IVAN PAN
MARCOS SEBASTIANI

Classification des feuilletages turbulents

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 12, nº 3 (2003), p. 395-413
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_2003_6_12_3_395_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XI, n° 3, 2003
pp. 395–413

Classification des feuilletages turbulents (*)

Ivan Pan (1), Marcos Sebastiani (2)

Résumé. — Soit $h : X \to B$ une fibration elliptique relativement minimale. On démontre que l'ensemble des feuilletages turbulents sur X (dans le sens de Brunella) dont le diviseur de tangence avec la fibration est donné, possède une structure naturelle de variété analytique connexe ; on calcule la dimension de cette variété.

Abstract. — Let $h : X \to B$ be a relatively minimal elliptic fibration. We proof that the set of turbulent foliations on X (on Brunella's sense) which has a fixed tangence divisor with the fibration is, in a natural way, a connected analytic variety ; we also calculate its dimension.

1. Introduction

Soit $h : X \to B$ une fibration elliptique relativement minimale de la surface analytique compacte connexe X. Soit Λ un feuilletage turbulent de X avec fibration adaptée h (cette notion a été introduite par M. Brunella dans [3, chap. 4, §3] ; voir aussi [2, §5]). Notons D le diviseur de tangence de Λ avec le feuilletage Γ défini par la fibration h (voir [2, §1]).

On considère la famille $\mathcal{F}_\Lambda$ des feuilletages analytiques à singularités isolées de X dont le diviseur de tangence avec Γ est encore D (ces feuilletages sont aussi turbulents avec fibration adaptée h).

Soient T le fibré tangent à Λ ([5, §2]) et T_X le fibré tangent à X. Alors $\mathcal{F}_\Lambda$ s'identifie de façon naturelle avec un sous-ensemble de l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(T, T_X))$ associé à l'espace vectoriel des homomorphismes de T

(*) Reçu le 2 décembre 2002, accepté le 8 janvier 2003
(1) Instituto de Matemática, UFRGS, av. Bento Gonçalves 9500, 91540-000 Porto Alegre, RS, Brasil.
E-mail: pan@mat.ufrgs.br
(2) Instituto de Matemática, UFRGS, av. Bento Gonçalves 9500, 91540-000 Porto Alegre, RS, Brasil.
E-mail: sebast@mat.ufrgs.br

dans T_X ([5, §2] et lemme 3.5 plus bas). Dans ce qui suit on démontre, en introduisant un invariant qui classifie les éléments de $\mathcal{F}_\Lambda$, que l'adhérence de $\mathcal{F}_\Lambda$ dans $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(T, T_X))$ est un sous-espace linéaire dont on calcule explicitement la dimension en termes de D (théorème 5.4, corollaire 5.5 et propositions 6.5 et 6.6).

Cela généralise [4] en suivant les orientations d'Étienne Ghys à qui nous exprimons ici notre reconnaissance.

2. Notations

Soit X une variété analytique complexe et soit $\mathcal{O}_X$ son faisceau structurel. Si E est un fibré vectoriel holomorphe sur X, on note $\mathcal{O}_X(E)$ le $\mathcal{O}_X$-module de ses sections holomorphes. Si D est un diviseur de X, on note $\mathcal{O}_X(D)$ le $\mathcal{O}_X$-module dont les sections sur un ouvert $U \subset X$ sont les fonctions méromorphes f sur U telles que $\operatorname{div} f + D|_U \geqslant 0$. On peut associer à D un fibré vectoriel holomorphe E_D de rang 1 tel que $\mathcal{O}_X(E_D) \cong \mathcal{O}_X(D)$. Si $\mathcal{A}$ est un $\mathcal{O}_X$-module et D un diviseur de X on note

$$\mathcal{A}(D) := \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D).$$

La *caractéristique d'Euler-Poincaré arithmétique* de X est

$$\chi(X) := \sum_j (-1)^j \dim_{\mathbb{C}} H^j(X, \mathcal{O}_X), \ (X \text{ compacte}).$$

On désigne par K_X le fibré canonique de X. Si E est un fibré vectoriel sur X, on dénote E_x la fibre sur $x \in X$. Si Z est un espace analytique irréductible, $\mathbb{C}[Z]$ et $\mathbb{C}(Z)$ désignent l'anneau des fonctions holomorphes et le corps des fonctions méromorphes sur Z respectivement.

Finalement, si $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$ et V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel on note $\mathbb{P}(V) := (V - \{0\})/\mathbb{C}^*$ l'espace projectif associé à V.

Le foncteur « image réciproque » sera consideré dans le sens de [1, chap. I, §8].

3. Feuilletages analytiques des surfaces

Soit X une surface analytique complexe connexe. Un *feuilletage analytique* Λ de X est défini par un couple (T, φ) où T est un fibré vectoriel holomorphe de dimension 1 sur X et $\varphi : T \to T_X$ est un homomorphisme non-nul. Un autre couple (T', φ') définit aussi Λ si et seulement s'il existe un isomorphisme $\theta : T \to T'$ tel que $\varphi = \varphi' \circ \theta$. C'est-à-dire, dans le cas où $T = T'$, si et seulement s'il existe $g : X \longrightarrow \mathbb{C}^*$ holomorphe telle que $\varphi|T_x = g(x)\varphi'|T_x$ pour tout $x \in X$.

L'*ensemble singulier* de Λ est l'ensemble

$$\operatorname{Sing}\Lambda := \{x \in X : \varphi|T_x = 0\}.$$

C'est un sous-ensemble analytique de dimension $\leqslant 1$. Si $\dim \operatorname{Sing}\Lambda = 0$ ou $\operatorname{Sing}\Lambda = \emptyset$, on dit que Λ est à singularités isolées (voir [5, §1]).

LEMME 3.1. — *Supposons que X est compacte et soient $\Lambda = (T, \varphi), \Lambda' = (T, \varphi')$ deux feuilletages de X. Supposons de plus que :*

a) Λ est à singularités isolées ;

b) il existe un ouvert non-vide $U \subset X$ tel que $\varphi(T_x) = \varphi'(T_x)$ pour tout $x \in U$.
Alors $\Lambda = \Lambda'$.

Preuve. — Considérons l'ouvert

$$V := X - [(\operatorname{Sing}\Lambda) \cup \operatorname{Sing}\Lambda')].$$

On peut supposer $U \subset V$. Les images des homomorphismes φ, φ' définissent deux sections holomorphes du fibré en droites projectives associé à T_V. Comme ces sections coïncident au-dessus de U, elles sont identiques. Donc, il existe $g : V \longrightarrow \mathbb{C}^*$ holomorphe telle que

$$\varphi'|T_x = g(x)\varphi|T_x, \ x \in V.$$

Soit $a \in X - V$. Si U_a est un voisinage ouvert de a tel qu'il existe une section holomorphe et jamais nulle s de T sur U_a, alors

$$\varphi'(s(x)) = g(x)\varphi(s(x)), \ x \in U_a \cap V.$$

L'hypothèse a) implique que la restriction de g à $U_a \cap V$ se prolonge à une fonction holomorphe sur U_a. On en déduit que g se prolonge à une fonction holomorphe sur X tout entier. Donc g est constante. $\square$

DÉFINITION 3.2. — *Soit $\Lambda = (T, \varphi)$ un feuilletage analytique de X. Notons*

$$\varphi_* : \mathcal{O}_X(T) \to \mathcal{O}_X(T_X) =: \xi_X, \ \varphi^* : \Omega_X := \mathcal{O}_X(T_X^\vee) \to \mathcal{O}_X(T^\vee)$$

les homomorphismes des faisceau induits par φ. On appelle

$$\mathcal{T}_\Lambda := Im\, \varphi_* \subset \xi_X \text{ et } \mathcal{N}_\Lambda^\vee := Ker\, \varphi^* \subset \Omega_X$$

les faisceaux tangent et conormal à Λ *respectivement. (Ce sont des* $\mathcal{O}_X$*-modules localement libres de rang 1. Comme* φ_* *est injectif, on peut supposer* $\mathcal{T}_\Lambda = \mathcal{O}_X(T)$*). Les faisceaux cotangent et normal à* Λ *sont* $\mathcal{T}_\Lambda^\vee$ *et* $\mathcal{N}_\Lambda := (\mathcal{N}_\Lambda^\vee)^\vee$ *respectivement.*

LEMME 3.3.— *Si* Λ *est à singularités isolées, alors*

$$\mathcal{T}_\Lambda^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}_\Lambda^\vee \cong \mathcal{O}_X(K_X)$$

en tant que $\mathcal{O}_X$*-modules.*

Preuve.— Voir [3, chap. 2, §1]. □

Dans ce qui suit, si Λ, Γ sont deux feuilletages de X, on dira qu'ils sont différents ($\Lambda \neq \Gamma$) si leur restrictions à $X - (\operatorname{Sing}\Lambda \cup \operatorname{Sing}\Gamma)$ ne sont pas identiques (comparer avec 3.1).

Soient $\Lambda \neq \Gamma$ deux feuilletages de X. On a une application évidente

$$\mathcal{T}_\Lambda \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}_\Gamma^\vee \to \mathcal{O}_X.$$

C'est un homomorphisme injectif de $\mathcal{O}_X$-modules. Donc, son image est de la forme $\mathcal{O}_X(-D)$ où D est un diviseur effectif.

DÉFINITION 3.4.— $D =: \operatorname{tang}(\Lambda, \Gamma)$ *est le diviseur de tangence de* Λ *et* Γ *([2, §1]).*

LEMME 3.5.— *On a les assertions suivantes :*

a) Si Λ *et* Γ *sont à singularités isolées, alors* $\operatorname{tang}(\Lambda, \Gamma) = \operatorname{tang}(\Gamma, \Lambda)$.

b) $\mathcal{O}_X(\operatorname{tang}(\Lambda, \Gamma)) = \mathcal{T}_\Lambda^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}_\Gamma$.

c) Si $\Lambda_1 = (T_1, \varphi_1)$ *et* $\Lambda_2 = (T_2, \varphi_2)$ *sont des feuilletages différents de* Γ *tels que* $\operatorname{tang}(\Lambda_1, \Gamma) = \operatorname{tang}(\Lambda_2, \Gamma)$*, alors* $T_1 \cong T_2$.

Preuve.— L'assertion c) suit de b) tandis que celle-ci suit de la définition 3.4. Pour a) voir [2, §1]. □

4. Fibrations elliptiques

Soit $h : X \to B$ une fibration elliptique relativement minimale de la surface analytique compacte connexe X. Pour chaque $y \in B$, on désigne par $h^{-1}(y)$ l'ensemble analytique réduit, support de la fibre X_y de h sur y ; on pose

$$X_y = \sum_j k_{yj} C_{yj},$$

où les C_{yj} dénotent les composantes irréductibles de $h^{-1}(y)$. Notons $m_y :=$ $pgdc_j\{k_{yj}\}$ la *multiplicité* de X_y ; posons $k'_{yj} := k_{yj}/m_y$.

DÉFINITION 4.1.— *On définit le diviseur effectif*

$$M := \sum_y \sum_j (k'_{yj} - 1)C_{yj}$$

de X (voir [3, chap.2, §3]).

Par la suite Γ désignera le feuilletage défini par la fibration h.

LEMME 4.2.— *On a un isomorphismes de $\mathcal{O}_X$-modules*

$$\mathcal{T}_\Gamma \cong h^*[h_{*1}(\mathcal{O}_X)] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(M).$$

Preuve.— Voir [3, chap. 2, §3]. □

LEMME 4.3.— *$h_{*1}(\mathcal{O}_X)$ est un $\mathcal{O}_B$-module localement libre de rang 1.*

Preuve.— Il suit de [1, cor. III, (11.2)] compte tenu du fait que la fibre générique est elliptique. □

LEMME 4.4.— *L'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_B \to h_*(\mathcal{O}_X(M))$ obtenu par composition avec h est un isomorphisme de $\mathcal{O}_B$-modules.*

Preuve.— Soit $U \subset B$ un ouvert ; posons $V := h^{-1}(U)$. Comme h est propre et à fibres connexes, toute $f \in \mathbb{C}(V)$ dont les pôles sont des composantes des fibres est de la forme $f = g \circ h$ pour une $g \in \mathbb{C}(U)$. Si g a un pôle en $y \in U$, alors f a un pôle d'ordre $\geqslant k_{yj}$ en C_{yj}. Puisque $k_{yj} > k'_{yj} - 1$, on voit que $f \in H^0(V, \mathcal{O}_X(M))$ si et seulement si $g \in H^0(U, \mathcal{O}_B)$. □

LEMME 4.5.— *Soit $y \in B$. Alors il existe un ouvert $U \subset B$ tel que $y \in U$ et $\mathcal{T}_\Gamma|V \cong \mathcal{O}_X(M)|V$ en tant que $\mathcal{O}_V$-modules, où $V := h^{-1}(U)$.*

Preuve.— Soit $U \ni y$ un ouvert de B tel que $h_{*1}(\mathcal{O}_X)|U \cong \mathcal{O}_U$ (lemme). Alors

$$h^*(h_{*1}(\mathcal{O}_X))|V \cong \mathcal{O}_V = \mathcal{O}_X|V,$$

et on applique le lemme 4.2. □

LEMME 4.6.— *On a un isomorphisme de $\mathcal{O}_B$-modules*

$$h_*(\mathcal{T}_\Gamma) \cong h_{*1}(\mathcal{O}_X).$$

Preuve. — Soit $U \subset B$ un ouvert ; posons $V := h^{-1}(U)$. L'application

$$H^0(U, h_{*1}(\mathcal{O}_X)) \to H^0(V, h^*(h_{*1}(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(M))$$

définie par $s \mapsto h^*(s) \otimes 1$ induit un homomorphisme de $\mathcal{O}_B$-modules

$$h_{*1}(\mathcal{O}_X) \longrightarrow h_*(h^*(h_{*1}(\mathcal{O}_X)) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(M))$$

qui est un isomorphisme d'après les lemmes 4.3 et 4.4.

L'assertion suit du lemme 4.2. □

LEMME 4.7. — *Pour tout $y \in B$ il existe un voisinage ouvert $U \subset B$ de y et un champ de vecteurs holomorphe v sur $V := h^{-1}(U)$ tangent aux fibres de h tel que :*

a) v s'annule sur C_{yj} avec multiplicité $k'_{yj} - 1$;

b) si w est un champ de vecteurs holomorphe sur V tangent aux fibres de h, alors $w = (g \circ h)v$ pour une $g \in \mathbb{C}[U]$;

c) v ne s'annule pas sur $V - h^{-1}(y)$.

Preuve. — On choisit U comme dans le lemme 4.5 ; on a $\mathcal{T}_\Gamma|V \cong \mathcal{O}_X(M)|V$. D'après le lemme 4.4, $H^0(V, \mathcal{O}_V(M))$ est engendré par 1 comme $H^0(U, \mathcal{O}_B) = \mathbb{C}[U]$-module. En tant que section de $\mathcal{O}_X(M)$ sur V, l'élément 1 s'annule sur C_{yj} avec multiplicité $k'_{yj} - 1$. Donc $H^0(V, \mathcal{T}_\Gamma)$ est engendré, en tant que $\mathbb{C}[U]$-module, par une section qui s'annule sur C_{yj} avec cette multiplicité. □

5. Feuilletages turbulents

Soit $h : X \to B$ une fibration elliptique relativement minimale de la surface analytique compacte connexe X ; désignons par Γ le feuilletage associé à h. Soit $\Lambda = (T, \varphi)$ un feuilletage turbulent de X avec fibration adaptée h (dans le sens de [3, chap. 4, §3] ; en particulier Λ est à singularités isolées). Alors le diviseur de tangence $D := \operatorname{tang}(\Lambda, \Gamma)$ est de la forme

$$D = \sum_{y,j} t_{yj} C_{yj}$$

où les t_{yj} sont des entiers $\geqslant 0$ (on garde les notations du §4).

DÉFINITION 5.1. — *On définit le diviseur effectif*

$$R := \sum_{y \in B} r_y \cdot y$$

de B par

$$r_y := \inf_j \left[\frac{t_{yj} + k_{yj} + k'_{yj} - 2}{k_{yj}} \right],$$

où le crochet dénote la « partie entière » d'un nombre rationnel.

Observons que R ne dépend que de D.

Considérons maintenant l'homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules

$$\mu : h^*(\Omega_B(R) \otimes_{\mathcal{O}_B} h_*(\mathcal{T}_\Gamma)) \longrightarrow \mathcal{N}_\Gamma^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{T}_\Gamma \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D) = (\mathcal{N}_\Gamma^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{T}_\Gamma)(D)$$

défini par

$$h^*(\omega \otimes v) \mapsto h^*(\omega) \otimes v \otimes 1,$$

où $\omega \in H^0(U, \Omega_B(R))$ et $v \in H^0(V, \mathcal{T}_\Gamma)$ avec U un ouvert de B et $V = h^{-1}(U)$. Observons que ω a, au plus, un pôle d'ordre $\leqslant r_y$ en $y \in U$. Alors $h^*(\omega)$ a un pôle d'ordre $\leqslant k_{yj}r_y - (k_{yj} - 1)$ le long de C_{yj}. Donc, d'après le lemme 4.7, $h^*(\omega) \otimes v$ a un pôle le long de C_{yj} d'ordre, au plus

$$\begin{aligned} k_{yj}r_y - (k_{yj} - 1) - (k'_{yj} - 1) &= k_{yj}r_y - (k_{yj} + k'_{yj} - 2) \\ &\leqslant t_{yj}. \end{aligned}$$

Du fait que tous les faisceaux en question sont localement libres on déduit tout de suite que μ est injectif.

D'autre part, considérons l'homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules

$$\lambda : (\mathcal{N}_\Gamma^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{T}_\Gamma)(D) \longrightarrow \mathcal{H}om(T, T_X)$$

défini par

$$\lambda(\eta \otimes v)(s) = \eta(\varphi(s)) \cdot v,$$

où η est une 1-forme méromorphe sur un ouvert $V \subset X$ nulle sur les fibres de h et telle que $f\eta$ est holomorphe si $f \in H^0(V, \mathcal{O}_X(-D))$, v est un champ de vecteurs holomorphe sur V tangent aux fibres de h et s est une section holomorphe de T au-dessus de V. Observons que $\eta(\varphi(s))$ est holomorphe par définition de D.

Comme $\Lambda \neq \Gamma$, le lemme 3.1 nous dit que λ est injectif.

Finalement, $\lambda \circ \mu$ induit une application $\mathbb{C}$-linéaire injective au niveau des sections globales

$$(\lambda \circ \mu)_* : H^0(B, \Omega_B(R) \otimes_{\mathcal{O}_B} h_*(\mathcal{T}_\Gamma)) \longrightarrow Hom(T, T_X).$$

DÉFINITION 5.2. — *Posons* $E(D) := H^0(B, \Omega_B(R) \otimes h_*(\mathcal{T}_\Gamma))$. *Pour chaque* $\alpha \in E(D)$ *on définit le feuilletage de* X *suivant :*

$$\Lambda_\alpha := (T, \varphi_\alpha), \text{ où } \varphi_\alpha := \varphi + (\lambda \circ \mu)_*(\alpha).$$

Remarque 5.3. — Comme Λ est génériquement transverse aux fibres de h, on voit tout de suite que $\varphi_\alpha \neq 0$ et que $\Lambda_\alpha \neq \Gamma$. En effet, par définition, pour tout $\alpha \in E(D)$ l'image de l'homomorphisme $(\lambda \circ \mu)_*(\alpha) : T \to T_X$ est engendré par des vecteurs tangents aux fibres de h.

THÉORÈME 5.4. — *On a les assertions suivantes :*

a) Pour tout $\alpha \in E(D)$ *on a* $\mathrm{tang}(\Lambda_\alpha, \Gamma) = D$ *; en particulier si* Λ_α *est à singularités isolées, alors* Λ_α *est turbulent avec fibration adaptée* h.

b) Si $\alpha, \beta \in E(D)$ *avec* $\alpha \neq \beta$, *alors* $\Lambda_\alpha \neq \Lambda_\beta$.

c) Si Λ' *est un feuilletage turbulent de* X *avec fibration adaptée* h *tel que* $\mathrm{tang}(\Lambda', \Gamma) = D$, *alors il existe* $\alpha \in E(D)$ *tel que* $\Lambda_\alpha = \Lambda'$.

d) L'ensemble des $\alpha \in E(D)$ *tels que* Λ_α *est à singularités isolées est le complémentaire de la réunion d'un nombre fini de sous-variétés linéaires propres.*

Preuve. — a) Soit $U \subset X$ un ouvert et soient s et ω des sections holomorphes de T et $\mathcal{N}_\Gamma^\vee$ au-dessus de U respectivement. Comme $(\lambda \circ \mu)_*(\alpha)(s)$ est un champ de vecteurs sur U tangent aux fibres de h, on a $\omega(\varphi(s)) = \omega(\varphi_\alpha(s))$. Alors

$$\mathrm{tang}(\Lambda_\alpha, \Gamma) = \mathrm{tang}(\Lambda, \Gamma) = D.$$

b) Si $\Lambda_\alpha = \Lambda_\beta$, alors il existe $c \in \mathbb{C}^*$ tel que

$$\varphi + (\lambda \circ \mu)_*(\alpha) = c(\varphi + (\lambda \circ \mu)_*(\beta)),$$

d'où suit

$$(1 - c)\varphi = (\lambda \circ \mu)_*(c\beta - \alpha).$$

Or, prenons $y \in B$ en sorte que X_y soit une fibre régulière transverse à Λ. Si $x \in h^{-1}(y)$, alors pour tout $u \in T_x$ le vecteur $(1 - c)\varphi(u)$ est au même temps transverse et tangent à $h^{-1}(y)$, d'après la dernière égalité. Donc $c = 1$. Puisque $(\lambda \circ \mu)_*$ est injectif, on en déduit $\alpha = \beta$.

c) On va définir α localement au voisinage, disons U, d'un point $y \in B$. On peut supposer qu'il existe sur $V := h^{-1}(U)$ un champ de vecteurs holomorphe v qui s'annule sur C_{yj} avec multiplicité $k'_{yj} - 1$ et qui est tangent aux fibres de h (lemme 4.7a).

Soit u un champ de vecteurs holomorphe et jamais nul sur U. Si U est suffisamment petit, $u|(U - \{y\})$ se relève à deux champs de vecteurs holomorphes w, w' sur $V - h^{-1}(y)$ tangents à Λ, Λ' respectivement. Il en résulte

$$w' - w = f \cdot v|(V - h^{-1}(y)), f \in \mathbb{C}(V).$$

Comme h est propre et f holomorphe sur $V - h^{-1}(y)$ on peut écrire $f = g \circ h$ pour une fonction méromorphe $g \in \mathbb{C}(U)$. On définit une 1-forme méromorphe ω sur U par

$$\omega(u) = g.$$

C'est-à-dire :

$$w' = w + h^*(\omega)(w) \cdot v,$$

sur $V - h^{-1}(y)$.

Affirmation. — Supposons que g a un pôle d'ordre r en y. Alors $r \leqslant r_y$.

On définit

$$\alpha|U := \omega \otimes v.$$

Il découle du lemme 4.7 et de l'affirmation ci-dessus que α est bien définie comme section de $\Omega_B(R) \otimes_{\mathcal{O}_B} h_*(\mathcal{T}_\Gamma)$.

On va prouver que $\Lambda_\alpha = \Lambda'$. Par le lemme 3.5c on peut supposer $\Lambda' = (T, \varphi')$. D'après le lemme 3.1, il suffit de prouver que $\varphi_\alpha(T_x) = \varphi'(T_x)$ pour tout $x \in V - h^{-1}(y)$ dans le cas où X_y est une fibre réguliére transverse à Λ et Λ'. Dans ce cas w et w' sont holomorphes sur V et ω est holomorphe sur U. Le champ w définit une section holomorphe jamais nulle s de $T|V$ telle que $\varphi(s) = w$. Alors,

$$\begin{aligned}
\varphi_\alpha(s) &= \varphi(s) + (\lambda \circ \mu)_*(\alpha)(s) \\
&= w + \lambda_*(\mu_*(\alpha))(s) \\
&= w + h^*(\omega)(\varphi(s)) \cdot v \\
&= w + h^*(\omega)(w) \cdot v \\
&= w'.
\end{aligned}$$

On en déduit l'assertion.

Preuve de l'affirmation. — Soient ξ, η des coordonnées locales de X centrées en un point générique de C_{yj} ; pour simplifier écrivons $C = C_{yj}$ et $k = k_{yj}$, $k' = k'_{yj}$, $t = t_{yj}$ et $r' = r_y$: on va montrer $r \leqslant r'$. Soit z une coordonnée locale de B centrée en y. On peut supposer que h s'exprime en coordonnées locales par $z = \xi^k$.

Par ailleurs on prend $u = \partial/\partial z$. On a

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{dz}{d\xi}\frac{\partial}{\partial z} = k\xi^{k-1}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Donc on peut écrire

$$w = k^{-1}\xi^{1-k}\frac{\partial}{\partial \xi} + c(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial \eta}$$

et

$$w' = k^{-1}\xi^{1-k}\frac{\partial}{\partial \xi} + c'(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial \eta}$$

où c, c' sont holomorphes si $\xi \neq 0$ avec, au plus, un pôle en $\xi = 0$.

D'autre part,

$$v = \epsilon\, \xi^{k'-1}\frac{\partial}{\partial \eta}$$

où ϵ est holomorphe et non-nulle. Nous devons prouver

$$kr \leqslant t + k + k' - 2.$$

Supposons d'abord que $t = 0$. Comme par hypothèse Λ et Λ' ont le même diviseur de tangence avec Γ, ces deux feuilletages sont transverses à C au voisinage du point considéré. Cela implique que c et c' ont, au plus, un pôle d'ordre $k-1$ en $\xi = 0$. Puisque

$$\begin{aligned} w' - w &= (c'(\xi,\eta) - c(\xi,\eta))\frac{\partial}{\partial \eta} \\ &= \left[(c'(\xi,\eta) - c(\xi,\eta))\xi^{1-k'}\epsilon^{-1}\right]\cdot v, \end{aligned}$$

on a que f a, au plus, un pôle d'ordre $k + k' - 2$ le long de C ; mais l'ordre de ce pôle est kr.

Supposons maintenant $t \neq 0$. Donc, ni Λ ni Λ' ne sont transverses à C au voisinage du point considéré ; d'où qu'il existe des entiers $p, q \geq k - 1$ tels que

$$w = k^{-1}\xi^{1-k}\frac{\partial}{\partial \xi} + \xi^{-p}b(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial \eta}$$

et

$$w' = k^{-1}\xi^{1-k}\frac{\partial}{\partial \xi} + \xi^{-q}b'(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial \eta}$$

pour des fonctions holomorphes b, b' qui ne s'annulent pas sur $\xi = 0$. Alors $\xi^p w$ et $\xi^q w'$ sont des champs de vecteurs tangents à Λ et Λ' respectivement, qui ne s'annulent pas sur C. Comme Γ est localement défini par $d\xi = 0$ et

$$d\xi(\xi^p w) = k^{-1}\xi^{1-k+p}, \; d\xi(\xi^q w') = k^{-1}\xi^{1-k+q},$$

l'hypothèse $\operatorname{tang}(\Lambda, \Gamma) = \operatorname{tang}(\Lambda', \Gamma) = D$, entraîne

$$t = 1 - k + p = 1 - k + q,$$

d'où $p = q$. Alors

$$\begin{aligned} w' - w &= \xi^{-q}(b'(\xi,\eta) - b(\xi,\eta))\frac{\partial}{\partial\eta} \\ &= \left[\xi^{-q}(b'(\xi,\eta) - b(\xi,\eta))\epsilon^{-1}\xi^{1-k'}\right] \cdot v. \end{aligned}$$

Donc f a, au plus, un pôle d'ordre $k' - 1 + q$ sur C. Comme ce pôle est d'ordre rk on en déduit

$$rk \leqslant k' - 1 + q = k + k' + t - 2.$$

d) Puisque $\operatorname{tang}(\Lambda_\alpha, \Gamma) = D$, on a que $\operatorname{Sing}\Lambda_\alpha \subset \operatorname{Supp}(D)$. Il suffit, donc, de prouver que si Y est une composante irréductible de $\operatorname{Supp}(D)$, alors l'ensemble

$$A_Y := \{\alpha \in E(D) : Y \subset \operatorname{Sing}\Lambda_\alpha\}$$

est une sous-variété linéaire de $E(D)$ ($\Lambda \notin A_Y$).

Supposons A_Y non-vide et soit $\alpha_0 \in A_Y$. Alors $\alpha \in A_Y$ si et seulement si

$$((\lambda \circ \mu)_*(\alpha) - (\lambda \circ \mu)_*(\alpha_0))\,|_Y = 0.$$

C'est-à-dire $A_Y = \alpha_0 + E_Y$ où

$$E_Y := \{\alpha \in E(D) : (\lambda \circ \mu)_*(\alpha)|_Y = 0\},$$

est un sous-espace vectoriel de $E(D)$. □

COROLLAIRE 5.5. — *L'ensemble des feuilletages à singularités isolées Λ' de X tels que $\Lambda' \neq \Gamma$ et $\operatorname{tang}(\Lambda', \Gamma) = D$ s'identifie naturellement à un sous-ensemble $\mathcal{F}_\Lambda \subset \mathbb{P}(Hom(T, T_X))$ dont l'adhérence $\overline{\mathcal{F}_\Lambda}$ est un sous-espace linéaire de dimension égale à $\dim_{\mathbb{C}} E(D)$. En plus, les éléments de $\overline{\mathcal{F}_\Lambda}$ différents de Γ qui n'appartient pas à $\mathcal{F}_\Lambda$ sont des feuilletages à singularités non-isolées et $\mathcal{F}_\Lambda$ est le complémentaire d'un nombre fini de sous-variétés linéaires dans $\overline{\mathcal{F}_\Lambda}$.*

Preuve. — D'une part d'aprés le théorème 5.4 on sait que

$$\overline{\mathcal{F}_\Lambda} = \mathbb{P}(\mathbb{C}\varphi + (\lambda \circ \mu)_*(E(D))) \ ;$$

d'autre part, de l'injectivité de $(\lambda \circ \mu)_*$ suit

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\varphi + (\lambda \circ \mu)_*(E(D))) = 1 + \dim_{\mathbb{C}} E(D) \ ;$$

La première assertion du corollaire en résulte.

Si $\Lambda' \in \overline{\mathcal{F}_\Lambda}$ alors, par ce qui précède, ou bien $\Lambda' = (T, \varphi_\alpha)$ ou bien $\Lambda' = (T, (\lambda \circ \mu)_*(\alpha))$, pour un $\alpha \in E(D)$ convenable. Dans le premier cas, si Λ' est à singularités isolées, $\Lambda' \in \mathcal{F}_\Lambda$ par le théorème 5.4a. Dans le deuxième cas, Λ' laisse invariantes les fibres de h. Alors si $\Lambda' \neq \Gamma$, on a que Λ' est à singularités non-isolées. La dernière assertion découle de ceci et du théorème 5.4d. □

Exemple 5.6. — Soit E une courbe elliptique et soit $u \neq 0$ un champ de vecteurs holomorphe sur E. Considérons $X := E \times E$ et dénotons $p_1, p_2 : X \to E$ les projections canoniques ; posons $B = E$, $h = p_1$. Finalement désignons par Λ le feuilletage défini par p_2. Si on considère la famille des feuilletages de X définis pas les champs de vecteurs $((1-t)u, tu)$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, on constate que $\Gamma \in \overline{\mathcal{F}_\Lambda}$.

Exemple 5.7. — Considérons la même fibration de l'exemple 5.6. Soient $v_1 = (u, 0)$, $v_2 = (0, u)$, des champs de vecteurs holomorphes sur X.

Fixons $q \in B$ et soit $F = h^{-1}(q)$. Soit $f \in \mathbb{C}(X)$, $f \notin \mathbb{C}$, avec $\operatorname{div}_\infty f = 2q$. Soit Λ le feuilletage à singularités isolées défini par le champ méromorphe $v_1 + f v_2$ (sur X). Alors $\operatorname{tang}(\Lambda, \Gamma) = 2F$. On voit que tout $\Lambda' \in \mathcal{F}_\Lambda$ est défini par un champ de la forme $v_1 + g v_2$, $g \in \mathbb{C}(B) \backslash \mathbb{C}$, avec $\operatorname{div}_\infty g = 2q$. On en déduit que

$$\dim \mathcal{F}_\Lambda = \dim \overline{\mathcal{F}_\Lambda} = 2.$$

On vérifie que $\overline{\mathcal{F}_\Lambda} - \mathcal{F}_\Lambda$ est la réunion de deux droites dont l'une est formée par des feuilletages proportionnels à Γ et l'autre est l'adhérence d'une famille de feuilletages transverses à Γ en dehors de F, qui ont F comme ensemble singulier.

6. Calcul de $\dim_{\mathbb{C}} E(D)$

On considère une fibration elliptique relativement minimale $h : X \to B$ de la surface analytique compacte et connexe X. On suppose que les fibres génériques de h sont isomorphes, ce qui est bien le cas lorsqu'il existe sur X un feuilletage turbulent de fibration adaptée h.

Comme au §4, pour tout $y \in B$ on note $X_y := \sum_j k_{yj} C_{yj}$ la fibre de y, où les C_{yj} sont les composantes irréductibles du *support* $h^{-1}(y)$ de X_y. De même m_y est la multiplicité de X_y et $k'_{yj} := k_{yj}/m_y$.

On se donne aussi un feuilletage turbulent Λ de X avec fibration adaptée h et on note $D := \operatorname{tang}(\Lambda, \Gamma)$ où Γ est le feuilletage défini par h. Comme au §5 on écrit $D = \sum_{y,j} t_{yj} C_{yj}$ et on définit le diviseur effectif de B

$$R := \sum_{y \in B} r_y y,\ r_y = \inf_j \left[\frac{t_{yj} + k_{yj} + k'_{yj} - 2}{k_{yj}} \right],$$

où le crochet indique la partie entière. Finalement on pose

$$E(D) = H^0(B, \Omega_B(R) \otimes_{\mathcal{O}_B} h_*(\mathcal{T}_\Gamma))$$

(voir définitions 5.1 et 5.2).

Le problème est de calculer $\dim_{\mathbb{C}} E(D)$.

Dans le résultat suivant on se sert de la classification de Kodaira des fibrations elliptiques relativement minimales (voir [1, chap. V, §7])

LEMME 6.1.— *Les fibres singulières de h ne sont jamais du type I_b, I_b^* ou mI_b.*

Preuve. — Il suit du fait que les fibres régulières de h sont toutes isomorphes ([3, chap. 4, §3]). $\square$

COROLLAIRE 6.2. — *Soit σ le cardinal de l'ensemble S des $y \in B$ tels que $h^{-1}(y)$ est une courbe singulière. Alors*

$$\chi(X) \leqslant \frac{5}{6}\sigma.$$

Preuve. — Soit $e(X)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré topologique de X. Puisque $K_X \cdot K_X = 0$, d'après la formule de Kodaira ([1, chap. V, thm. (12.1)]), on a que $\chi(X) = e(X)/12$ par la formule de Nöther ([1, chap. I, thm. (5.4)]). Si $h^{-1}(y)$ est une courbe non-singulière, alors $e(h^{-1}(y)) = 0$ ([1, chap. V, §7]). On en déduit

$$e(X) = \sum_{y \in S} e(h^{-1}(y)).$$

Par ailleurs, si $y \in S$, de la classification de Kodaira suit que $e(h^{-1}(y)) \leqslant 10$ en tenant compte du lemme 6.1. Donc $e(X) \leqslant 10\sigma$, ce qui complète la preuve. $\square$

LEMME 6.3.— *Soit $y \in B$. Si $h^{-1}(y)$ est une courbe singulière, alors* $r_y > 0$.

Preuve.— Supposons d'abord $m_y > 1$. On est dans le cas mI_1 de la classification de Kodaira. Comme $h^{-1}(y)$ est irréductible et contient un point singulier, elle est contenue dans le support de D. Donc $t_{y1} > 0$, d'où

$$\frac{t_{y1} + k_{y1} + 1 - 2}{k_{y1}} \geqslant 1.$$

Supposons maintenant $m_y = 1$. Si $k_{yj} > 1$ on a

$$\begin{aligned} \frac{t_{yj} + k_{yj} + k'_{yj} - 2}{k_{yj}} &= \frac{t_{yj} + 2k_{yj} - 2}{k_{yj}} \\ &\geqslant 2\frac{k_{yj} - 1}{k_{yj}} \\ &\geqslant 1 \end{aligned}$$

Si $k_{yj} = 1$, il résulte des considérations de [3, chap. 4, §3] que C_{yj} est invariante par Λ. Donc $t_{yj} \geqslant 1$, d'où

$$\frac{t_{yj} + k_{yj} + k'_{yj} - 2}{k_{yj}} = t_{yj} \geqslant 1.$$

$\square$

LEMME 6.4.— *On a* $0 \leqslant \chi(X) \leqslant \deg R$ *avec* $\chi(X) = \deg R$ *si et seulement si* $\chi(X) = \deg R = 0$.

Preuve.— En effet

$$\deg R \geqslant \sigma \geqslant \frac{6}{5}\chi(X).$$

Les deux premières inégalités suivents du corollaire et du lemme ; la dernière résulte de la proposition (12.2) et remarque précédente de [1, chap. V] et de [1, chap. III, thm. (18.2)]. $\square$

Notons g le genre de B.

PROPOSITION 6.5.— *On a*

$$\dim_{\mathbb{C}} E(D) = \deg\, R + g - 1 - \chi(X),$$

à moins que $\deg\, R = \chi(X) = 0$.

Preuve. — D'après le lemme 4.5 et le théorème de Riemann-Roch

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{C}} E(D) &= \dim_{\mathbb{C}} H^0(B, \Omega_B(R) \otimes_{\mathcal{O}_B} h_{*1}(\mathcal{O}_X)) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} H^0(B, \Omega_B \otimes_{\mathcal{O}_B} \mathcal{O}_B(R) \otimes_{\mathcal{O}_B} h_{*1}(\mathcal{O}_X)) \\ &= g - 1 + \deg R - \chi(X) \\ &\qquad + \dim_{\mathbb{C}} H^0(B, \mathcal{O}_B(-R) \otimes_{\mathcal{O}_B} h_{*1}(\mathcal{O}_X)^{\vee}),\end{aligned}$$

compte tenu du fait que $\deg h_{*1}(\mathcal{O}_X)^{\vee} = \chi(X)$ ([1, chap. V, Prop. (12.2)]).

Or, par le corollaire

$$\deg(\mathcal{O}_B(-R) \otimes_{\mathcal{O}_B} h_{*1}(\mathcal{O}_X)^{\vee}) = \chi(X) - \deg R < 0,$$

à moins que $\deg R = \chi(X) = 0$, d'où l'assertion. □

PROPOSITION 6.6. — *Supposons* $\deg R = \chi(X) = 0$. *Alors* $\dim_{\mathbb{C}} E(D) = g$ *ou* $g - 1$ *selon que sur* X *il existe ou pas de champ holomorphe de vecteurs tangents aux fibres de* h *et jamais nul.*

Preuve. — On observe que $R = 0$ et on fait un calcul analogue à celui de la preuve de la proposition 6.5 ; on en déduit que $\dim_{\mathbb{C}} E(D) = g$ ou $g - 1$ selon que $h_{*1}(\mathcal{O}_X)$ soit ou ne soit pas isomorphe à $\mathcal{O}_B$. Mais $h_{*1}(\mathcal{O}_X) \cong \mathcal{O}_B$ équivaut à l'existence d'un champ holomorphe de vecteurs sur X tangent aux fibres de h et jamais nul, d'après les lemmes 4.5 et 4.7. □

Remarque 6.7. — a) Rappelons que $\chi(X) = 0$ implique que toutes les fibres de h sont non-singulières (proposition (12.2) et remarque précédente de [1, chap. V] et [1, chap. III, Thm. (18.2)]).

b) $\chi(X) = 0$ implique $\deg h_{*1}(\mathcal{O}_X) = 0$ ([1, chap. V, Prop. (12.2)]). Donc, si $g = 0$ l'égalité $\chi(X) = 0$ implique $h_{*1}(\mathcal{O}_X) \cong \mathcal{O}_B$. C'est-à-dire, si $g = \chi(X) = 0$ il existe un champ de vecteurs holomorphe sur X jamais nul et tangent aux fibres de h.

Exemple 6.8. — Soit E un tore de dimension 1. Fixons une involution sans points fixes $\imath$ de E. Considérons le quotient X de $E \times E$ par l'opération de $(e_1, e_2) \mapsto (\imath(e_1), -e_2)$. La première projection $E \times E \to E$ passe au quotient et définit une fibration elliptique localement triviale $h : X \to B$. Le feuilletage de $E \times E$ défini par la deuxième projection $E \times E \to E$ passe au quotient et définit un feuilletage Λ de X transverse à h. Par la proposition 6.6

$$\dim_{\mathbb{C}} E(D) = g - 1 = 0 \ ;$$

c'est-à-dire, Λ est le seul feuilletage de X transverse à h.

Exemple 6.9. — (voir [3, chap. 4, §3]) Soit E un tore de dimension 1. Notons X une désingularisation minimale du quotient de $E \times E$ par l'involution $(e_1, e_2) \mapsto (-e_1, -e_2)$. La première projection $E \times E \to E$ passe au quotient et définit une fibration elliptique $h : X \to B$, qui contient quatre fibres singulières X_{y_k}, pour $k = 1, 2, 3, 4$, toutes du type I_0^* dans la classification de Kodaira, et dont la base est rationnelle. Il en résulte que $e(X) = 24$ et $\chi(X) = 2$. On note Λ un feuilletage de X avec fibration adaptée h.

Fixons un y_k et écrivons

$$X_{y_k} = 2C_5 + \sum_{j=1}^{4} C_j \ ;$$

posons $t_j := t_{y_k j}$. Par construction chaque C_j est invariante par Λ ([3, chap. 4, §3]). Donc (voir [3, chap. 2, Prop. 3])

$$c_1(\mathcal{T}_\Lambda^\vee) \cdot C_j = -2 + Z(\Lambda, C_j) \geqslant -1, \ 1 \leqslant j \leqslant 4,$$

car $Z(\Lambda, C_j) \geqslant 1$ par la formule de Camacho-Sad.

Si C_5 est invariante par Λ on a de même

$$c_1(\mathcal{T}_\Lambda^\vee) \cdot C_5 = -2 + Z(\Lambda, C_5) \geqslant 2,$$

car chaque point d'intersection de C_5 avec l'une des C_j est un point singulier de Λ.

D'autre part, si C est une courbe irréductible contenue dans une fibre de h on a

$$\begin{aligned} D \cdot C &= c_1(\mathcal{T}_\Lambda^\vee) \cdot C + c_1(\mathcal{N}_\Gamma) \cdot C \\ &= c_1(\mathcal{T}_\Lambda^\vee) \cdot C + c_1(\mathcal{T}_\Gamma^\vee) \cdot C - K_X \cdot C \\ &= c_1(\mathcal{T}_\Lambda^\vee) \cdot C + c_1(\mathcal{T}_\Gamma^\vee) \cdot C \\ &= c_1(\mathcal{T}_\Lambda^\vee) \cdot C - M \cdot C, \end{aligned}$$

d'après les lemmes 3.5b et 3.3, le lemme de Zariski ([1, chap. V, Thm. (12.1)]), le lemme 4.2 et la définition 4.1.

On en déduit

$$t_5 - 2t_j = D \cdot C_j \geqslant -2, 1 \leqslant j \leqslant 4$$

et, lorsque C_5 est invariante,

$$\sum_{j=1}^{4} t_j - 2t_5 = D \cdot C_5 \geqslant 4.$$

Alors, si C_5 n'est pas invariante : $t_5 = 0$ et $t_j = 1, 1 \leqslant j \leqslant 4$. Si, en revanche, C_5 est invariante, on obtient toute de suite que $t_5 = 2t_j - 2, 1 \leqslant j \leqslant 4$. Donc, en tous les cas

$$t_5 = 2t_j - 2, 1 \leqslant j \leqslant 4.$$

Finalement

$$r_{y_k} = \frac{t_5 + 2}{2}.$$

Supposons Λ transverse à toutes les fibres régulières de h. On obtient

$$\dim \overline{\mathcal{F}_\Lambda} = \frac{a+2}{2},$$

où on a posé $a := \sum_{j=1}^{4} t_{y_j 5}$.

Observons que les $t_{y_k 5}$ $(1 \leqslant j \leqslant 4)$ sont forcément pairs. Le cas où ceux-ci sont tous nuls résulte du feuilletage de $E \times E$ défini par la deuxième projection canonique.

7. Existence de feuilletages turbulents

Soit $h : X \to B$ une fibration elliptique relativement minimale de la surface analytique compacte et connexe X ; comme avant X_y désigne la fibre de h au-dessus du point $y \in B$. On suposse donnés $y_1, \ldots, y_n \in B$ et, pour chaque $i = 1, \ldots, n$, un voisinage ouvert U_i de y_i et un feuilletage à singularités isolées Λ_i de $V_i := h^{-1}(U_i)$, avec les conditions suivantes :

a) $U_1 \cup \cdots \cup U_n = B$;

b) X_y est régulière est transverse à Λ_i pour tout $y \in U_i - \{y_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$;

c) si X_{y_i} n'est pas régulière ou n'est pas transverse à Λ_i, alors $y_i \notin U_k$ pour $k \neq i$.

Posons

$$X_i = X_{y_i} = \sum_j k_{ij} C_{ij},$$

où les C_{ij} sont les composantes irréductibles de $h^{-1}(y_i)$.

Soit Γ le feuilletage associé à h et soit $\Gamma_i = \Gamma | V_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. On peut écrire alors

$$\operatorname{tang}(\Lambda_i, \Gamma_i) = \sum_j t_{ij} C_{ij}.$$

Considérons le diviseur effectif de X

$$D = \sum_{i,j} t_{ij} C_{ij}.$$

Soit m_i la multiplicité de X_i et posons $k'_{ij} := k_{ij}/m_i$. On définit le diviseur effectif $R := \sum_{i=1}^{n} r_i y_i$ de B avec

$$r_y := \inf_j \left[\frac{t_{yj} + k_{yj} + k'_{yj} - 2}{k_{yj}} \right],$$

où le crochet indique la partie entière.

THÉORÈME 7.1. — *Supposons que* deg $R > 1 + \chi(X)$. *Alors, il existe un feuilletage turbulent* Λ *de* X, *avec fibration adaptée* h, *tel que*

$$\operatorname{tang}(\Lambda, \Gamma) = D.$$

Preuve. — Soit $y \in U_i \cap U_k$ avec $i \neq k$. Soit u un champ de vecteurs holomorphe sur un voisinage $U \subset U_i \cap U_k$ de y. Alors u se relève à des champs holomorphes w_i, w_k sur $h^{-1}(U)$ tangents à Λ_i, Λ_k respectivement. Donc, $w_k - w_i$ est tangent à Γ. On voit toute de suite que ceci définit un 1-cocycle $\{\xi_{ik}\}_{1 \leqslant i,k \leqslant n}$ du recouvrement $\{U_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ à valeurs dans $\Omega_B \otimes_{\mathcal{O}_B} h_*(\mathcal{T}_\Gamma)$. On peut aussi le supposer à valeurs dans $\mathcal{G} := \Omega_B(R) \otimes_{\mathcal{O}_B} h_*(\mathcal{T}_\Gamma)$ par l'inclusion naturelle.

D'autre part, par hypothèse le degré du faisceau $\mathcal{G}$ est $> 2g - 2$ ([1, chap. V, Pro. 12.2]) ; d'où $H^1(B, \mathcal{G}) = 0$, par la dualité de Serre.

On en déduit que, pour un choix convenable du recouvrement $\{U_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ il existe, pour chaque $i = 1, \ldots, n$, une 1-forme méromorphe ω_i sur U_i, ayant, au plus, un pôle d'ordre r_i en y_i, avec la propriété

$$(\omega_i \otimes v_i - \omega_k \otimes v_k) | (U_i \cap U_k) = \xi_{ik},$$

où v_i est un champ holomorphe sur V_i tangent à $\Gamma_i := \Gamma | V_i$ et s'annulant sur C_{ij} avec multiplicité $k'_{ij} - 1$ ($1 \leqslant i \leqslant n$) ; on a utilisé le lemme 4.7.

Maintenant nous allons définir un nouveau feuilletage Λ'_i de V_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Soit w un champ de vecteurs holomorphe sur l'ouvert $V \subset V_i$ et tangent à Λ_i. Alors $\Lambda'_i | V$ est défini par le champ de vecteurs

$$w + h^*(\omega_i)(w) \cdot (v_i | V).$$

Un calcul direct montre que, d'après la définition de r_i, le champ de vecteurs $\omega_i(w) \cdot (v|V)$ est holomorphe. On en déduit que Λ'_i est bien défini et tel que

$$\mathrm{tang}(\Lambda'_i, \Gamma_i) = \mathrm{tang}(\Lambda_i, \Gamma_i),$$

car v_i est tangent à Γ_i.

Par ailleurs, soit $U \subset U_i \cap U_k$ $(i \neq k)$ et soit u un champ de vecteurs holomorphe sur U. Soient w_i, w_k des relèvements de u holomorphes sur $h^{-1}(U)$ et tangents à Λ_i, Λ_k respectivement. Alors

$$\begin{aligned} w_k - w_i &= \omega_i(u)v_i - \omega_k(u)v_k \\ &= h^*(\omega_i)(w_i)v_i - h^*(\omega_k)(w_k)v_k \end{aligned}$$

sur $h^{-1}(U)$. Donc

$$w_i + h^*(\omega_i)(w_i)v_i = w_k + h^*(\omega_k)(w_k)v_k,$$

sur $h^{-1}(U)$ d'où suit que Λ'_i et Λ'_k coïncident sur $U_i \cap U_k$. On en conclut que les Λ'_i se recollent et définissent un feuilletage Λ de X tel que

$$\mathrm{tang}(\Lambda, \Gamma) = D.$$

Si Λ est à singularités isolées, on a fini. Sinon, observons que

$$E(D) = \Omega_B(R) \otimes_{\mathcal{O}_B} h_*(\mathcal{T}_\Gamma) \neq 0$$

(proposition 6.5). Alors, comme dans le théorème 5.4, on peut associer à chaque $\alpha \in E(D)$ un feuilletage Λ_α de X tel que $\mathrm{tang}(\Lambda_\alpha, \Gamma) = \mathrm{tang}(\Lambda, \Gamma)$; le feuilletage Λ_α est à singularités isolées pour α convenable (théorème 5.4d). □

Bibliographie

[1] BARTH (W.), PETERS (C.), VAN DE VEN (A.). — *Compact Complex Surfaces*, Springer Verlag, (1984).

[2] BRUNELLA (M.). — Feuilletages holomorphes sur les surfaces complexes compactes, *Ann. Norm. Sup.*, 4^a sér., t. 30, p. 569-594 (1997).

[3] BRUNELLA (M.). — *Birational Geometry of Surfaces,* First Latin-Americam Congress, IMPA, (2000).

[4] PAN (I.), SEBASTIANI (M.). — Feuilletages tourbillonnés sur les fibrés principaux elliptiques, pré-publication.

[5] GOMEZ-MONT (X.). — Universal families of foliations by curves, *Astérisque*, 150-151, 109-129 (1987).