(q^x; q)_s} = b_s(q)c_s(q)$  où  $b_s(q) = \frac{a_s(q)}{(q^\mu; q)_s}$  et

$$c_s(q) = \frac{(q^\mu; q)_s}{(q^x; q)_s} = \prod_{k=0}^{s-1} \frac{q^{\mu+k} - 1}{q^{x+k} - 1}$$

d'où

$$c_s(q) - c_{s+1}(q) = c_s(q) \frac{q^{s+\mu}(q^{x-\mu} - 1)}{q^{x+s} - 1}$$

On suppose  $\Re x \geq \mu + \delta$  où  $\delta > 0$  et on utilise pour  $k \geq n_0$  la minoration  $|q^{x+k} - 1| \geq q^{\Re x+k} - 1 \geq q^{\mu+\delta+k} - 1$  pour obtenir

$$|c_s(q) - c_{s+1}(q)| \leq \left| \frac{(q^{x-\mu} - 1)(q^\mu - 1)}{q^x - 1} \right| \left| \prod_{k=1}^{n_0-1} \frac{q^{\mu+k} - 1}{q^{x+k} - 1} \right| \frac{q^{s+\mu} d_s(q)}{q^{\mu+s+\delta} - 1}$$

avec

$$d_s(q) = \prod_{k=n_0}^{s-1} \frac{q^{\mu+k} - 1}{q^{\mu+k+\delta} - 1},$$

de sorte que  $d_s(q) \in ]0, 1[$  et que

$$d_s(q) - d_{s+1}(q) = d_s(q) \frac{q^{s+\mu}(q^\delta - 1)}{q^{\mu+s+\delta} - 1}.$$

On pourra donc remplacer  $\frac{q^{s+\mu}d_s(q)}{q^{\mu+s+\delta} - 1}$  par  $\frac{d_s(q) - d_{s+1}(q)}{q^\delta - 1}$ .

Pour achever la preuve de la même façon que dans le théorème précédent, il faut majorer les deux autres termes. En remarquant que

$$\frac{(q^{x-\mu} - 1)(q^\mu - 1)}{(q^x - 1)(q^\delta - 1)} = \left(1 - \frac{q^\mu - 1}{q^x - 1}\right) \left(\frac{1 - q^{-\mu}}{q^\delta - 1}\right)$$

on voit déjà que si  $\mu > 0$  et  $\Re x > \mu + \delta$ , on peut en utilisant le lemme 3.3, majorer ceci par  $(1 + \frac{\mu}{\mu + \delta}) \frac{\mu}{\delta}$ . Comme dans ce cas le deuxième terme n'existe pas, ce cas est réglé.

Lorsque  $\mu < 0$ , on peut supposer que  $\delta$  est choisi tel que  $2\delta < -\mu$  et le module du deuxième facteur s'écrit  $q^{-\mu-\delta} \left| \frac{q^\mu - 1}{q^{-\delta} - 1} \right|$  et se majore par  $Q_1^{-\mu-\delta} \frac{|\mu|}{\delta}$  pour  $1 < q < Q_1$ . Le terme  $\frac{q^\mu - 1}{q^x - 1}$  est du même type que les autres termes du second facteur. On les majore grâce au lemme

LEMME 3.4. — Soit  $\mu < 0$ ,  $\delta > 0$  tel que  $2\delta < -\mu$ . Il existe  $Q > 1$  tel que pour tout  $q \in ]1, Q[$  et tout  $x \in U_{\mu, \delta, Q}$  défini par

$$U_{\mu, \delta, Q} = \left\{ x \in \mathbf{C} \mid \Re x > \mu + \delta, |x| > \delta, |\Im x| < \frac{2\pi}{\ln Q} \text{ ou } |\Re x| > \delta \right\}$$

on ait

$$\left| \frac{q^\mu - 1}{q^x - 1} \right| \leq 2Q^{\frac{\delta}{2}} \frac{|\mu|}{\delta}$$

Preuve. — La fonction  $g(x) = \frac{q^\mu - 1}{q^x - 1}$  est holomorphe dans  $\mathbf{C} \setminus \frac{2i\pi}{\ln q} \mathbf{Z}$  et  $\frac{2i\pi}{\ln q}$ -périodique. Dans le domaine indiqué et pour  $1 < q < Q$ , le seul pôle de  $g$  est  $x = 0$  et il suffit en posant  $x = \sigma + i\tau$ , de majorer  $g$  sur le domaine  $\{\sigma > \mu + \delta, |\tau| < \frac{\pi}{\ln q}, \sigma^2 + \tau^2 > \delta^2\}$ . Par le principe du maximum il suffit d'étudier  $|g(x)|$  sur la frontière de ce domaine. On a

$$|q^x - 1|^2 = q^{2\sigma} + 1 - 2q^\sigma \cos(\tau \ln q)$$

Pour  $\tau = \pm \frac{\pi}{\ln q}$ ,  $|q^x - 1| = q^\sigma + 1 > 1$  et  $|g(x)| \leq |q^\mu - 1| \leq |\mu| \ln q$  puisque  $\mu < 0$ . Cette quantité tend vers 0 quand  $q \rightarrow 1$  et ce n'est pas là qu'il faut chercher le maximum.

Pour  $\sigma = \mu + \delta$  et  $|\tau| < \frac{\pi}{\ln q}$ ,  $|q^x - 1| \geq |q^\sigma - 1| = 1 - q^{\mu+\delta}$  et

$$|g(x)| \leq \left| \frac{q^\mu - 1}{q^{\mu+\delta} - 1} \right| \leq \frac{|\mu|}{|\mu + \delta|} < \frac{|\mu|}{\delta}$$

puisque  $|\mu + \delta| = -\mu - \delta > \delta$ .

Enfin si  $|x| = \delta$  et donc  $\sigma = \delta \cos \theta$  et  $\tau = \delta \sin \theta$  où  $\theta \in [-\pi, \pi]$ , on a, en posant  $u = \delta \ln q$ ,

$$\begin{aligned} |q^x - 1|^2 &= e^{2u \cos \theta} + 1 - 2e^{u \cos \theta} \cos(u \sin \theta) \\ &= 2e^{u \cos \theta} (\cosh(u \cos \theta) - \cos(u \sin \theta)) \\ &= 2e^{u \cos \theta} \sum_{j \geq 0} (\cos^{2j} \theta + (-1)^{j+1} \sin^{2j} \theta) \frac{u^{2j}}{(2j)!} \\ &\geq e^{-u} u^2 (1 - \varphi(u)) \end{aligned}$$

où  $\varphi(u) = 2 \sum_{j \geq 2} \frac{u^{2j}}{(2j)!}$  tend vers 0 quand  $u \rightarrow 0$ . Donc on peut choisir  $Q$

assez proche de 1 pour que  $0 < \varphi(\delta \ln q) < \frac{1}{2}$  pour  $1 < q < Q$ . Dans ces conditions, en majorant  $|q^\mu - 1|$  par  $|\mu| \ln q$ , on obtient

$$|g(x)| \leq \frac{2q^{\frac{\delta}{2}} |\mu| \ln q}{\delta \ln q} \leq 2Q^{\frac{\delta}{2}} \frac{|\mu|}{\delta}$$

et cela fournit la majoration annoncée puisque  $2Q^{\frac{\delta}{2}} > 1$ .  $\square$

On applique ce lemme en remarquant que pour  $K > 0$  fixé, on peut choisir  $Q_1$  tel que  $K \ln Q_1 < 2\pi$ . On peut alors majorer  $1 - \frac{q^\mu - 1}{q^x - 1}$  par  $1 + 2Q_1^{\frac{\delta}{2}} \frac{|\mu|}{\delta}$  et chaque facteur  $\frac{q^{\mu+k} - 1}{q^{x+k} - 1}$ , ( $k < n_0$ ), par  $2Q_1^{\frac{\delta}{2}} \frac{|\mu + k|}{\delta}$ . On obtient ainsi une majoration analogue au cas précédent et on conclut de la même façon.  $\square$

Il est naturel de comparer les hypothèses indiquées pour chacun de ces théorèmes. Pour arriver à la même série de factorielles  $\sum_{s \geq 0} a_s x^{-[s]}$ , d'abscisse de convergence absolue  $\lambda + 1$ , le premier théorème demande

que  $a_s = \lim_{q \rightarrow 1^+} a_s(q)$  où la suite  $(a_s(q)e_s^{(q)}(\lambda))_{s \geq 0}$  est bornée par une constante indépendante de  $q$  lorsque  $q$  est assez proche de 1. Pour atteindre ce même objectif le second théorème demande que  $a_s = \lim_{q \rightarrow 1^+} b_s(q)$  où la suite

$\left( \frac{b_s(q)(q-1)^s}{(q^\lambda; q)_s} \right)_{s \geq 0}$  vérifie la même condition. On peut alors se demander si l'une de ces deux conditions implique l'autre pour une même suite  $a_s(q)$  ou lorsque les suites  $a_s(q)$  et  $b_s(q)$  sont reliées d'une façon à préciser.

Une réponse à la première question peut s'obtenir en étudiant la suite définie par

$$\left| (q-1)^{-s} e_s^{(q)}(\lambda) (q^\lambda; q)_s \right| = \prod_{k=0}^{s-1} \frac{|q^{\lambda+k} - 1|}{|q^k((q-1)\lambda + 1) - 1|} = \prod_{k=0}^{s-1} \frac{N_k(\lambda)}{D_k(\lambda)}.$$

Remarquons d'abord que  $N_k(1) = D_k(1) = q^{k+1} - 1$  pour tout  $k$ . Si  $\lambda = 1$ , les hypothèses des deux théorèmes sont identiques.

Revenons au cas général. On a  $N_k(\lambda) = q^{\lambda+k} - 1$  dès que  $\lambda + k > 0$  et  $D_k(\lambda) = q^k((q-1)\lambda + 1) - 1$  pour tout  $k$  si  $\lambda > 0$  et pour tout  $k$  assez grand si  $\lambda < 0$  et que l'on impose  $q < 1 - \frac{1}{\lambda}$ . Assurons-nous que ceci a lieu pour tout  $k$  tel que  $k + \lambda > 1$ , à condition d'imposer à  $q$  une condition un peu plus restrictive dans certains cas. La fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par  $\varphi(u) = q^u((q-1)\lambda + 1) - 1$  vérifie  $\varphi(0) = (q-1)\lambda \in ]-1, 0[$  et est strictement croissante. Elle change de signe en

$$u_0 = -\frac{\ln(1 + (q-1)\lambda)}{\ln q} = -\lambda + \frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)(q-1) + O((q-1)^2)$$

On a toujours  $u_0 > -\lambda$ , mais en supposant  $q < 1 + \frac{2}{\lambda(\lambda-1)}$ , on a  $u_0 < -\lambda + 1$ . Cette condition est plus restrictive que la précédente si  $\lambda < -1$ . Dans tous les cas on peut donc supposer  $k$  assez grand pour que

$$N_k(\lambda) - D_k(\lambda) = q^{k+\lambda} - q^k((q-1)\lambda + 1) = q^k[q^\lambda - 1 - \lambda(q-1)]$$

qui a le signe de  $\psi_\lambda(q) = q^\lambda - 1 - \lambda(q-1)$ .

Si  $\lambda > 0$  le lemme 3.3 montre que le signe de  $\psi_\lambda(q)$  dépend de la position de  $\lambda$  par rapport à 1. Si  $\lambda < 0$ ,  $\psi'_\lambda(q) = \lambda(q^{\lambda-1} - 1) > 0$ , donc, pour  $q > 1$ ,  $\psi_\lambda(q) > \psi_\lambda(1) = 0$ . Ceci montre donc que

- Si le théorème 3.1 s'applique à la suite  $a_s(q)$  avec  $\lambda > 1$  ou  $\lambda < 0$ , le théorème 3.2 s'applique à la suite  $b_s(q) = a_s(q)(q-1)^s$  avec la même valeur pour  $\lambda$  et donne la même série de factorielle limite.

- Si le théorème 3.2 s'applique à la suite  $a_s(q)$  avec  $0 < \lambda < 1$ , le théorème 3.1 s'applique à la suite  $b_s(q) = a_s(q)(q-1)^{-s}$  avec la même valeur pour  $\lambda$  et donne la même série de factorielles limite.

D'autre part, si le théorème 3.1 s'applique à la suite  $a_s(q)$  avec  $0 < \lambda < 1$ , le théorème 3.2 s'applique à la suite  $b_s(q) = a_s(q)(q-1)^s$  avec  $\mu < \lambda$ , arbitrairement proche. En effet,  $N_k(\lambda) - D_k(\mu) = q^k(q-1) \left[ \frac{q^\lambda - 1}{q-1} - \mu \right]$  est alors  $> 0$  pour  $q$  assez proche de 1. On peut traiter de la même façon les deux autres cas.

Examinons, à titre d'exemple, comment le théorème 3.2 s'applique dans le dernier exemple proposé en introduction, c'est-à-dire lorsqu'on fait tendre  $q$  vers  $1^+$  dans la série obtenue après avoir effectué le changement de variable  $t = q^x$  dans le développement de  $\frac{q-1}{t-q^\alpha}$  en séries de  $q$ -factorielles.

Le coefficient de  $\frac{1}{(t; q)_s}$  pour  $s \geq 1$  est  $a_s(q) = -(q-1)q^{s-1}(q^\alpha; q)_{s-1}$ . Si  $\lambda \in \mathbf{R} \setminus -\mathbf{N}$  on a

$$\left| \frac{a_s(q)}{(q^\lambda; q)_s} \right| = \frac{(q-1)q^{s-1}}{|q^{\lambda+s} - 1|} \prod_{k=0}^{s-1} \left| \frac{q^{\alpha+k} - 1}{q^{\lambda+k} - 1} \right|$$

On commence par établir le lemme suivant.

LEMME 3.5. — *Pour tout  $\alpha \in \mathbf{C}$  et tout  $\lambda \in \mathbf{R}$  tel que  $\lambda > \Re \alpha$ , il existe  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que pour tout entier  $k \geq n_0$ , et tout  $q > 1$ ,  $|q^{\alpha+k} - 1| \leq q^{\lambda+k} - 1$ .*

*Preuve.* — Supposons que  $\alpha = a+ib$  et fixons  $\lambda > a$ . Alors  $\lambda+k > |\alpha+k|$  dès que  $k > \max \left( -\lambda, \frac{|\alpha|^2 - \lambda^2}{2(\lambda - a)} \right)$ . En effet pour  $k = \lambda > 0$  la condition équivaut à  $(\lambda+k)^2 > |\alpha+k|^2$ , ce qui se traduit par la deuxième inégalité puisque  $\lambda > a$ .

Supposons  $k$  choisi de cette façon et posons  $x = \alpha+k = \sigma+i\tau$  et  $y = \lambda+k$ , de sorte que  $y > |x| > \sigma$ . La fonction

$$\varphi(q) = (q^y - 1)^2 - |q^x - 1|^2 = q^{2y} - 2q^y - q^{2\sigma} + 2q^\sigma \cos(\tau \ln q)$$

vérifie  $\varphi(1) = 0$  et a le même signe que

$$\varphi_1(q) = q^{2y-\sigma} - 2q^{y-\sigma} - q^\sigma + 2 \cos(\tau \ln q)$$

dont la dérivée

$$\varphi'_1(q) = (2y - \sigma)q^{2y-\sigma-1} - 2(y - \sigma)q^{y-\sigma-1} - \sigma q^{\sigma-1} - 2\tau q^{-1} \sin(\tau \ln q)$$

vérifie  $\varphi'_1(1) = 0$ . La dérivée de  $\varphi_2(q) = q\varphi'_1(q)$  est

$$\varphi'_2(q) = (2y - \sigma)^2 q^{2y-\sigma-1} - 2(y - \sigma)^2 q^{y-\sigma-1} - \sigma^2 q^{\sigma-1} - 2\tau^2 q^{-1} \cos(\tau \ln q).$$

Donc  $\varphi'_2(1) = 2(y^2 - \tau^2 - \sigma^2) = 2(y^2 - |x|^2) > 0$  par hypothèse. De plus,  $q^{1+\sigma-2y}\varphi'_2(q) = (2y - \sigma)^2 - 2(y - \sigma)^2 q^{-y} - \sigma^2 q^{2\sigma-2y} - 2\tau^2 q^{\sigma-2y} \cos(\tau \ln q)$ . En remarquant que tous les exposants de  $q$  sont négatifs on voit que pour  $q \geq 1$ ,  $q^{1+\sigma-2y}\varphi'_2(q) \geq \varphi'_2(1) > 0$ . On en déduit que  $\varphi_2(q) = q\varphi'_1(q) > 0$  pour  $q > 1$  et finalement que  $\varphi(q) > 0$ .  $\square$

Supposons  $\lambda > a = \Re\alpha$  et non entier négatif. Pour  $s \geq n_0$ , on a donc

$$\left| \frac{a_s(q)}{(q^\lambda; q)_s} \right| \leq \frac{(q-1)q^{s-1}}{q^{\lambda+s} - 1} \prod_{k=0}^{n_0} \left| \frac{q^{\alpha+k} - 1}{q^{\lambda+k} - 1} \right|$$

Dès que  $s + \lambda > 1$ , on a  $\frac{(q-1)q^{s-1}}{q^{\lambda+s} - 1} < q^{-\lambda}$  puisque

$(q-1)q^{s-1} - q^{-\lambda}(q^{\lambda+s} - 1) = q^{-\lambda} - q^{s-1}$  est alors négatif. On peut donc majorer  $\left| \frac{a_s(q)}{(q^\lambda; q)_s} \right|$  par une quantité  $M(q)$ , indépendante de  $s$  et qui a une limite lorsque  $q$  tend vers  $1^+$ . Les hypothèses du théorème 3.2 sont donc remplies.

Remarquons encore que l'on aurait obtenu le même résultat, de façon même un peu plus naturelle à partir du développement en série de  $q$ -factorielles de la fonction  $\frac{q^\alpha(q-1)}{t-q^\alpha}$ . La seule différence intervient dans le terme  $\frac{(q-1)q^{s-1}}{q^{\lambda+s} - 1}$  qui devient  $\frac{(q-1)q^{\alpha+s-1}}{q^{\lambda+s} - 1}$  et se majore par le même argument que ci-dessus par  $q^{\Re\alpha-\lambda} \leq 1$ .

## 4. Opérateurs réguliers

### 4.1. Opérateurs aux différences réguliers en $+\infty$

Nous rappelons dans ce paragraphe quelques résultats classiques établissant la possibilité de résoudre à l'aide de séries de factorielles une classe de systèmes aux différences. Par commodité nous en donnons une preuve.



Notons  $gl(m, \mathbf{C})$  l'algèbre des matrices  $m \times m$  à coefficients dans  $\mathbf{C}$ .

Sur  $gl(m, \mathbf{C})$  et sur  $\mathbf{C}^m$  on suppose choisies des normes, notées  $\|\cdot\|$ , telles que pour  $A \in gl(m, \mathbf{C})$  et  $U \in \mathbf{C}^m$ , on ait  $\|AU\| \leq \|A\| \cdot \|U\|$ .

On considère des séries de factorielles  $A(x) = \sum_{s \geq 0} A_s x^{-[s]}$  dont les coefficients  $A_s$  appartiennent à  $gl(m, \mathbf{C})$  (resp.  $X(x) = \sum_{s \geq 0} X_s x^{-[s]}$  avec  $X_s \in \mathbf{C}^m$ ). La méthode des séries majorantes s'applique à ces séries ([3]) et montre qu'en posant  $a_s = \|A_s\|$  (resp.  $a_s = \|X_s\|$ ), la convergence de la série  $\sum_{s \geq 0} a_s x^{-[s]}$  (pour  $\Re x \gg 0$ ) entraîne celle de la série  $A(x)$  (resp.  $X(x)$ ). On écrit (abusivement...)  $A(x) \in gl(m, \mathcal{O}_f)$  (resp.  $X(x) \in \mathcal{O}_f^m$ ) pour dire que la série  $\sum_{s \geq 0} a_s x^{-[s]}$  appartient à  $\mathcal{O}_f$ .

Soit un système aux différences linéaire d'ordre  $m$  :

$$(x - 1) \underset{-1}{\Delta} X(x) = A(x)X(x)$$

où  $X(x)$  est un vecteur colonne de dimension  $m$  de fonctions inconnues et  $A(x) = \sum_{s \geq 0} A_s x^{-[s]} \in gl(m, \mathcal{O}_f)$ . Le résultat suivant explicite le cas qu'il est naturel de considérer comme non singulier en  $+\infty$ , c'est-à-dire où l'utilisation des séries de factorielles conduit à un analogue du théorème de Cauchy.

PROPOSITION 4.1. — Soit  $A(x) = \sum_{s \geq 0} A_s x^{-[s]} \in gl(m, \mathcal{O}_f)$ .

Le système  $(x - 1) \underset{-1}{\Delta} X(x) = A(x)X(x)$  admet pour tout  $U_0 \in \mathbf{C}^m$ , une solution série (formelle) de factorielles de terme constant  $U_0$  si et seulement si  $A_0 = 0$ . Dans ce cas la solution est unique et converge pour  $\Re x \gg 0$ .

Preuve. — Si  $X(x) = U_0 + \sum_{s \geq 1} X_s x^{-[s]}$  avec  $X_s \in \mathbf{C}^m$ , alors

$$(x - 1) \underset{-1}{\Delta} X(x) = - \sum_{s \geq 1} s X_s x^{-[s]}.$$

D'autre part

$$A(x)X(x) = A_0 U_0 + \sum_{s \geq 1} \left( A_0 X_s + A_s U_0 + \sum_{(j, \ell, k) \in J_s} c_{j, \ell}^{(k)} A_j X_\ell \right) x^{-[s]}.$$

Ceci montre que si  $A_0 \neq 0$ , on peut choisir  $U_0$  de sorte que  $A_0 U_0 \neq 0$  et le problème n'aura pas de solution formelle puisque  $(x-1) \underset{-1}{\Delta} X(x)$  a un terme constant nul.

Supposons donc  $A_0 = 0$  et établissons l'existence d'une unique solution formelle. En égalant le coefficient de  $x^{-[s]}$  dans les deux membres de l'égalité  $(x-1) \underset{-1}{\Delta} X(x) = A(x)X(x)$ , on obtient la liste de relations, pour  $s \geq 1$  :

$$sX_s + A_s U_0 + \sum_{(j,\ell,k) \in J_s} c_{j,\ell}^{(k)} A_j X_\ell = 0$$

qui définit de manière unique les  $X_s$  par récurrence.

Pour établir la convergence de cette série de factorielles, on prouve celle d'une série majorante. On pose  $u_0 = \|U_0\|$  et pour  $s \geq 0$ ,  $a_s = \|A_s\|$ . Par hypothèse la série  $\sum_{s \geq 1} a_s t^{-[s]}$  converge pour  $\Re t \gg 0$ . Notons  $a(t)$  sa somme.

La récurrence et le fait que les  $c_{j,\ell}^{(k)}$  sont positifs, permet d'obtenir la suite d'inégalités pour  $s \geq 1$ ,

$$x_s \leq \frac{1}{s} \left[ a_s u_0 + \sum_{(j,\ell,k) \in J_s} c_{j,\ell}^{(k)} a_j x_\ell \right] \leq a_s u_0 + \sum_{(j,\ell,k) \in J_s} c_{j,\ell}^{(k)} a_j x_\ell$$

Il y a deux manières de conclure. Nous développons ici la méthode basée sur la moins bonne majoration. L'autre argument, qui conduit à un résultat plus précis en ce qui concerne l'abscisse de convergence sera traité ailleurs. On définit par récurrence pour  $s \geq 1$ ,

$$\bar{x}_s = a_s u_0 + \sum_{(j,\ell,k) \in J_s} c_{j,\ell}^{(k)} a_j \bar{x}_\ell$$

de sorte que pour  $s \geq 1$ ,  $0 < x_s \leq \bar{x}_s$ . Il suffit d'établir la convergence de la série  $\sum_{s \geq 1} \bar{x}_s t^{-[s]}$  pour  $\Re t \gg 0$ . Notons  $\chi(t)$  la somme (au moins formelle) de cette série. Elle vérifie l'équation

$$\chi(t) = \sum_{s \geq 1} \left[ a_s u_0 + \sum_{(j,\ell,k) \in J_s} c_{j,\ell}^{(k)} a_j \bar{x}_\ell \right] t^{-[s]} = u_0 a(t) + a(t) \chi(t)$$

D'après la proposition 2.1 la fonction  $u_0 a(t)(1-a(t))^{-1} = -u_0 [1-(1-a(t))^{-1}]$  se développe en série de factorielles convergente dans  $\Re t > \lambda + C$  si les coefficients de  $a(t)$  vérifient  $|a_s| \leq C \frac{\Gamma(\lambda+s-1)}{\Gamma(\lambda)}$  et donc  $X(x)$  a la même propriété.  $\square$

**4.2. Opérateurs aux  $q$ -différences réguliers en  $\infty$**

Il est classique que les opérateurs aux  $q$ -différences « réguliers » en  $\infty$  sont ceux qui s'écrivent  $G(qt) = A(t)G(t)$  où  $A(t)$  est holomorphe à l'infini et  $A(\infty) = I$ . Puisque les séries convergentes en  $1/t$  peuvent aussi s'écrire comme série de  $q$ -factorielles convergente on peut supposer

$$A(t) = I + \sum_{s \geq 1} A_s \frac{1}{(t; q)_s}.$$

**PROPOSITION 4.2.** — *Pour tout  $U_0 \in \mathbf{C}^m$ , le système  $G(qt) = A(t)G(t)$  de matrice  $A(t) = I + \sum_{s \geq 1} A_s \frac{1}{(t; q)_s}$ , série de  $q$ -factorielles convergente, a une unique solution de la forme*

$$G(t) = U_0 + \sum_{s \geq 1} \frac{U_s}{(t; q)_s}$$

et cette série de factorielles converge.

*Preuve.* — A partir de la formule d'homothétie

$$\frac{1}{(qt; q)_s} = \frac{1}{q^s (t; q)_s} + \frac{q^s - 1}{q^s (t; q)_{s+1}},$$

on obtient

$$G(qt) = U_0 + \sum_{s \geq 1} [q^{-s} U_s + (1 - q^{1-s}) U_{s-1}] \frac{1}{(t; q)_s}.$$

En identifiant le coefficient de  $\frac{1}{(t; q)_s}$  dans les deux membres, on a  $(q^{-1} - 1)U_1 = A_1 U_0$  et pour  $s \geq 2$ ,

$$(q^{-s} - 1)U_s = A_s U_0 + (q^{1-s} - 1)U_{s-1} + \sum_{(i, j, k) \in J_s} c_{i, j}^{(k)}(q) A_i U_j$$

Ces relations déterminent clairement de façon unique les coefficients  $U_s$ ,  $s \geq 1$ . On peut remarquer que la valuation de  $G(t) - U_0$  est identique à celle de  $A(t) - I$ .

La convergence de la série obtenue se déduit par le théorème 2.4 de celle de la série de puissances correspondante, qui est classique puisque le système est régulier en  $\infty$  (cf. [9]).  $\square$

Ce n'est pas sous cette forme que l'on peut espérer aborder la convergence  $q \rightarrow 1$ , car, en supposant que les coefficients de  $A(t)$  dépendent de  $q$  d'une façon telle qu'on puisse utiliser les théorèmes de convergence du paragraphe précédent et qu'on cherche une solution  $G(t)$  de la même forme, on voit qu'à la limite, la relation qui donne  $U_1(q)$  pour  $q \neq 1$  se transforme en la condition nécessaire  $A_1 U_0 = 0$ . Même si cette condition est satisfaite les autres relations ne conduisent pas à un résultat simple. Mais l'étude menée au premier paragraphe montre que le cadre naturel est celui d'un système de la forme  $(1 - pt)\delta_p G(t) = A(t)G(t)$  où  $A(t)$  admet un développement en série de  $q$ -factorielles convergente. On peut établir pour ces systèmes le résultat suivant.

PROPOSITION 4.3. — Soit  $A(t) = \sum_{s \geq 0} A_s \frac{1}{(t; q)_s}$ , où  $A_s \in gl(m, \mathbf{C})$ , une série de  $q$ -factorielles telle que la série  $a(t) = \sum_{s \geq 0} \frac{\|A_s\|}{(t; q)_s}$  soit convergente pour  $|t| > R$ ,  $t \notin q^{-\mathbf{N}}$ . L'équation

$$(\star) \quad (1 - pt)\delta_p G(t) = A(t)G(t)$$

a pour tout  $U_0 \in \mathbf{C}^m$  une solution (formelle) série de  $q$ -factorielles de premier terme  $U_0$  si et seulement si  $A_0 = 0$ . Dans ce cas, la solution est unique et converge pour  $|t|$  assez grand.

Preuve. — On sait que, pour tout entier  $s \in \mathbf{N}$ ,

$$(1 - pt)\delta_p \left( \frac{1}{(t; q)_s} \right) = [s]_q \frac{1}{(t; q)_s}.$$

La condition  $A_0 = 0$  s'obtient en considérant la valuation des deux membres. Une solution formelle  $G(t) = U_0 + \sum_{s \geq 1} U_s \frac{1}{(t; q)_s}$  doit alors vérifier la liste de conditions :  $A_0 U_0 = 0$ , qui est satisfaite pour tout choix de  $U_0$  si et seulement si  $A_0 = 0$ , puis  $U_1 = A_1 U_0$ , et pour  $s \geq 2$ ,

$$[s]_q U_s = A_s U_0 + \sum_{(i, j, k) \in J_s} c_{i, j}^{(k)}(q) A_j U_i.$$

L'existence et l'unicité de la solution formelle est donc claire. Pour établir la convergence, on peut remarquer que l'équation  $(\star)$  se réécrit

$$(\star)' \quad G(t) = B(t)G(qt)$$

où  $B(t) = I + \frac{(1-q)t}{1-t}A(qt)$ , de sorte que  $B$  est inversible, converge à l'infini et vérifie  $B(\infty) = I$ , donc  $B^{-1}(t)$  a les mêmes propriétés, admet un développement en série de  $q$ -factorielles convergente et on peut utiliser la proposition 4.2 pour conclure.  $\square$

### 4.3. Confluence

Le parallélisme des résultats obtenus dans les deux paragraphes précédents laisse espérer cette fois de bonnes propriétés par confluence. Pour obtenir une situation dans laquelle les théorèmes 3.1 ou 3.2 s'appliquent, il faut d'abord obtenir pour  $q$  réel  $> 1$  une version plus précise de la proposition 4.3 et son analogue dans le plan  $x = \frac{t-1}{q-1}$ . Nous commençons par donner deux analogues de la proposition 2.1.

LEMME 4.4. — *Soit  $\lambda$  et  $\mu$  des nombres complexes,  $\mu \neq 0$ . Pour tout  $s \geq 1$ ,*

$$\sum_{(i,j,k) \in J_{s+1}} \tilde{c}_{i,j}^{(k)}(q) \frac{q^{-k-1}}{e_{i-1}^{(q)}(\lambda)e_{j-1}^{(q)}(\lambda+\mu)} = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{1}{e_s^{(q)}(\lambda+\mu)} - \frac{1}{e_s^{(q)}(\lambda)} \right]$$

où  $J_s$  et les coefficients  $\tilde{c}_{i,j}^{(k)}(q)$  sont ceux définis dans la proposition 2.9. De même, si  $\mu \notin -\mathbf{N}$ ,

$$\sum_{(i,j,k) \in J_{s+1}} \tilde{c}_{i,j}^{(k)}(q) \left(\frac{1}{q}-1\right)^k (q^\lambda; q)_{i-1} (q^{\lambda+\mu}; q)_{j-1} = \frac{q^{-\lambda+1}}{q^\mu - 1} [(q^\lambda; q)_s - (q^{\lambda+\mu}; q)_s].$$

*Preuve.* — La première formule exprime que les développements en série de factorielles mixtes des fonctions  $1 - \frac{\mu}{x-\lambda}$  et  $1 + \frac{\mu}{x-\lambda-\mu}$  sont inverses l'un de l'autre.

La deuxième formule exprime que les développements en série de  $q$ -factorielles des fonctions  $1 + \frac{q^\lambda(q^\mu-1)}{q^\lambda-t}$  et  $1 - \frac{q^\lambda(q^\mu-1)}{q^{\lambda+\mu}-t}$  sont inverses l'un de l'autre. La formule est écrite à partir de la formule donnant le produit (proposition 2.7) en remarquant que les coefficients  $c_{i,j}^{(k)}(q)$  vérifient  $c_{i,j}^{(k)}(q) = (1-q)^k \tilde{c}_{i,j}^{(k)}(q)$ .  $\square$

Remarquons que si  $q > 1$  est réel, les coefficients  $\tilde{c}_{i,j}^{(k)}(q)$  sont réels positifs. Si de plus  $\lambda$  est réel positif,  $e_i^{(q)}(\lambda)$  et  $(-1)^i (q^\lambda; q)_i$  sont réels et positifs.

En utilisant ces remarques et les relations du lemme précédent, on obtient, sur le modèle de la preuve de la proposition 2.1, celle de la proposition suivante.

PROPOSITION 4.5. — *On suppose  $q$  réel et  $q > 1$ . Soit  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels positifs.*

1. Soit  $f = 1 - \sum_{s \geq 1} a_s e_s^{(q)}(x)$  une série de factorielles mixtes dont les coefficients vérifient  $|a_s| \leq \mu \frac{q^{s-1}}{e_{s-1}^{(q)}(\lambda)}$ . Alors les coefficients de l'inverse

$$g = 1 + \sum_{s \geq 1} b_s e_s^{(q)}(x) \text{ de } f \text{ vérifient } |b_s| \leq \mu \frac{q^{s-1}}{e_{s-1}^{(q)}(\lambda + \mu)}.$$

2. Soit  $f = 1 - \sum_{s \geq 1} (-1)^s \frac{a_s}{(t; q)_s}$  une série de  $q$ -factorielles dont les coefficients vérifient  $|a_s| \leq (-1)^{s-1} (q^\mu - 1) q^{s+\lambda-1} (q^\lambda; q)_{s-1}$ . Alors les coefficients de l'inverse  $g = 1 + \sum_{s \geq 1} (-1)^s \frac{b_s}{(t; q)_s}$  de  $f$  vérifient

$$|b_s| \leq (-1)^{s-1} (q^\mu - 1) q^{s+\lambda-1} (q^{\lambda+\mu}; q)_{s-1}.$$

Notons que les conditions imposées aux coefficients constituent une autre façon d'écrire la première hypothèse des théorèmes 3.1 et 3.2 lorsque  $\lambda > 0$ .

THÉORÈME 4.6. — *Soit  $A(x) = \sum_{s \geq 1} A_s x^{-[s]}$  une série de factorielles et  $\lambda, \mu$  deux réels  $> 0$  tels que la suite  $a_s = \|A_s\|$  vérifie, pour tout  $s \geq 1$ ,  $a_s \leq \mu \frac{\Gamma(s + \lambda)}{\Gamma(\lambda)}$ . Pour  $U_0 \in \mathbb{C}^m$ , soit  $F(x)$  l'unique solution de l'équation*

$$(x - 1) \underset{-1}{\Delta} F(x) = A(x)F(x)$$

développable en série de factorielles convergente de terme constant égal à  $X_0$ .

1. Soit  $A_q(x) = \sum_{s \geq 1} A_s(q) e_s^{(q)}(x)$  une série de factorielles mixtes telle que

$$(a) \text{ pour tout } s \geq 1, a_s(q) = \|A_s(q)\| \leq \mu \frac{q^{s-1}}{e_{s-1}^{(q)}(\lambda)},$$

(b) pour tout  $s \geq 1$ ,  $\lim_{q \rightarrow 1^+} A_s(q) = A_s$ .

Alors l'équation

$$p(x-1) \frac{F(px-p) - F(x)}{(p-1)x-p} = A_q(x)F(x)$$

où  $p = \frac{1}{q}$ , a une unique solution série de factorielles mixtes de terme constant  $U_0$ . Cette série converge pour  $\left| x - \frac{1}{1-q} \right| > \lambda + \mu - \frac{1}{1-q}$  et sa somme  $F_q(x)$  vérifie  $\lim_{q \rightarrow 1^+} F_q(x) = F(x)$  uniformément sur tout domaine  $\{\Re x \geq \mu + \lambda + 1 + \varepsilon\}$  pour tout  $\varepsilon > 0$ .

2. Soit  $A_q(t) = \sum_{s \geq 1} (-1)^s A_s(q) \frac{1}{(t; q)_s}$  une série de  $q$ -factorielles telle que

(a) pour tout  $s \geq 1$ ,  $a_s(q) = \|A_s(q)\| \leq |(q^\mu - 1)q^{s+\lambda-1}(q^\lambda; q)_{s-1}|$ ,

(b) pour tout  $s \geq 1$ ,  $\lim_{q \rightarrow 1^+} (q-1)^{-s} A_s(q) = A_s$ .

Alors l'unique solution  $G_q(t)$ , holomorphe à l'infini et telle que  $G_q(\infty) = U_0$ , de l'équation

$$(1-pt)\delta_p G(t) = A_q(t)G(t)$$

vérifie  $\lim_{q \rightarrow 1^+} G_q(q^x) = F(x)$  uniformément sur tout domaine  $\{\Re x \geq \mu + \lambda + 1 + \varepsilon\}$  pour tout  $\varepsilon > 0$ .

*Preuve.* — La récurrence vérifiée par les coefficients de la série formelle solution est la même que celle obtenue dans le cas des séries de factorielles mais avec  $\tilde{c}_{i,j}^{(k)}(q)$  au lieu de  $c_{i,j}^{(k)}$ . Clairement  $\lim_{q \rightarrow 1^+} \tilde{c}_{i,j}^{(k)}(q) = c_{i,j}^{(k)}$ . La même méthode de séries majorantes que dans la proposition 4.1 jointe à la proposition 4.5 montre qu'on peut appliquer le théorème 3.1 ou 3.2 pour conclure.  $\square$

On peut remarquer que les hypothèses sont réalisées si on prend la déformation de  $A_s$  donnée dans le premier cas par  $A_s(q) = A_s$  et dans le deuxième cas par  $A_s(q) = (q-1)^s A_s$ .

Illustrons ce résultat lorsque  $m = 1$  pour l'équation

$$(\star) \quad (x-1) \underset{-1}{\Delta} f(x) = -\frac{\mu}{x-\lambda} f(x)$$

qui, pour  $\lambda$  et  $\mu$  réels positifs, peut être prise comme équation majorante du cas général. Cette équation s'écrit encore

$$f(x+1) = \frac{x(x+1-\lambda)}{(x-\mu_1)(x-\mu_2)} f(x)$$

où  $\mu_1$  et  $\mu_2$  vérifient  $\mu_1 + \mu_2 = \lambda - 1$  et  $\mu_1\mu_2 = \mu$ . L'unique solution de cette équation qui est holomorphe dans un demi-plan  $\Re x \gg 0$  et tend vers 1 quand  $x \rightarrow \infty$  dans ce demi-plan est

$$f(x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(x+1-\lambda)}{\Gamma(x-\mu_1)\Gamma(x-\mu_2)}$$

Le développement en série de factorielles de cette fonction est donné par la formule de Gauss-Kummer qui permet pour  $\Re x > \Re \lambda - 1$  d'écrire

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(x+1-\lambda)}{\Gamma(x-\mu_1)\Gamma(x-\mu_2)} = {}_2F_1(\mu_1, \mu_2, x; 1) = \sum_{s \geq 0} \frac{(\mu_1)_s (\mu_2)_s}{s!} x^{-[s]}$$

Il est bien connu ([2] par exemple) que

$${}_2F_1(\mu_1, \mu_2, x; 1) = \lim_{q \rightarrow 1^+} {}_2\phi_1(q^{\mu_1}, q^{\mu_2}, q^x; q, q)$$

où

$${}_2\phi_1(a, b, c; q, q) = \frac{(\frac{a}{c}; p)_\infty (\frac{b}{c}; p)_\infty}{(\frac{1}{c}; p)_\infty (\frac{ab}{c}; p)_\infty}.$$

On vérifie aisément que la fonction  $g_q(t) = \frac{(\frac{q^{\mu_1}}{t}; p)_\infty (\frac{q^{\mu_2}}{t}; p)_\infty}{(\frac{1}{t}; p)_\infty (\frac{q^{\lambda-1}}{t}; p)_\infty}$  est une solution holomorphe à l'infini de l'équation

$$(1-pt)\delta_p g(t) = \frac{q}{q-1} \frac{(q^{\mu_1}-1)(q^{\mu_2}-1)}{t-q^\lambda} g(t)$$

qui est une « déformation » au sens du théorème précédent de l'équation (\*).

## Bibliographie

- [1] ADAMS (C.R.), Linear  $q$ -difference Equations, *Bull. AMS* (1931), 361-400.
- [2] GASPER (G.), Elementary Derivations of Summation and Transformation Formulas for  $q$ -Series, *Fields Inst. Comm.* **14**, p. 55-70 (1997).
- [3] GÉRARD (R.), LUTZ (D.A.), Convergent factorial series solutions of singular operator equations, *Analysis* **10**, 99-145 (1990).



- [4] HARRIS (W.A.) Jr., *Analytic theory of difference equations* in *Analytic theory of differential equations*, Lecture Notes in Mathematics, **183**, Springer, Berlin 1971, 46-58.
- [5] JACKSON (F.H.), *q-difference Equations*, *Am. J. Math.* **32**, p. 305-315 (1910).
- [6] NÖRLUND (N.-E.), *Leçons sur les séries d'interpolation*, Gauthier-Villars, Paris, 1926.
- [7] POSTNIKOV (M.), *Leçons de géométrie, Groupes et algèbres de Lie*, Editions MIR, 1985.
- [8] RAMIS (J.-P.), About the growth of entire functions solutions of linear algebraic *q-difference equations*, *Ann. Fac. Sciences de Toulouse*, Série 6, **1**, p. 53-94 (1992).
- [9] SAULOY (J.), Systèmes aux *q-différences* singuliers réguliers : classification, matrice de connexion et monodromie, *Ann. Inst. Fourier* **50**, p. 1021-1071 (2000).