ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

ABDELLAH BECHATA

Calcul pseudodifférentiel *p*-adique

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 13, nº 2 (2004), p. 179-240

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_2004_6_13_2_179_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XIII, n° 2, 2004
pp. 179–240

Calcul pseudodifférentiel $\mathfrak{p}$-adique [(*)]

ABDELLAH BECHATA [(1)]

RÉSUMÉ. — On développe ici l'analyse pseudodifférentielle des opérateurs agissant sur les fonctions à valeurs complexes sur k^n, où k est un corps non archimédien. Cette étude met en jeu, pour commencer, une généralisation au cas $\mathfrak{p}$-adique des méthodes obligatoires (calcul de Weyl, représentation d'Heisenberg) ou souhaitables (utilisation de familles d'états cohérents et caractérisation des classes d'opérateurs par leur action sur ces états) de l'analyse pseudodifférentielle. On en déduit une caractérisation « à la Beals » de classes d'opérateurs, ainsi qu'un calcul fonctionnel des opérateurs de poids un. L'absence d'opérateurs de dérivation interdit bien sûr tout développement « à la Moyal » de la composition de deux symboles: mais, utilisant la théorie des caractères multiplicatifs de $k^\times$, on donne une formule de composition reliant la décomposition en termes « homogènes » d'un produit $f_1 \# f_2$ aux décompositions de cette espèce de f_1 et f_2.

ABSTRACT. — We develop the pseudodifferential analysis of operators acting on complex-valued functions on k^n, where k is a non-Archimedean field. Our study relies on the generalization of classical concepts such as the the Weyl calculus and Heisenberg's representation, also on the characterization of classes of operators by means of their action on « families of coherent states ». A Beals-type characterization of certain classes of operators, together with the usual application to a functional calculus of operators of weight one, is derived as a consequence. Since no derivation operators are available in the p-adic analysis, no Moyal-style expansion of the composition of two symbols is possible: nevertheless, using the theory of multiplicative characters of $k^\times$, we give a composition formula expressing the decomposition in « homogeneous terms » of a sharp-product $f_1 \# f_2$ in terms of the corresponding decompositions of the two factors.

(*) Reçu le 2 juin 2003, accepté le 10 mars 2004
(1) Mathématiques, UMR 6056 Université de Reims BP 1039, F 51687 Reims Cedex 2, France.
E-mail : abdellah.bechata@univ-reims.fr

Table des matières

Introduction

Le calcul pseudo-différentiel, en particulier le calcul de Weyl, est un outil fondamental dans l'étude des opérateurs apparaissant naturellement dans les problèmes d'équations aux dérivées partielles. Cet article a pour but le développement du calcul de Weyl dans le cadre des corps locaux non-archimédiens. Une telle étude a été initiée en 1993 par S. Haran [S.H.].

Le livre de [V.V.Z] introduit également les opérateurs pseudo-différentiels en analyse p-adique dans un esprit plus orienté vers la physique. La méthode employée ici fait une large part à des méthodes directement issues de l'analyse harmonique (représentation d'Heisenberg, représentation métaplectique, familles d'états cohérents). Elle généralise ainsi les méthodes développées dans ([A.U.1]) dans le cas non-archimédien ; la présentation de l'analyse sur l'espace de phase dans [G.F.] est faite dans le même esprit. En revanche, les méthodes plus classiques de l'analyse pseudo-différentielle ([L.H.]), basées sur l'intégration par parties et les développements asymptotiques, ne sauraient s'étendre ici.

Désignons par k un corps local non-archimédien de caractéristique nulle ou différente de 2 et soit ψ un caractère non trivial de k. Considérons le groupe d'Heisenberg, l'unique extension centrale de de $k^d \times k^d$ par k construite à partir de la forme symplectique dont la définition est rappelée en 1.2 ci-dessous. Au caractère ψ est attaché une représentation irréductible unitaire bien définie (la représentation d'Heisenberg) du groupe d'Heisenberg dans l'espace $L^2(k^d, \mathbb{C})$. On introduit le calcul de Weyl, qui définit une application linéaire de $L^2(k^d \times k^d)$ (espace des symboles de carré intégrable) dans l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $L^2(k^d)$, par une généralisation naturelle de la formule usuelle dans le cas archimédien. L'un des objets de ce travail est d'étendre la signification de l'opérateur $Op(f)$ de symbole f à des cas plus généraux que celui où f appartient à $L^2(k^d \times k^d)$.

Il n'existe pas, dans le cas local non-archimédien, d'opérateur de dérivation, non plus que de fonction polynomiale à valeurs complexes : mais il est néanmoins possible, comme l'avait remarqué S. Haran, d'introduire deux familles (I^α) et (J^β) d'opérateurs se substituant aux classiques opérateurs de dérivation et de multiplication, et permettant de définir l'analogue des espaces de Sobolev ou les images de ces derniers par la transformation de Fourier. Ceci conduit à une définition naturelle aussi bien de l'espace $\mathcal{S}(k^d)$ « de Schwartz » et de son dual que des classes de symboles associées à des poids possédant des propriétés analogues à celles du cas archimédien. Il s'agit alors, pour commencer, d'étendre à l'analyse p-adique les critères de continuité des opérateurs pseudodifférentiels associés, et de montrer que l'on obtient ainsi des algèbres d'opérateurs non-commutatives dans le cas des symboles de poids 1.

La méthode employée ici consiste à partir de la fonction $\phi \in L^2(k^d)$, fonction caractéristique de l'ensemble des points de k^d à coordonnées dans l'anneau des entiers de k, que l'on a normalisée convenablement, et de la famille $(\phi_{y,\eta})$ que l'on en déduit en faisant agir la représentation d'Heisenberg. Tout le calcul symbolique des opérateurs dans des classes de symboles à poids est obtenu à partir d'une caractérisation des opérateurs $Op(f)$ dans une classe donnée par une propriété relative aux produits scalaires $(Op(f)\phi_{y,\eta}, \phi_{y',\eta'})$. Poussant cette méthode plus loin (suivant [U.U.]), on parvient à une caractérisation « à la Beals » de certaines classes d'opérateurs : ceci permet de justifier l'existence d'un calcul fonctionnel de ces opérateurs.

Un point sur lequel l'analyse pseudo-différentielle non-archimédienne est fondamentalement différente de l'analyse usuelle concerne la formule de composition des symboles, qui exprime le symbole $f\#g$ du composé de deux opérateurs de symboles f et g. Tout comme dans le cas archimédien, il existe une formule intégrale de composition, qui n'a rien de particulier. On sait que dans le cas archimédien, le développement en série entière de l'exponentielle qui intervient dans cette intégrale conduit à la formule asymptotique « de Moyal » $f\#g \sim fg + \frac{1}{4i\pi}\{f,g\} + \cdots$ Rien d'analogue ne saurait exister dans le cas non-archimédien parce qu'il n'y a pour commencer ni analogue du crochet de Poisson, ni développement en série du caractère ψ devant se substituer à l'exponentielle. En revanche, dans le cas de la dimension un, on peut décomposer tout symbole raisonnable comme superposition intégrale de termes homogènes, et décomposer à nouveau le composé $f\#g$ d'une façon analogue : bien entendu, les « termes » obtenus ne sont pas des polynômes ! On parvient alors (théorème 6.5), dans le cas non-archimédien, à une formule généralisant la formule annoncée dans la section 5 de [A.U.2], à l'occasion d'une étude sur les formes modulaires non-holomorphes, et démontrée dans [A.U.3]. La démonstration de ce théorème est assez longue et sera l'objet des sections 5 et 6.

Cet article est le résumé d'une thèse [A.B.] soutenue à l'Université de Reims : je remercie A. Unterberger pour son soutien pendant la préparation de cet article.

1. Définitions et notations générales

Dans toute la suite, k désigne un corps local non-archimédien, c'est-à-dire une extension algébrique de degré fini soit de $\mathbb{Q}_p$, soit de $\mathbb{F}_p((X))$ pour un certain nombre premier p, de caractéristique différente de 2. On note $\mathcal{O}_k$ l'anneau des entiers de k : c'est un anneau principal et local, c'est-à-dire qu'il possède un unique idéal maximal. On fixe une uniformisante ϖ de k, c'est-à-dire un générateur de cet idéal maximal et l'on note $|\ .\ |$ l'unique valeur absolue de k vérifiant $|\ \varpi\ |= (\mathrm{card}(\mathcal{O}_k/\varpi\mathcal{O}_k))^{-1}$ (dans le cas où $k = \mathbb{Q}_p$, on a ainsi $\mathcal{O}_k = \mathbb{Z}_p$ l'anneau des entiers p-adiques, $\varpi = p$ par exemple et $|\ x\ |= p^{-\alpha}$ si $x \in \mathbb{Q}$ avec $x = p^\alpha \frac{m}{n}$ où m et n sont des entiers non divisibles par p). Dans la suite, on notera parfois q le nombre entier$|\ \varpi\ |^{-1}$. En outre, on choisit dans toute la suite un caractère additif non trivial ψ de k. Le plus grand idéal fractionnaire de $\mathcal{O}_k$ sur lequel ψ est constant se nomme le conducteur de ψ ; il est traditionnellement noté $\mathcal{O}_k^o$ et il est égal à l'ensemble $\varpi^{n(\psi)}\mathcal{O}_k$ pour un certain $n(\psi)$ appartenant à $\mathbb{Z}$ (par exemple dans le cas où $k = \mathbb{Q}_p$, on peut choisir ψ de telle sorte que l'on ait $\psi(x) = e^{2\pi i y}$ si $x \in \mathbb{Q}_p$ et $y \in \mathbb{Q}$ avec $x - y \in \mathbb{Z}_p$. Le conducteur de ψ est alors $\mathbb{Z}_p$). À ce conducteur on associe une valeur absolue non-archimédienne sur k, « duale » de la valeur absolue $|.|$, et qui est définie par : $| x |^{\vee} = | x\varpi^{-n(\psi)} |$. Sur k^d, on définit les normes suivantes : $\|y\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant d} | y_i |$, $\|\eta\|^{\vee} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant d} | \eta_i |^{\vee}$.

Le but de ce travail est d'introduire et d'étudier un calcul symbolique des opérateurs linéaires, éventuellement non-bornés, agissant sur l'espace $L^2(k^d)$, où, pour emprunter la terminologie de la mécanique quantique, l'espace k^d peut-être appelé l'espace de configuration. Il convient, pour l'analyse de Fourier, d'introduire également l'espace dual, dit espace des impulsions : si, sur l'espace de configuration, on utilise la norme $|\ |$, on sera amené à utiliser la norme duale $|\ |^{\vee}$ sur l'espace des impulsions. Enfin, pour développer un calcul symbolique, il convient d'introduire l'espace de phase qui est le produit de l'espace de configuration par l'espace des impulsions. On peut l'écrire $k^d \times k^d$, étant entendu que le deuxième exemplaire est identifié au dual du premier au moyen de la dualité de groupes localement compacts définie par : $\left\{ \begin{array}{c} k^d \times k^d \to \mathbb{C}^{\times} \\ (y, \eta) \mapsto \psi(< y, \eta >), \end{array} \right.$ où l'on a posé, pour (y, η) appartenant à $k^d \times k^d$, $< y, \eta >= \sum\limits_{i=1}^{d} y_i \eta_i$. On remarquera que, lorsque d est égal à 1, le conducteur $\mathcal{O}_k^o$ défini précédemment s'identifie au dual de Pontriaguin du groupe $k/\mathcal{O}_k$ par cette dualité.

On note alors dx la mesure de Haar sur k^d autoduale relativement à la dualité précédente ; elle est caractérisée par la condition $vol(\mathcal{O}_k^d) \times vol((\mathcal{O}_k^o)^d) = 1$. L'espace $L^2(k^d)$ des fonctions de k^d dans $\mathbb{C}$ de carré intégrable est muni du produit scalaire usuel donné par

$$\forall u, v \in L^2(k^d), \quad (u, v) = \int_{k^d} u(x)\overline{v(x)}dx. \tag{1.1}$$

Comme dans la théorie archimédienne, l'espace de phase $k^d \times k^d$ est muni de la forme symplectique (ici à valeurs dans k), dont on rappelle la définition ; pour (y, η), (y', η') appartenant à $k^d \times k^d$, on pose

$$[(y, \eta), (y', \eta')] =< y', \eta > - < y, \eta' > . \tag{1.2}$$

On définit l'analogue non archimédien du poids $1+\|(y,\eta)\|^2$, pour (y,η) appartenant à $k^d \times k^d$, par la formule suivante :

$$| 1, y, \eta | = max(1, \|2y\|, \|2\eta\|^{\vee}), \tag{1.3}$$

et l'on note aussi

$$\begin{cases} | 1, y | = | 1, y, 0 |, \\ | 1, \eta |^{\vee} = | 1, 0, \eta | . \end{cases} \tag{1.4}$$

Ce poids vérifie encore une inégalité du type « inégalité de Peetre », i.e.

$$\forall\, X,\ Y\ \in k^{2d},\quad | 1,\ X+Y | \leqslant\ | 1,\ X | \times | 1, Y | . \tag{1.5}$$

Le facteur 2 présent au second membre de (1.3) est lié au fait que, partant de la considération sur l'espace de configuration de fonctions élémentaires à support dans $\mathcal{O}_k^d$, on parvient d'emblée, pour ce qui concerne leurs fonctions de Wigner (cf. proposition 2.10), à des fonctions à support dans $(\frac{1}{2}\mathcal{O}_k^d) \times (\frac{1}{2}\mathcal{O}_k^o)^d$ sur l'espace de phase (un phénomène tout à fait analogue se présente en analyse archimédienne où, si l'on part de la fonction $e^{-\pi\|x\|^2}$ sur $\mathbb{R}^d$, on parvient par le même procédé à la fonction $e^{-2\pi(\|y\|^2+\|\eta\|^2)}$ sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$). Nous devons, en particulier, disposer d'un poids m tel que l'opérateur, non borné, de multiplication par m possède comme fonctions propres ces fonctions de Wigner et, pour cela, il suffit que notre poids soit $(\frac{1}{2}\mathcal{O}_k^d) \times (\frac{1}{2}\mathcal{O}_k^o)^d$-périodique.

L'espace usuel des fonctions-test sur k^d est l'espace de Schwartz-Bruhat que l'on note $\mathcal{S}_{alg}(k^d)$; il est défini comme espace des fonctions à support compact et localement constantes sur k^d. La transformation de Fourier (notée $\mathcal{F}$) sur $\mathcal{S}_{alg}(k^d)$ est donnée par la formule suivante :

$$\forall u \in \mathcal{S}_{alg}(k^d),\ (\mathcal{F}u)(x) = \int_{k^d} u(y)\psi(-< y, x >)dy\ . \tag{1.6}$$

Il est nécessaire d'introduire également la transformation de Fourier symplectique (notée $\mathcal{G}$) sur $\mathcal{S}_{alg}(k^d \times k^d)$ dont voici la définition :

$$\forall\ f \in \mathcal{S}_{alg}(k^d \times k^d),\ (\mathcal{G}f)(X) = |2|^d \int_{k^d\times k^d} f(Y)\psi(2[Y,X])\ dY. \tag{1.7}$$

La normalisation choisie est traditionnelle dans le cas archimédien : le symbole $\mathcal{G}f$ est en effet (cela persiste ici) le symbole de l'opérateur obtenu en composant à droite l'opérateur $Op(f)$ par la symétrie $u \mapsto \check{u}$. La transformation $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$), qui est un automorphisme de $\mathcal{S}_{alg}(k^d)$ (resp. de $\mathcal{S}_{alg}(k^d \times k^d)$), se prolonge en un automorphisme isométrique de $L^2(k^d)$ (resp. $L^2(k^d \times k^d)$) ; en outre, la transformation de Fourier symplectique jouit de la propriété supplémentaire $\mathcal{G}^2 = Id_{L^2(k^{2d})}$.

Pour en terminer avec les définitions générales, on rappelle la définition de la représentation unitaire irréductible projective « d'Heisenberg » π de $k^d \times k^d$ dans $L^2(k^d)$ attachée au caractère ψ. Elle est définie pour u appartenant à $L^2(k^d)$ par $(\pi(y,\eta)u)(x) = \psi(< x - \frac{y}{2}, \eta >)\ u(x-y)$ et vérifie l'identité suivante valable pour tout couple (X,Y) appartenant à $\left(k^d \times k^d\right) \times \left(k^d \times k^d\right)$:

$$\pi(X)\pi(Y) = \psi(\frac{1}{2}[X,Y])\ \pi(X+Y). \tag{1.8}$$

Un autre espace S

Pour l'étude du calcul de Weyl local, il est nécessaire d'introduire de nouvelles familles d'opérateurs qui joueront un rôle analogue aux classiques opérateurs archimédiens de multiplication et de dérivation. Cette définition conduit à l'introduction d'un espace $\mathcal{S}$ de fonctions suivant [S.H.].

Soient α, β deux nombres réels positifs ; on introduit sur l'espace $\mathcal{S}_{alg}(k^d)$ les opérateurs suivants :

$$\forall u \in \mathcal{S}_{alg}(k^d), \left\{ \begin{array}{c} (I^\alpha u)(x) = \mid 1, x \mid^\alpha u(x), \\ (I^{\vee\alpha} u)(\xi) = \mid 1, \xi \mid^{\vee\alpha} u(\xi), \\ (J^\beta u)(x) = (\mathcal{F}^{-1} I^{\vee\beta} \mathcal{F} u)(x), \\ (I^{\alpha,\beta} u)(x) = (I^\alpha J^\beta u)(x). \end{array} \right.$$

Sur l'espace $\mathcal{S}_{alg}(k^d \times k^d)$, on définit de même l'opérateur $\widetilde{I}^\alpha$ de multiplication par $\mid 1, X \mid^\alpha = \left[max(1, \|2x\|, \|2\xi\|^\vee)\right]^\alpha$ si $X = (x,\xi)$ et l'opérateur $\tilde{J}^\beta$, conjugué par $\mathcal{G}$ de l'opérateur $\widetilde{I}^\beta$: l'opérateur $\tilde{J}^\beta$ joue donc le rôle que jouerait l'opérateur $(1-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}$ en analyse réelle. Contrairement au cas archimédien, les opérateurs I^α et J^β commutent, ainsi qu'il a été remarqué par S. Haran (*loc.cit)*. On le revérifiera plus loin.

Les différents opérateurs introduits ci-dessus sont essentiellement auto-adjoints sur $L^2(k^d)$ (resp. $L^2(k^d \times k^d)$) et l'on désignera par les mêmes symboles leur unique extension auto-adjointe (dont le domaine contient par définition $\mathcal{S}_{alg}(k^d)$ (resp. $\mathcal{S}_{alg}(k^d \times k^d)$)). On appellera espace des « fonctions à décroissance rapide » l'espace $\mathcal{S}(k^d) = \bigcap_{\alpha,\beta \geqslant 0} Dom(I^{\alpha,\beta})$. Autrement dit, il s'agit de l'espace des fonctions u appartenant à $L^2(k^d)$ telles que $I^{\alpha,\beta}u$ appartienne à $L^2(k^d)$ pour tout couple de nombres réels positifs (α,β). L'espace vectoriel $\mathcal{S}(k^d)$ devient un espace de Fréchet lorsqu'on le munit de la famille de semi-normes $\| u \|_{\alpha,\beta} = \| I^{\alpha,\beta}u \|_{L^2(k^d)}$. En outre, $\mathcal{S}(k^d)$ est un espace nucléaire, ce qui nous permettra d'utiliser le moment venu l'analogue du théorème des noyaux de Schwartz.

On note $\mathcal{S}'(k^d)$ le dual topologique de $\mathcal{S}(k^d)$ que l'on appellera espace des distributions « tempérées » sur k^d et, pour toute distribution tempérée T et pour toute fonction à décroissance rapide u sur k^d, on note $< T, u >$ la valeur de T sur u; on écrit aussi $(T,u) = < T, \overline{u} >$ (où $u \longmapsto \overline{u}$ est la conjugaison complexe).

DÉFINITION 1.1. — *On note ϕ (resp. ϕ^o) la fonction caractéristique de $(\mathcal{O}_k)^d$ (resp. $(\mathcal{O}_k^o)^d$) multipliée par $(vol(\mathcal{O}_k)^d)^{-\frac{1}{2}}$ (resp. $(vol(\mathcal{O}_k^o)^d)^{-\frac{1}{2}}$) et, pour tout (y,η) appartenant à $k^d \times k^d$, on pose $\phi_{y,\eta} = \pi(y,\eta)\phi$.*

La transformée de Fourier de ϕ (resp. ϕ^o) est ϕ^o (resp. ϕ). La famille $(\phi_{y,\eta})_{(y,\eta)\in k^d\times k^d}$ s'appelle une famille d'états cohérents pour $L^2(k^d \times k^d)$ et elle jouera un grand rôle dans la suite en raison du lemme suivant, appelé quelquefois « résolution de l'identité » (dans le cas archimédien). La preuve est faite dans [S.H.] dans le cas du corps $\mathbb{Q}_p$ et se généralise sans difficulté.

LEMME 1.2. — *Pour tout couple de fonctions u, v appartenant à $L^2(k^d)$, on a :*

$$\begin{cases} \| u \|^2_{L^2(k^d)} = \int\limits_{k^{2d}} | (u, \phi_X) |^2 \, dX, \\ (u,v) = \int\limits_{k^{2d}} (u,\phi_X)(\phi_X, v) \, dX \end{cases}$$

où le produit scalaire dans $L^2(k^d)$ a été défini en (1.1).

Les fonctions $\phi_{y,\eta}$ appartiennent à l'espace $\mathcal{S}_{alg}(k^d)$ et on dispose des deux formules suivantes :

$$\forall (y,\eta) \in k^d \times k^d, \ I^{\alpha,\beta}\phi_{y,\eta} = | 1, y |^{\alpha} | 1, \eta |^{\vee\beta} \phi_{y,\eta}. \tag{1.9}$$

La formule (1.9) et le lemme 1.2 permettent de revérifier que les opérateurs I^α et J^β commutent. En outre, ils se prolongent en des automorphismes, continuant à commuter entre eux, de l'espace de Fréchet $\mathcal{S}(k^d)$. Enfin par dualité, on étend ces opérateurs en des endomorphismes continus (pour la topologie faible) de l'espace $\mathcal{S}'(k^d)$. De façon analogue à la théorie archimédienne, toute distribution tempérée sur k^d est, par le théorème de

Hahn-Banach, combinaison linéaire de distributions de la forme $I^{\alpha,\beta}u$ où u est un élément de $L^2(k^d)$ et (α,β) est un couple de réels positifs. En combinant ce dernier résultat avec le lemme 1.2, on en déduit que, pour toute distribution tempérée f sur k^d et pour toute fonction à décroissance rapide u sur k^d, l'identité suivante est vérifiée :

$$(f,u) = \int\limits_{k^{2d}} (f,\phi_X)(\phi_X,u)\, dX. \tag{1.10}$$

Rappelons que l'espace de Schwartz-Bruhat $\mathcal{S}_{alg}(k^d)$ est la limite inductive des espaces de fonctions continues localement constantes à support dans un compact donné de k^d. On appelle distribution toute forme linéaire continue sur cet espace.

PROPOSITION 1.3. — (*i*) *Soit f une distribution sur k^d, alors f appartient à $\mathcal{S}'(k^d)$ si et seulement si il existe un entier positif N tel que la fonction $X \to\mid 1,X\mid^{-N}(f,\phi_X)$ appartienne à $L^2(k^d\times k^d)$.*

(*ii*) *Soit f un élément de $\mathcal{S}'(k^d)$, alors f appartient à $L^2(k^d)$ si et seulement si la fonction $X\to(f,\phi_X)$ appartient à $L^2(k^d\times k^d)$.*

(*iii*) *Soit f un élément de $\mathcal{S}'(k^d)$, alors f appartient à $\mathcal{S}\ (k^d)$ si et seulement si pour tout entier positif N la fonction $X\to\mid 1,X\mid^{N}(f,\phi_X)$ appartient à $L^2(k^d\times k^d)$.*

Preuve. — (*i*) Pour l'implication directe, on utilise le fait que toute distribution tempérée est la combinaison linéaire de distributions de la forme $I^{\alpha,\beta}u$ où u est un élément de $L^2(k^d)$ et (α,β) est un couple de réels positifs ainsi que la formule (1.9) et le fait que la fonction $X\to\mid 1,X\mid^{-(d+1)}$ est de carré intégrable. Pour la réciproque, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la fonction $X\mapsto(f,\phi_X)(\phi_X,u) = \left[\mid 1,X\mid^{-N}(f,\phi_X)\right]\left[\mid 1,X\mid^{N}(\phi_X,u)\right]$ puis la minoration évidente $\mid 1,y,\eta\mid\geqslant \max(|1,y|\,,|1,\eta|^{\vee})$ et la formule (1.9). On en déduit que la forme linéaire $\tilde f$ sur l'espace $\mathcal{S}(k^d)$ définie par : $\forall u\in\mathcal{S}(k^d)$, $<\tilde f,u>=\int\limits_{k^{2d}}(f,\phi_X)(\phi_X,\overline{u})dX$ est une distribution tempérée sur k^d qui coïncide avec f sur les états cohérents qui forment une famille génératrice de $\mathcal{S}_{alg}(k^d)$.

(*ii*) L'implication directe est l'objet du lemme 1.2 et la réciproque de la formule (1.10) ainsi que de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(*iii*) L'implication directe découle de ce que la fonction $I^{N,N}u$ appartient à $L^2(k^d)$, du lemme 1.2, de la minoration évidente $\mid 1,y,\eta\mid\geqslant$

$\max(|1,y|, |1,\eta|^{\vee})$ et de l'identité (1.9). Pour la réciproque, on utilise l'identité (1.9), la formule (1.10), l'hypothèse faite sur f, l'inégalité $| \ 1,y \ |^{\alpha} | \ 1,\eta \ |^{\vee\beta} \leqslant | \ 1,y,\eta \ |^{\alpha+\beta}$ ainsi que le point (*ii*) de la présente proposition pour aboutir au fait que f appartient à l'espace $\mathcal{S}(k^d)$. □

COROLLAIRE 1.4. — *La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un automorphisme continu de $\mathcal{S}(k^d)$ ou de $\mathcal{S}'(k^d)$ (ce dernier étant muni de la topologie de dual faible du premier).*

Preuve. — Pour $\mathcal{S}(k^d)$, il suffit de constater que $\mathcal{F}^{-1}\pi(y,\eta)\mathcal{F} = \pi(-\eta,y)$ et d'appliquer la proposition 1.3 (*iii*). Le résultat s'étend immédiatement à $\mathcal{S}'(k^d)$ par dualité. □

2. Le calcul de Weyl $\mathfrak{p}$−adique

2.1. Définition dans le cadre L^2

Pour toute fonction f appartenant à $L^2(k^d \times k^d)$, on désigne par $Op(f)$ et l'on appelle opérateur de symbole f, l'opérateur de $L^2(k^d)$ dans $L^2(k^d)$ possédant pour noyau intégral la fonction a_f sur $k^d \times k^d$ donnée par la formule :

$$a_f(x,y) = \int_{k^d} f(\frac{x+y}{2},\eta)\psi(< x-y,\eta >)d\eta, \tag{2.1}$$

où le terme de droite doit être considéré comme la transformée de Fourier évaluée en $y-x$ de la fonction $\eta \mapsto f(\frac{x+y}{2},\eta)$. Traditionnellement, l'opérateur $Op(f)$ est noté sous la forme symbolique suivante :

$$\forall u \in L^2(k^d),\ (Op(f)u)(x) = \int_{k^d}\int_{k^d} f(\frac{x+y}{2},\eta)u(y)\psi(< x-y,\eta >)\ dy\ d\eta. \tag{2.2}$$

Les propriétés usuelles de la transformation de Fourier (ici partielle) montrent que le noyau a_f est de carré intégrable sur $k^d \times k^d$ et que l'application $f \mapsto a_f$ est une isométrie surjective de $L^2(k^d \times k^d)$. La théorie des opérateurs de Hilbert-Schmidt nous permet alors d'énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1. — *L'application qui à une fonction f appartenant à $L^2(k^d \times k^d)$ associe l'opérateur $Op(f)$ est une isométrie surjective de $L^2(k^d \times k^d)$ sur l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt de $L^2(k^d)$.*

Remarque. — En particulier, si f est un symbole appartenant à $L^2(k^d \times k^d)$, l'adjoint de $Op(f)$ possède un symbole, qui n'est autre que $\overline{f}$.

DÉFINITION 2.2. — *Soient f et g deux symboles appartenant à $L^2(k^d \times k^d)$. L'opérateur $Op(f)Op(g)$, qui est le composé de deux opérateurs de Hilbert-Schmidt, est un opérateur de Hilbert-Schmidt. On appelle composé des deux symboles f et g l'unique symbole $f\#g$, appartenant à $L^2(k^d \times k^d)$, défini par :*

$$Op(f)Op(g) = Op(f\#g)$$

DÉFINITION 2.3. — *Soient u et v deux fonctions appartenant à $L^2(k^d)$. On appelle fonction de Wigner du couple (u,v) le symbole de l'opérateur de rang un $w \mapsto (w,v)u$. On la note $W(u,v)$. En particulier, d'après la proposition précédente, la fonction de Wigner $W(u,v)$ appartient à $L^2(k^d \times k^d)$.*

PROPOSITION 2.4. — *Soient u et v deux fonctions appartenant à $L^2(k^d)$ et soit f une fonction appartenant à $L^2(k^d \times k^d)$. Alors, on a l'égalité suivante :*

$$(Op(f)u,v) = \int_{k^{2d}} f(Z)W(u,v)(Z)dZ. \tag{2.3}$$

En particulier, la fonction $W(u,v)$ est définie par :

$$(W(u,v))(z,\varsigma) = |2|^d \int_{k^{2d}} u(z-t)\overline{v(z+t)}\psi(2 < t,\varsigma >)\ dt. \tag{2.4}$$

Preuve. — Il est immédiat que l'adjoint de l'opérateur $Op(W(v,u))$ est $Op(W(u,v))$. En particulier, cela montre que $\overline{W(v,u)} = W(u,v)$. La proposition 2.1 montre que pour toute fonction $f \in L^2(k^d \times k^d)$, $Tr(O(f)Op(f)^*) = \int_{k^{2d}} |f(Z)|^2 dZ$. En polarisant cette dernière formule, on obtient pour tout couple de symboles $(f,g) \in (L^2(k^d \times k^d))^2$, la relation $Tr(O(f)Op(g)^*) = \int_{k^{2d}} f(Z)\overline{g(Z)}dZ$ et, en remplaçant g par $W(v,u)$, on voit que :

$$\begin{aligned} Tr(Op(f)Op(W(v,u))^*) &= \int_{k^{2d}} f(Z)\overline{(W(v,u))(Z)}dZ \\ &= \int_{k^{2d}} f(Z)(W(u,v))(Z)dZ. \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'opérateur $Op(f)Op(W(v,u))^*$ n'est autre que l'opérateur de rang un $w \mapsto (w,v)Op(f)u$ dont la trace est égale à $(Op(f)u,v)$. La formule (2.4) résulte facilement de (2.3) et de la formule (2.2) de l'opérateur $Op(f)$. □

La relation de covariance suivante

$$\pi(X)Op(f)\pi(X)^{-1} = Op(Y \mapsto f(Y-X)), \tag{2.5}$$

analogue à sa version archimédienne, est fondamentale. On peut la vérifier en réécrivant la définition de $Op(f)u$ sous la forme

$$\forall u \in L^2(k^d),\ (Op(f)u)(x) = \mid 2 \mid^{-d} \int\limits_{k^{2d}} (\mathcal{G}f)(\frac{Y}{2})(\pi(Y)u)(x)dY. \tag{2.6}$$

En particulier : $\pi(X)Op(W(u,v))\pi(X)^{-1} = Op(Z \mapsto (W(u,v))(Z-X))$ quels que soient u et v appartenant à $L^2(k^d)$ et X appartenant à k^{2d}.

D'autre part, la définition de la fonction $W(u,v)$ montre que

$$\pi(X)Op(W(u,v))\pi(X)^{-1} = Op(W(\pi(X)u, \pi(X)v)).$$

Ces deux dernières formules nous fournissent la relation de covariance suivante :

$$\forall\ Z\ \in k^{2d},\ (W(\pi(X)u\ ,\ \pi(X)v))(Z) = (W(u,v))(Z-X). \tag{2.7}$$

Dans la suite, nous allons être amenés à calculer la fonction de Wigner attachée à deux états cohérents. Pour cela, nous utiliserons, outre cette relation, le lemme suivant dont la preuve est immédiate :

LEMME 2.5. — *Pour toutes fonctions u, v appartenant à $L^2(k^d)$ et pour tous éléments X, Z de $k^d \times k^d$, on a :*

$$(W(\pi(X)u\ ,\ \pi(-X)v))(Z) = \psi(-2[Z,X])(W(u,v))(Z).$$

On désigne par $Sp(d,k)$ le groupe symplectique de $k^d \times k^d$ c'est-à-dire le groupe des automorphismes linéaires g de $k^d \times k^d$ tel que $\forall X,\ Y \in k^{2d}$, $[gX, gY] = [X,Y]$. Il existe une représentation projective Met, c'est-à-dire une représentation, à des facteurs multiplicatifs complexes de module 1 près, de $Sp(d,k)$ dans $L^2(k^d)$, telle que

$$\forall g \in Sp(d,k),\ \forall X\ \in k^{2d}, \qquad \mathrm{Met}(g)\pi(X)\mathrm{Met}(g)^{-1} = \pi(g.X), \tag{2.8}$$

où $g.X$ est l'image de X sous l'action linéaire de g. Cette représentation n'est autre que la représentation métaplectique (que l'on appelle communément représentation de Weil en arithmétique), et qui devient une vraie représentation si on la relève au revêtement d'ordre deux du groupe symplectique.

PROPOSITION 2.6. — *Soit f un symbole appartenant à $L^2(k^{2d})$. Alors, on a la relation de covariance suivante :*

$$\forall g \in Sp(d,k),\ \forall f \in L^2(k^{2d}),\ \mathrm{Met}(g)Op(f)\mathrm{Met}(g)^{-1} = Op(Z \mapsto f(g^{-1}.Z)). \tag{2.9}$$

Celle-ci est bien connue en calcul de Weyl sur $\mathbb{R}$ et nous nous y référerons sous le nom de « covariance métaplectique ».

Preuve. — Elle découle des relations (2.6) et (2.8). □

Remarque. — Si g est un élément de $Sp(d,k)$ et f un symbole, on définit le symbole $f \circ g$ par $(f \circ g)(Z) = f(g.Z)$. La relation (2.9) combinée à la définition 2.2 de la composition des symboles montre que, pour tous symboles f_1 et f_2 et tout élément $g \in Sp(d,k)$, on a

$$(f_1 \circ g) \# (f_2 \circ g) = (f_1 \# f_2) \circ g \tag{2.10}$$

La relation (2.9) jouera un rôle important dans la section 6 pour la formule de composition. Par contre, seule la relation de covariance (2.5), liée à la représentation d'Heisenberg plutôt qu'à la représentation métaplectique, joue un rôle dans les trois premières sections. Elle a été à la base de l'utilisation des familles d'états cohérents $(\phi_X)_{X \in k^{2d}}$.

LEMME 2.7. — *Soit u un élément de l'espace $\mathcal{S}(k^d)$ et g un élément de $Sp(d,k)$. Alors la fonction* $\mathrm{Met}(g)u$ *appartient à $\mathcal{S}(k^d)$.*

Preuve. — Posons $\psi = \mathrm{Met}(g)^{-1}\phi$ et, d'une façon analogue à la définition 1.1, pour tout $X \in k^d \times k^d$, $\psi_X = \pi(X)\psi$. On a alors l'égalité $(\mathrm{Met}(g)u, \phi_X) = (u, \psi_{g^{-1}.\,X})$. On remarque d'autre part que, pour tout élément g appartenant à $Sp(d,k)$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall X \in k^{2d},\ C^{-1} \mid 1, X \mid \leqslant \mid 1, g.^{-1}X \mid \leqslant C \mid 1, X \mid .$$

On conclut en utilisant la proposition 1.3 et le lemme 1.2. □

2.2. Calcul de Weyl général et calcul standard

Il est immédiat que le produit tensoriel de deux fonctions à décroissance rapide sur k^d est une fonction à décroissance rapide sur $k^d \times k^d$. Par ailleurs, l'application $f \mapsto a_f$ (où a_f est le noyau associé à f dans la formule (2.1)) est un automorphisme continu de $\mathcal{S}'(k^{2d})$. On peut donc définir l'opérateur $Op(f)$ lorsque f est une distribution tempérée sur $k^d \times k^d$ par :

$$\forall u, v \in \mathcal{S}(k^d),\ (Op(f)u, v) = < a_f, \overline{v} \otimes u > . \tag{2.11}$$

Cette formule définit donc $Op(f)u$ comme une distribution tempérée sur k^d toutes les fois que $u \in \mathcal{S}(k^d)$. La même formule montre que si f appartient à $\mathcal{S}(k^{2d})$, l'opérateur $Op(f)$ s'étend en un opérateur continu de $\mathcal{S}'(k^d)$ dans $\mathcal{S}(k^d)$. Les espaces de fonctions à décroissance rapide sur k^d sont des espaces nucléaires. Si l'on combine ceci à l'identité $\mathcal{S}(k^d)\widehat{\otimes}\mathcal{S}(k^d) = \mathcal{S}(k^d \times k^d)$, on obtient l'analogue du théorème des noyaux de Schwartz : c'est-à-dire, tout opérateur séquentiellement continu de $\mathcal{S}(k^d)$ dans $\mathcal{S}'(k^d)$ possède un noyau qui est une distribution tempérée sur k^{2d}. En rappelant que l'application $f \mapsto a_f$ est un automorphisme continu de $\mathcal{S}'(k^{2d})$, on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME 2.8. — *(i) L'application $Op : f \mapsto Op(f)$ réalise un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques entre $\mathcal{S}'(k^d \times k^d)$ et l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{S}(k^d), \mathcal{S}'(k^d))$ des opérateurs linéaires continus de $\mathcal{S}(k^d)$ dans $\mathcal{S}'(k^d)$, muni de la topologie de la convergence faible.*

(ii) L'application Op réalise un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques entre $\mathcal{S}(k^d \times k^d)$ et l'espace $\mathcal{L}_c(\mathcal{S}'(k^d), \mathcal{S}(k^d))$ des opérateurs linéaires continus de $\mathcal{S}'(k^d)$ dans $\mathcal{S}(k^d)$, muni de la topologie de la convergence faible.

Nous pouvons en déduire l'extension suivante de la proposition 2.4 :

PROPOSITION 2.9. — *Si u et v appartiennent à $\mathcal{S}(k^d)$, $W(u,v)$ appartient à $\mathcal{S}(k^d \times k^d)$. En outre, pour toute distribution tempérée f sur $k^d \times k^d$ et toutes fonctions u, v appartenant à $\mathcal{S}(k^d)$, on a : $(Op(f)u, v) = < f, W(u,v) >$*

Preuve. — Soient u, v deux fonctions appartenant à $\mathcal{S}(k^d)$. D'après la définition 2.3, la fonction $W(u,v)$ appartient à $L^2(k^d \times k^d)$. On peut donc considérer l'opérateur $Op(W(u,v))$ qui, toujours par la définition 2.3, opère continûment de $\mathcal{S}'(k^d)$ dans $\mathcal{S}(k^d)$. La fonction de Wigner $W(u,v)$ appartient donc à $\mathcal{S}(k^{2d})$, d'après le théorème 2.8 *(ii)*. Ainsi nous pouvons considérer les applications $f \mapsto (Op(f)u, v)$ et $f \mapsto (f, \overline{W(u,v)})$ qui sont continues sur $L^2(k^d \times k^d)$ muni de la topologie induite par $\mathcal{S}'(k^d \times k^d)$. D'après la proposition 2.4, ces deux applications coincdent sur l'espace $L^2(k^d \times k^d)$ qui est dense dans $\mathcal{S}'(k^d \times k^d)$. $\square$

Remarque. — Il est utile de remarquer une conséquence de la proposition 2.9 et du théorème 2.8 (i). Soit h une distribution tempérée sur $k^d \times k^d$ telle que $< h, W(u,v) >= 0$ pour tout couple de fonctions (u,v) appartenant à $\mathcal{S}(k^d)$. Alors h est la distribution nulle.

Nous allons définir dans cette partie un autre calcul pseudo-différentiel, ou « règle de quantification », qui nous sera utile dans la section 6 : nous l'appellerons calcul standard car il est l'analogue non-archimédien du calcul standard de l'analyse pseudodifférentielle réelle.

$$\forall\, u \in L^2(k^d),\ (Op_{st}(f)u)(x) = \int_{k^d} f(x,\xi)(\mathcal{F}u)(\xi)\psi(< x,\xi >)\, d\xi. \tag{2.12}$$

Tout comme dans le cas archimédien, si $f(x,\xi) = a(x)b(\xi)$, l'opérateur de symbole standard f s'identifie à l'opérateur de convolution par la fonction $\mathcal{F}^{-1}b$ suivi de l'opérateur de multiplication par la fonction a.

On remarquera que $(Op_{st}(f)u, v)$ n'est autre que la valeur de la distribution de densité f sur la fonction $(x,\xi) \mapsto \overline{v(x)}\mathcal{F}u(\xi)\psi(< x,\xi >)$:

$$\forall\, u,v \in L^2(k^d),\ (Op_{st}(f)u,v) = \int_{k^d}\int_{k^d} f(x,\xi)(\mathcal{F}u)(\xi)\psi(< x,\xi >)\overline{v(x)}\, dx\, d\xi. \tag{2.13}$$

Ceci permet de voir que, tout comme en calcul de Weyl, les symboles standard dans $\mathcal{S}(k^d \times k^d)$ (resp. $\mathcal{S}'(k^d \times k^d)$) correspondent à des opérateurs dans l'espace $\mathcal{L}_c(\mathcal{S}'(k^d), \mathcal{S}(k^d))$ (resp.$\mathcal{L}_c(\mathcal{S}(k^d), \mathcal{S}'(k^d))$).

Soit f appartenant à $\mathcal{S}'(k^d \times k^d)$. D'après le théorème 2.8, l'opérateur $Op(f)$ possède un symbole standard dans $\mathcal{S}'(k^d \times k^d)$; notons le Λf :

$$Op(f) = Op_{st}(\Lambda f). \tag{2.14}$$

Un calcul direct permet d'expliciter ce symbole sous la forme suivante :

$$(\mathcal{F}_1(\Lambda f))(\eta,\xi) = (\mathcal{F}_1 f)(\eta, \xi + \frac{\eta}{2}) \tag{2.15}$$

où $\mathcal{F}_1$ désigne l'opérateur de transformation de Fourier partielle relativement à la première variable dans k^d. L'opérateur Λ est un automorphisme de chacun des espace $\mathcal{S}(k^{2d})$, $\mathcal{S}'(k^{2d})$ et $L^2(k^{2d})$. Introduisons l'espace

$$\mathcal{C}_{k^d} = \left\{ u \in L^2(k^d) \text{ tel que } \forall N \in \mathbb{N},\ \exists \alpha_N,\ I^{-\alpha_N} J^N u \in L^2(k^d) \right\},$$

ainsi que son image $\mathcal{F}C_{k^d}$ par la transformation de Fourier. L'espace $\mathcal{C}_{k^d}$ (resp. $\mathcal{F}C_{k^d}$) est l'analogue non-archimédien de l'espace O_M (resp. O'_C) de

Schwartz. Soient h_1 et h_2 deux symboles standard appartenant à $\mathcal{S}'(k^{2d})$, le premier ne dépendant que de x et le second que de ξ. Alors, on a les inclusions suivantes : $Op_{st}(h_1)\mathcal{F}C_{k^d} \subset \mathcal{S}'(k^d)$ et $Op_{st}(h_2)\mathcal{S}(k^d) \subset \mathcal{F}C_{k^d}$, qui permettent de définir l'opérateur $Op_{st}(h_1)Op_{st}(h_2)$ comme opérateur de domaine $\mathcal{S}(k^d)$ à valeurs dans $\mathcal{S}'(k^d)$.

Remarque. — Le calcul standard sera utile dans la section 6. En effet, si h_1 et h_2 sont deux symboles standard appartenant à $\mathcal{S}'(k^{2d})$, le premier ne dépendant que de x et le second que de ξ, il est évident, d'après (2.12), que le composé $Op_{st}(h_1)Op_{st}(h_2)$, de ces deux opérateurs admet encore un symbole standard à savoir $h_1(x)\ h_2(\xi)$. La formule (2.15) permet alors d'attribuer à l'opérateur produit un symbole de Weyl appartenant à $\mathcal{S}'(k^{2d})$, encore noté $h_1\#\ h_2$.

On a besoin de calculer la fonction de Wigner de deux états cohérents : celle-ci sera utilisé à plusieurs reprises dans les démonstrations de la section 2. Il est nécessaire d'introduire une nouvelle fonction qui est définie par

$$\Phi(z,\varsigma) = |2|^d\, \phi(2z)\phi^0(2\varsigma)\psi(-2 < z,\varsigma >), \tag{2.16}$$

où l'on renvoie à la définition 1.1 pour la signification de ϕ et de ϕ^0.

PROPOSITION 2.10. — *Soient X, X' deux éléments de $k^d \times k^d$. Alors la fonction de Wigner $W(\phi_X,\phi_{X'})$ est donnée par :*

$$W(\phi_X,\phi_{X'})(Z) = \psi(-\frac{1}{2}[X,X'])\ \Phi(Z - \frac{X+X'}{2})\ \psi(-[Z,X-X']).$$

Preuve. — La relation de covariance (2.7), la formule (1.8) ainsi que le lemme 2.5 montrent que

$$\begin{aligned} &W(\phi_X,\phi_{X'})(Z)\\ &\quad = \psi(-\frac{1}{2}[X,X'])\ (W(\pi(\frac{X-X'}{2})\phi\ ,\ \pi(\frac{X'-X}{2})\phi))(Z - \frac{X+X'}{2})\\ &\quad = \psi(-\frac{1}{2}[X,X'])\ \psi(-[Z,X-X'])\ (W(\phi,\phi))(Z - \frac{X+X'}{2}) \end{aligned}$$

D'autre part, d'après (2.4), on a

$$W(\phi,\phi)(z,\varsigma) = |2|^d \int_{k^{2d}} \phi(z-t)\overline{\phi(z+t)}\psi(2 < t,\varsigma >)\ dt.$$

On constate que le support de la fonction $t \mapsto \phi(z-t)\overline{\phi(z+t)}$ est l'intersection des ensembles $(z+\mathcal{O}_k^d)$ et $(-z+\mathcal{O}_k^d)$, qui est vide sauf si $2z \in \mathcal{O}_k^d$. Le changement de variable $t \mapsto t - z$, ainsi que quelques calculs élémentaires montrent que $W(\phi,\phi) = \Phi$. $\square$

3. Calcul de Weyl et classes de symboles définies par des poids

3.1. Définition des espaces de symboles à poids

Soit $m : k^d \times k^d \to \mathbb{R}_+^\times$ une application mesurable : on dit que m est un poids s'il existe un entier positif N et une constante C positive tels que, quels que soient X et Y appartenant à $k^d \times k^d$, on ait :

$$m(X) \leqslant C\, m(Y) \mid 1, X - Y \mid^N . \tag{3.1}$$

On appelle alors symbole de poids m toute fonction f sur $k^d \times k^d$ telle que, pour tout entier positif N, l'image $\tilde{J}^N f$ de f par l'endomorphisme $\tilde{J}^N$ de $\mathcal{S}'(k^d \times k^d)$ coïncide avec une fonction g_N vérifiant, pour tout X appartenant à $k^d \times k^d$ et pour une certaine constante positive C_N, l'estimation $|g_N(X)| \leqslant C_N\, m(X)$. On note $S(m)$ l'espace vectoriel des symboles de poids m.

3.2. Caractérisation par les états cohérents des opérateurs possédant un symbole à poids

Soit A un opérateur séquentiellement continu de $\mathcal{S}(k^d)$ dans $\mathcal{S}'(k^d)$. D'après le théorème 2.8 (i), cet opérateur possède un symbole f appartenant à $\mathcal{S}'(k^d \times k^d)$. Il est possible d'exprimer ce symbole à l'aide des fonctions de Wigner d'états cohérents et de l'action de l'opérateur A sur les états cohérents. Nous allons expliciter ce lien dans les lemmes suivants.

LEMME 3.1. — *Soient X, X' deux éléments de $k^d \times k^d$. Alors, pour tous entiers relatifs N, M, l'égalité suivante est valable :*

$$\begin{aligned} &\widetilde{I}^M \tilde{J}^N (Z \mapsto \psi(-[Z, X - X'])\Phi(Z - \frac{X+X'}{2})) \\ &= \mid 1, \frac{X+X'}{2} \mid^M \mid 1, \frac{X-X'}{2} \mid^N \psi(-[Z, X - X'])\Phi(Z - \frac{X+X'}{2}). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Preuve. — Rappelons (cf. début de la section) que l'opérateur $\widetilde{I}^N$ est l'opérateur de multiplication par $\mid 1, . \mid^N$ et que l'opérateur $\tilde{J}^N$ est le conjugué de $\widetilde{I}^N$ par la transformée de Fourier symplectique $\mathcal{G}$, qui est définie en (1.7). On obtient par un calcul direct, l'identité valable quels que soient X, $X' \in k^{2d}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}\ (Z' \ &\mapsto\ \psi(-[Z', X - X'])\ \Phi(Z' - \frac{X+X'}{2}))(Z) \\ &=\ \Phi(Z - \frac{X-X'}{2})\ \psi(-2[Z - \frac{X-X'}{2}, \frac{X+X'}{2}]). \end{aligned} \tag{3.3}$$

D'autre part, la fonction $X \mapsto \mid 1, X \mid$ est $(\frac{1}{2}\mathcal{O}_k)^d \times (\frac{1}{2}\mathcal{O}_k^o)^d-$ invariante par translation, en particulier, elle est constante (et égale à $\mid 1, \frac{X-X'}{2} \mid$) sur l'ensemble $\left\{\frac{X-X'}{2} + \frac{1}{2}\mathcal{O}_k{}^d \times (\frac{1}{2}\mathcal{O}_k^o)^d\right\}$ qui est le support de la fonction

$$Z \mapsto \Phi(Z - \frac{X-X'}{2}) \times \psi(-2[Z - \frac{X-X'}{2}, \frac{X+X'}{2}]).$$

La formule (3.4) nous permet d'obtenir la formule (3.2) lorsque $M = 0$. Le cas général en découle en utilisant de nouveau la $(\frac{1}{2}\mathcal{O}_k)^d \times (\frac{1}{2}\mathcal{O}_k^o)^d$-périodicité de la fonction $X \mapsto |1, X|^M$. □

LEMME 3.2. — *Soient f une distribution tempérée sur $k^d \times k^d$, X, X' deux éléments de $k^d \times k^d$. Alors, pour tous entiers relatifs N, M, l'égalité suivante est valable :*

$$\mid 1, \frac{X-X'}{2} \mid^N \mid 1, \frac{X+X'}{2} \mid^M (Op(f)\phi_X, \phi_{X'}) = \psi(-\frac{1}{2}[X, X']) \times \int_{k^{2d}} (I^M \tilde{J}^N f)(Z)\ \Phi(Z - \frac{X+X'}{2})\ \psi(-[Z, X-X'])\ dZ.$$

Preuve. — En utilisant la proposition 2.4 et la proposition 2.10, on aboutit à l'identité suivante valable pour toute distribution tempérée f sur $k^d \times k^d$:

$$(Op(f)\phi_X, \phi_{X'}) = \psi(-\frac{1}{2}[X, X']) \int_{k^{2d}} f(Z)\ \Phi(Z - \frac{X+X'}{2})\ \psi(-[Z, X-X'])\ dZ. \tag{3.4}$$

Le lemme résulte de l'identité (3.2) si l'on observe, en outre, que l'opérateur $I^M \tilde{J}^N$ est auto-transposé. □

Une conséquence de ce lemme : si l'on choisit deux entiers négatifs suffisamment grands, la fonction $I^M \tilde{J}^N f$ est une fonction de carré intégrable donc il existe deux entiers négatifs N et M tels que la fonction

$$(X, X') \mapsto \mid 1, \frac{X-X'}{2} \mid^N \mid 1, \frac{X+X'}{2} \mid^M (Op(f)\phi_X, \phi_{X'})$$

soit bornée et la proposition 1.3 montre alors que la fonction $(X, X') \to (Op(f)\phi_X, \phi_{X'})(u, \phi_X)(\phi_{X'}, v)$ est intégrable.

Toute l'analyse pseudo-différentielle associée aux classses de symboles de type $S(m)$ peut être regardée comme une conséquence du théorème suivant.

THÉORÈME 3.3. — *(i) Soit f appartenant à $S(m)$. Alors pour tout entier positif N, il existe une constante C_N positive telle que, quels que soient X, X' appartenant à $k^d \times k^d$, on ait :*

$$| (Op(f)\phi_X, \phi_{X'}) | \leqslant C_N \; m(\frac{X+X'}{2}) \, | \, 1, X - X' \, |^{-N},$$

où $C_N = \sup_{Z \in k^d \times k^d} \left| \tilde{J}^N f(Z) \right|$.

(ii) Soit A un opérateur linéaire séquentiellement continu de $\mathcal{S}(k^d)$ dans $\mathcal{S}'(k^d)$ (ce dernier espace étant muni de la topologie de dual faible du précédent) ; supposons que pour tout entier N positif, il existe une constante positive C_N telle que, quels que soient X, X' appartenant à $k^d \times k^d$, on ait l'estimation suivante :

$$| (A\phi_X, \phi_{X'}) | \leqslant C_N \; m(\frac{X+X'}{2}) \, | \, 1, X - X' \, |^{-N} .$$

Alors il existe un unique symbole f appartenant à $S(m)$, tel que $A = Op(f)$.

Preuve. — (i) On utilise l'identité fournie par le lemme 3.2 : après changement de variable, utilisant les majorations provenant de la définition des symboles appartenant à $S(m)$, on obtient :

$$| \, 1, X - X' \, |^N \, |(Op(f)\phi_X, \phi_{X'})| \leqslant C_N \int_{k^{2d}} m(Z + \frac{X+X'}{2}) \, |\Phi(Z)| \, dZ.$$

La majoration (3.1) qui est valable pour le poids m permet d'obtenir l'inégalité

$$| \, 1, X - X' \, |^N \, |(Op(f)\phi_X, \phi_{X'})| \leqslant C_N \; m(\frac{X+X'}{2}) \int_{k^{2d}} |1, Z|^N \, |\Phi(Z)| \, dZ.$$

On achève la démonstration en remarquant que l'intégrale ne porte que sur le compact compact $(\frac{1}{2}\mathcal{O}_k)^d \times (\frac{1}{2}\mathcal{O}_k^o)^d$, ce qui permet de majorer la fonction $Z \mapsto |1, Z|^N$ par 1.

(ii) Sous l'hypothèse faite ici, l'intégrale

$$\begin{aligned} f(Z) &= \int_{k^{2d}} \int_{k^{2d}} (A\phi_X, \phi_{X'}) \; W(\phi_{X'}, \phi_X)(Z) \; dX \; dX' \\ &= \int_{k^{2d}} \int_{k^{2d}} (A\phi_X, \phi_{X'}) \psi(\frac{1}{2}[X, X']) \psi([Z, X - X']) \Phi(Z - \frac{X+X'}{2}) \; dX \; dX' \end{aligned}$$

converge pour tout Z appartenant à k^{2d}. On commence par vérifier que f est un symbole dans la classe $\mathcal{S}(m)$. On a, pour tout N, l'identité

$$\tilde{J}^N f(Z) = \int\limits_{k^{2d}} \int\limits_{k^{2d}} \psi(\frac{1}{2}[X, X'])(A\phi_X, \phi_{X'}) \tilde{J}^N \left(Z \mapsto \psi([Z, X - X'])\Phi(Z - \frac{X + X'}{2}) \right) dX\ dX',$$

analogue à la dérivation sous le signe intégral de l'analyse archimédienne. Or l'égalité (3.2), ainsi que l'hypothèse sur $(A\phi_X, \phi_{X'})$, nous permet d'effectuer les majorations suivantes valables pour tout entier positif N et pour tout Z appartenant à $k^d \times k^d$:

$$| \tilde{J}^N f(Z) | \leqslant C'_N \int\limits_{k^{2d}} \int\limits_{k^{2d}} m(\frac{X + X'}{2}) \mid 1, X - X' \mid^{-(N+2d+1)} \mid 1, \frac{X - X'}{2} \mid^N \left| \Phi(Z - \frac{X + X'}{2}) \right| dX\ dX'.$$

On effectue ensuite le changement de variable $Y = Z - \frac{X+X'}{2}$ et $Y' = X - X'$. En remarquant que m est un poids et en utilisant l'inégalité (1.5), on majore la nouvelle intégrale par $C(m, N)\ m(Z)$ où $C(m, N)$ est une certaine constante. Enfin, on montre que $Op(f) = A$ ou, ce qui revient au même, $(Op(f)u, v) = (Au, v)$ pour tout couple (u, v) de fonctions appartenant à $\mathcal{S}(k^d)$. On écrit à cet effet

$$\begin{aligned}
(Op(f)u, v) &= \int\limits_{k^{2d}} f(Z) W(u, v)(Z)\ dZ \\
&= \int\limits_{k^{2d}} \int\limits_{k^{2d}} \int\limits_{k^{2d}} (A\phi_X, \phi_{X'})\ W(\phi_{X'}, \phi_X)(Z) W(u, v)(Z) dZ dX dX' dZ \\
&= \int\limits_{k^{2d}} \int\limits_{k^{2d}} (A\phi_X, \phi_{X'})\ dX\ dX' \int\limits_{k^{2d}} W(\phi_{X'}, \phi_X)(Z) W(u, v)(Z)\ dZ \\
&= \int\limits_{k^{2d}} \int\limits_{k^{2d}} (A\phi_X, \phi_{X'})\ (u, \phi_X)(\phi_{X'}, v)\ dX\ dX' = (Au, v).
\end{aligned}$$

□

3.3. Conséquences sur la régularité des opérateurs

THÉORÈME 3.4. — *Quel que soit le poids m, si f appartient à $S(m)$, alors l'opérateur $Op(f)$ opère continûment de $\mathcal{S}(k^d)$ dans $\mathcal{S}(k^d)$; si de plus* *m est borné, alors Op(f) se prolonge en un opérateur borné sur $L^2(k^d)$. Si enfin m est un poids tendant vers zéro à l'infini, alors pour tout symbole f appartenant à S(m), l'opérateur Op(f) est compact.*

Preuve. — Les deux premières affirmations sont une conséquence de la proposition 1.3 (*ii*). Si u appartient à $\mathcal{S}(k^d) \subset L^2(k^d)$ et f appartient à $S(m)$, alors $Op(f)u$ est une distribution tempérée sur k^d qu'il faut tester sur une famille d'états cohérents :

$$\begin{aligned}(Op(f)u, \phi_X) &= (u, Op(f)^\star \phi_X) \\ &= \int_{k^{2d}} (u, \phi_{X'})(\phi_{X'}, Op(f)^\star \phi_X) dX' \\ &= \int_{k^{2d}} (u, \phi_{X'})(Op(f)\phi_{X'}, \phi_X) dX'.\end{aligned}$$

La combinaison de l'estimation provenant du théorème 3.3 (*i*), de la preuve de la proposition 1.3 (*iii*) et de l'égalité précédente fournit les majorations suivantes, dans lesquelles N_m est un nombre permettant d'écrire la majoration (3.1) pour le poids m : $\forall\, N \in \mathbb{N}$, $\forall\, X \in k^{2d}$

$$\begin{aligned}\mid (Op(f)u, \phi_X) \mid &\leqslant C_N \int_{k^{2d}} m(\frac{X+X'}{2}) \mid (u, \phi_{X'}) \mid \times \mid 1, X - X' \mid^{-N} dX' \\ &\leqslant C_N \mid 1, X \mid^{-N} \int_{k^{2d}} m(\frac{X+X'}{2}) \mid (u, \phi_{X'}) \mid \times \mid 1, X' \mid^{N} dX' \\ &\leqslant C_N\, C_m \mid 1, X \mid^{-N} \int_{k^{2d}} \mid 1, X' \mid^{N} \times \mid 1, \frac{X+X'}{2} \mid^{N_m} \times \mid (u, \phi_{X'}) \mid dX' \\ &\leqslant C_N\, C_m \mid 1, X \mid^{-N+N_m} \int_{k^{2d}} \mid (u, \phi_{X'}) \mid \times \mid 1, X' \mid^{N+N_m} dX' \\ &\leqslant C_N\, C_m C_d \mid 1, X \mid^{-N+N_m} \| u \|_{N+2N_m+\frac{2d+1}{2}, N+2N_m+\frac{2d+1}{2}}.\end{aligned}$$

D'où il résulte que $Op(f)u$ appartient à l'espace $\mathcal{S}(k^d)$. De plus, la majoration précédente fournit la continuité de l'opérateur $Op(f)$ sur l'espace $\mathcal{S}(k^d)$.

Supposons maintenant que m soit un poids borné et que u appartienne à $\mathcal{S}(k^d)$. On part de la première majoration utilisée précédemment : quel que soit X appartenant à $k^d \times k^d$, on a l'estimation suivante

$$|\,(Op(f)u,\phi_X)\,| \leqslant C\int\limits_{k^{2d}} |\,(u,\phi_{X'})\,|\, m(\frac{X+X'}{2})\,|\,1, X-X'\,|^{-(2d+1)}\, dX'$$

$$\leqslant C'\int\limits_{k^{2d}} |\,(u,\phi_{X'})\,| \times |\,1, X-X'\,|^{-(2d+1)}\, dX'$$

Cette inégalité, et le fait que l'opérateur de convolution par une fonction intégrable sur $k^d \times k^d$ est un opérateur borné sur $L^2(k^d)$ (inégalité d'Young) permet de voir, utilisant aussi la proposition 1.3 (ii), que

$$\begin{aligned}\|\, Op(f)u\,\|^2_{L^2(k^d)} &= \int\limits_{k^{2d}} |\,(Op(f)u,\phi_X)\,|^2\, dX \leqslant C_1 \int\limits_{k^{2d}} |\,(u,\phi_X)\,|^2\, dX \\ &= C_1\,\|\, u\,\|^2_{L^2(k^d)}\,.\end{aligned}$$

L'opérateur $Op(f)$ se prolonge donc, par densité de $\mathcal{S}(k^d)$ dans $L^2(k^d)$, en un opérateur borné sur $L^2(k^d)$.

Le troisième point s'établit en prouvant que l'opérateur $Op(f)$ est la limite en norme, dans $\mathcal{L}(L^2(k^d))$, de la suite $Op_N(f)$ des opérateurs de rang fini définis par

$$\begin{aligned}Op_N(f) &= \int\limits_{X\in\varpi^{-N}\left(\mathcal{O}_k^d\times(\mathcal{O}_k^o)^d\right)} (.,\phi_X)Op(f)\phi_X dX \\ &= \sum_{X\in\varpi^{-N}\left(\mathcal{O}_k^d\times(\mathcal{O}_k^o)^d\right)/\mathcal{O}_k^d\times(2\mathcal{O}_k^o)^d} (.,\phi_X)Op(f)\phi_X.\end{aligned}$$

□

Si f appartient à $S(m_1)$, g à $S(m_2)$, le théorème 3.4 montre que les deux opérateurs $Op(f)$ et $Op(g)$ agissent continûment de $\mathcal{S}(k^d)$ dans $\mathcal{S}(k^d)$; par conséquent, il en est de même pour l'opérateur $Op(f)Op(g)$. Ce dernier possède donc, d'après le théorème 2.8 (i), un symbole-distribution que l'on note $f\#g$.

THÉORÈME 3.5. — *Si f appartient à $S(m_1)$, g à $S(m_2)$, alors $f\#g$ appartient à $S(m_1m_2)$.*

Preuve. — Compte-tenu de l'inégalité «de Peetre» (1.5), on voit que, tout comme dans le cas archimédien, ce théorème est la conséquence immédiate du théorème 3.3, une fois écrite l'identité

$$\begin{aligned}(Op(f\#g)\phi_X,\phi_{X'}) &= (Op(g)\phi_X, Op(f)^\star\phi_{X'})\\ &= \int_{k^{2d}} (Op(g)\phi_X,\phi_Y)(Op(g)\phi_Y,\phi_{X'})dY.\end{aligned}$$

□

4. La caractérisation à la Beals et une application

R. Beals a donné dans [R.B.] une caractérisation des classes d'opérateurs pseudodifférentiels A de l'analyse archimédienne au moyen de propriétés de continuité des crochets itérés de A avec des familles convenables d'opérateurs. Un analogue est possible, et utile, en analyse non-archimédienne : c'est l'objet de cette section.

Dans cette section, les opérateurs K désigneront indistinctement les opérateurs I^1 ou J^1 et, si A désigne un opérateur, on pose, pour tout Y appartenant à $k^d \times k^d$,

$$(Ad\ K)(A) = [K, A] \qquad \text{et} \qquad A^Y = \pi(Y)A\pi(-Y).$$

THÉORÈME 4.1. — *Soient $K_1, \ldots, K_n$ des opérateurs du type I^1 ou J^1:*

(i) si f appartient à $S(1)$, pour tout Y appartenant à $k^d \times k^d$, l'opérateur $(AdK_1)\cdots(AdK_n)Op(f)^Y$ se prolonge en un opérateur borné sur $L^2(k^d)$ pour tout entier positif n. De plus, pour tout entier positif n, la famille d'opérateurs. $\big((AdK_1)\cdots(AdK_n)Op(f)^Y\big)$ décrit une partie bornée de l'espace de $\mathcal{B}anach$ $\mathcal{L}(L^2(k^d))$ lorsque Y parcourt $k^d \times k^d$;

(ii) réciproquement, soit A un opérateur séquentiellement continu de $\mathcal{S}(k^d)$ dans $\mathcal{S}'(k^d)$. Supposons que quels que soient $K_1, \ldots, K_n$, $(AdK_1)\cdots(AdK_n)A^Y$ reste dans une partie bornée de $\mathcal{L}(L^2(k^d))$ lorsque Y parcourt $k^d \times k^d$. Alors A possède un symbole f appartenant à $S(1)$;

Remarque. — L'énoncé de l'analogue archimédien du théorème 4.1 est plus simple, puisque la considération de $Op(f)$ plutôt que de $Op(f)^Y$ suffit. Cela tient à ce que, dans ce cas, un opérateur du type K à considérer est de la forme x_j ou $\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$: conjuguer un tel opérateur par un élément $\pi(Y)$ revient à lui ajouter une constante.

Preuve. — (i) Le théorème 3.4 permet d'affirmer, pour commencer, que l'opérateur $Op(f)$ se prolonge en un opérateur borné sur $L^2(k^d)$. D'autre part, si K^1 désigne l'opérateur (symétrique) I^1 ou J^1, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}((Ad\ K^1)Op(f)\phi_{y,\eta},\phi_{y',\eta'}) &= (K^1Op(f)\phi_{y,\eta},\phi_{y',\eta'}) - (Op(f)K^1\phi_{y,\eta},\phi_{y',\eta'})\\ &= (Op(f)\phi_{y,\eta},K^1\phi_{y',\eta'}) - (Op(f)K^1\phi_{y,\eta},\phi_{y',\eta'}).\end{aligned}$$

Cette dernière égalité combinée à l'identité (1.9), montre que, quels que soient (y,η), (y',η') appartenant à $k^d\times k^d$, on a :

$$\begin{cases}((Ad\ I^1)Op(f)\phi_{y,\eta},\phi_{y',\eta'}) = (\mid 1,y',0\mid - \mid 1,y,0\mid)(Op(f)\phi_{y,\eta},\phi_{y',\eta'}),\\ ((Ad\ J^1)Op(f)\phi_{y,\eta},\phi_{y',\eta'}) = (\mid 1,0,\eta'\mid - \mid 1,0,\eta\mid)(Op(f)\phi_{y,\eta},\phi_{y',\eta'}).\end{cases}$$

On vérifie alors par récurrence que pour tout entier n et toute famille d'opérateurs $K_1,\dots,K_n$, on a :

$$\begin{aligned}((AdK_1)\cdots(AdK_n)Op(f)\phi_{y,\eta},\phi_{y',\eta'}) = (\mid 1,y',0\mid - \mid 1,y,0\mid)^r\times\\ (\mid 1,0,\eta'\mid - \mid 1,0,\eta\mid)^s(Op(f)\phi_{y,\eta},\phi_{y',\eta'})\end{aligned}\tag{4.1}$$

où r est le nombre d'opérateurs K_j égaux à I^1 et s le nombre d'opérateurs égaux à J^1. L'utilisation de l'inégalité triangulaire c'est-à-dire

$$\begin{cases}\mid\ \mid 1,0,\eta'\mid - \mid 1,0,\eta\mid\ \mid\leqslant\mid 1,0,\eta'-\eta\mid\leqslant\mid 1,y'-y,\eta'-\eta\mid,\\ \mid\ \mid 1,y',0\mid - \mid 1,y,0\mid\ \mid\leqslant\mid 1,y'-y,0\mid\leqslant\mid 1,y'-y,\eta'-\eta\mid,\end{cases}$$

de l'égalité (4.2) et du théorème 3.3 (i) fournit la majoration suivante qui est valable pour tout couple d'entiers positifs (N,n) :

$$|((AdK_1)\cdots(AdK_n)Op(f)\phi_X,\phi_{X'})|\leqslant C_{N+n}\mid 1,X-X'\mid^{-N},\tag{4.2}$$

où la constante C_{N+n} est celle définie dans le théorème 3.3 (i). Ceci montre que l'opérateur $(AdK_1)\cdots(AdK_n)Op(f)$ possède un symbole appartenant à $S(1)$; ceci implique aussi, en se référant à la démonstration du théorème 3.4, que cet opérateur se prolonge en un opérateur borné sur $L^2(k^d)$ dont la norme d'opérateur est moindre que

$$C\times C_{2d+1+n} = C\times X\in k^d\times k^d\sup\left|\widetilde{J}^{2d+1+n}f(X)\right|$$

(où C est une constante). Pour tout Y appartenant à k^{2d}, l'opérateur $Op(f)^Y$ possède pour symbole $Z\mapsto f(Z-Y)$, qui appartient bien à $S(1)$. On conclut en remarquant que le maximum de la fonction $\widetilde{J}^{2d+1+n}f$ est invariant par translation.

(*ii*) Comme l'opérateur A est séquentiellement continu de $\mathcal{S}(k^d)$ dans $\mathcal{S}'(k^d)$, il possède, d'après le théorème 2.8 (*i*), un symbole-distribution f appartenant à $\mathcal{S}'(k^{2d})$. Il nous reste à vérifier que ce symbole appartient à $S(1)$. Cette vérification va nécessiter, suivant [U.U.], p.144, l'emploi d'une formule combinatoire qui se vérifie par récurrence. Soient n un entier positif, $K_1, \dots, K_n$ des opérateurs définis au début de ce chapitre, et φ, ψ deux fonctions appartenant à $\mathcal{S}(k^d)$. Alors on a :

$$(A\varphi\ ,\ K_n \cdots K_1\psi) = \sum(((ad\ K_{i_s}) \cdots (ad\ K_{i_1}))(A)(K_{j_1} \cdots K_{j_r}\varphi)\ ,\ \psi). \tag{4.3}$$

La sommation est étendue à tous les sous-ensembles $\{i_1, \dots, i_s\}$ de $\{1, \dots, n\}$ ($i_1 < \cdots < i_s$), et où $\{j_1, \dots, j_r\}$ $(j_1 > \cdots > j_r)$ désigne le complémentaire de $\{i_1, \dots, i_s\}$.

On applique cette formule avec $K_1 = \cdots = K_n = I^1$ (resp.J^1) et A est remplacé par $A^{-y,-\eta} = \pi(-y,-\eta)A\pi(y,\eta)$, enfin avec $\varphi = \phi$ et $\psi = \phi_{y'-y,\eta'-\eta}$. La formule (1.9) montre que $K_{j_1} \cdots K_{j_r}\phi = \phi$ et que l'on a les identités

$$\left\{\begin{aligned} &\mid 1, y-y', 0 \mid^n (A\phi_{y,\eta}\ ,\ \phi_{y',\eta'}) \\ &\quad = \psi(\frac{1}{2}[(y,\eta),(y',\eta')]) \sum_s C_n^s((ad\ I^1)^s A^{-Y}\phi\ ,\ \phi_{y'-y,\eta'-\eta}) \\ &\mid 1, 0, \eta-\eta' \mid^n (A\phi_{y,\eta}\ ,\ \phi_{y',\eta'}) \\ &\quad = \psi(\frac{1}{2}[(y,\eta),(y',\eta')]) \sum_s C_n^s((ad\ J^1)^s A^{-Y}\phi\ ,\ \phi_{y'-y,\eta'-\eta}), \end{aligned}\right.$$

Compte-tenu de l'hypothèse sur $(AdK_1) \cdots (AdK_n)A^Y$, on peut majorer uniformément les membres de droite de ces identités. Par conséquent, on peut appliquer la partie (*ii*) du théorème 3.3 et on en déduit donc que f appartient à $S(1)$. $\square$

On peut déduire de cette caractérisation un calcul fonctionnel, au sens de la théorie spectrale, des opérateurs pseudodifférentiels de poids 1.

LEMME 4.2. — *Soit f appartenant à $S(1)$ et soit $A = Op(f)$; supposons en outre que A soit inversible au sens de la théorie des opérateurs bornés sur $L^2(k^d)$. Alors il existe un unique symbole g appartenant à $S(1)$ tel que $A^{-1} = Op(g)$.*

Preuve. — La démonstration consiste à appliquer le théorème 4.1 (*ii*). L'opérateur A^{-1} est borné sur $L^2(k^d)$, c'est a fortiori un opérateur séquentiellement continu de $\mathcal{S}(k^d)$ dans $\mathcal{S}'(k^d)$.

On utilise de nouveau une identité combinatoire. Soient $I=\{i_1,\dots,i_s\}$ un sous-ensemble de $\{1,\dots,n\}$ ($i_1 < \cdots < i_s$), σ une permutation de I, $K_1,\dots,K_n$ et A des opérateurs. Alors on pose $(ad\ K_I^\sigma)(A) = (ad\ K_{\sigma(i_1)})\cdots(ad\ K_{\sigma(i_r)})$. Avec ces conventions et sous l'hypothèse que A soit inversible, on a la relation suivante :

$$\begin{cases} ((AdK_1)\cdots(AdK_n))(A^{-1}) = \\ \displaystyle\sum_{I_1,\dots,I_r}\sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_r}(-1)^r A^{-1}(adK_{I_1}^{\sigma_1})(A)A^{-1}(adK_{I_2}^{\sigma_2})(A)A^{-1}\cdots A^{-1}(adK_{I_r}^{\sigma_r})(A)A^{-1}. \end{cases} \tag{4.4}$$

dans laquelle la première sommation s'effectue sur toutes les partitions $I_1\cup\cdots\cup I_r$ de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$ et la seconde sur l'ensemble des familles de permutations σ_k de I_k ($1\leqslant k\leqslant r$). Cette dernière identité s'obtient par application des règles de « dérivation » vérifiées par l'opérateur *ad*. La validité de la seconde hypothèse du théorème 4.1 (*ii*) est une conséquence de la combinaison de l'identité (4.4) appliquée à l'opérateur $(A^{-1})^Y = (A^Y)^{-1}$, et du théorème 4.1 (*i*). $\square$

Rappelons que si A est un opérateur borné sur un Hilbert $\mathcal{H}$, alors pour toute fonction continue h sur le spectre Sp_A de A, on définit l'opérateur borné $h(A)$ (cf. [R.S.]). En outre, si h est une fonction analytique dans un voisinage ouvert V de Sp_A, on a la formule de Dunford

$$h(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (A - zI)^{-1}h(z)dz \tag{4.5}$$

où le contour fermé γ est contenu dans V et entoure le spectre de A (cf. [R.S.])

COROLLAIRE 4.3. — *Soit f un symbole appartenant à $S(1)$, soit $A = Op(f)$ et soit h une fonction analytique au voisinage du spectre de A. Alors l'opérateur $h(A)$ possède un symbole appartenant à $S(1)$.*

Preuve. — Ce corollaire est alors la conséquence de cette formule (4.5), du lemme 4.2 et du théorème 4.1. $\square$

5. Compléments d'analyse non archimédienne

Dans le reste de cet article, nous allons établir une formule de composition du calcul pseudodifférentiel en une variable, autrement dit une manière d'élucider la structure de la composition $f\#g$ de deux symboles dans k^2. La formule que nous obtiendrons est complètement différente de la formule usuelle du calcul asymptotique des opérateurs pseudodifférentiels : la raison en est d'ailleurs claire puisque ni polynômes (à valeurs complexes), ni a fortiori formule de Taylor n'ont ici de signification. La place doit être faite en revanche à l'analyse harmonique, et plus précisément à la décomposition en leurs parties homogènes des symboles considérés. Cette méthode, dans le cadre archimédien, est aussi celle développée dans la section 17 de [A.U.3] : c'est d'ailleurs la seule formule de composition susceptible d'avoir un sens dans le cadre du calcul pseudodifférentiel automorphe.

L'objectif de cette section est définir les outils indispensables en vue de ce programme : la transformation de Mellin, les facteurs Gamma, la décomposition de toute fonction $f \in L^2(k^2)$ en une superposition intégrale de fonctions homogènes.

5.1. Théorie de Pontriaguin

Soit $(G, \times)$ un groupe topologique localement compact commutatif muni d'une mesure de Haar dg (c'est-à-dire $d(g \times g_0) = dg$). On appelle caractère de G tout morphisme continu de $(G, \times)$ dans $(S^1, \times) = \{z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1\}$. L'ensemble des caractères de G, noté $\widehat{G}$, est un groupe topologique localement compact que l'on nomme le dual de Pontriaguin de G. Soit dg une mesure de Haar sur $(G, \times)$. Pour toute fonction $f \in L^1(G, dg)$ et pour tout caractère χ de G, on pose $\widehat{f}(\chi) = \int_G f(g)\overline{\chi}(g)dg$. La théorie de Pontriaguin (cf. [S.L.] pour la théorie générale) montre les faits suivants :

1. il existe une unique mesure de Haar $d\chi$ sur $\widehat{G}$ telle que, pour toute fonction f appartenant à $L^1(G, dg) \bigcap L^2(G, dg)$, la fonction $\widehat{f}$ appartient à $L^2(\widehat{G}, d\chi)$ et $\int_G |f(g)|^2 \, dg = \int_{\widehat{G}} \left|\widehat{f}(\chi)\right|^2 \, d\chi$.

2. L'opérateur $f \mapsto \widehat{f}$ se prolonge en une isométrie surjective de $L^2(G, dg)$ sur $L^2(\widehat{G}, d\chi)$.

Si G est le groupe $(, +)$ muni de la mesure de Lebesgue dx (qui est une mesure de Haar), alors les caractères de $(\mathbb{R}, +)$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \exp(2\pi i\xi x)$, où $\xi \in \mathbb{R}$. Le dual de Pontriaguin s'identifie naturellement à $\mathbb{R}$ et $\widehat{f}$ est simplement la transformée de Fourier usuelle sur $\mathbb{R}$ de f.

Si G est le groupe $(\mathbb{R}_+^\times, \times)$ muni de la mesure de Haar $\frac{dx}{x}$, alors les caractères de $(\mathbb{R}_+^\times, \times)$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto x^{i\lambda}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Le dual de Pontriaguin s'identifie naturellement à $\mathbb{R}$ et $\widehat{f}$ est la transformée de Mellin de f.

Soit k un corps local (archimédien ou non). La fonction $\chi \mapsto \widehat{f}(\chi)$ s'appelle la transformée de Fourier de f dans le cas du groupe additif $(k,+)$ et, dans le cas du groupe multiplicatif $(k^\times, \times)$, on l'appelle transformée de Mellin de f .

Nous allons expliciter les caractères dans le cas du groupe $(G, \times) = (k^\times, \times)$ muni de la mesure $d^\times t = \dfrac{1}{1-|\varpi|} \times \dfrac{dt}{|t|}$, qui est l'unique mesure de Haar sur $k^\times$ normalisée par la condition $\int_{\mathcal{O}_k^\times} d^\times t = 1$.(cf. [A.W.])). Ultérieurement, nous aurons à utiliser le principe de prolongement analytique, ce qui nous amène à introduire la généralisation suivante : on appelle quasi-caractère de $(k^\times, \times)$ tout morphisme continu de $(k^\times, \times)$ dans $(\mathbb{C}^\times, \times)$. Puisque le groupe $k^\times$ est engendré par $\mathcal{O}_k^\times$ et par l'élément ϖ (cf. [A.W.] [G.G.P.S.], page 128), la détermination d'un quasi-caractère χ découle de la connaissance de $\chi(\varpi)$ et de la restriction de χ à $\mathcal{O}_k^\times$. Le lemme suivant nous fournit la structure du groupe des quasi-caractères de $k^\times$ (la preuve se trouve dans [A.W.] ou [G.G.P.S.]). Classiquement, on pose $q = |\varpi|^{-1} = (\mathrm{card}(\mathcal{O}_k/\varpi\mathcal{O}_k))$.

LEMME 5.1. — *Soit χ un quasi-caractère de $(k^\times, \times)$. Il existe un unique couple $(\alpha, \dot{\chi})$ avec $\alpha \in (\mathbb{C}/(\frac{2\pi i}{\ln q}\mathbb{Z}))$ et $\dot{\chi} \in \widehat{k^\times}$ (i.e. un caractère de $k^\times$) possédant les propriétés suivantes :*

$$(i)\ \chi(t) = |t|^\alpha\, \dot{\chi}(t) \quad \textit{pour tout } t \in k^\times; \qquad (ii)\ \dot{\chi}(\varpi) = 1.$$

En particulier, χ est un caractère de $k^\times$ si et seulement si $\alpha \in (i\mathbb{R})/(\frac{2\pi i}{\ln q}\mathbb{Z})$

Bien que le nombre complexe α associé à un quasi-caractère χ ne soit pas unique (il est défini mod $\frac{2\pi i}{\ln q}\mathbb{Z}$), sa partie réelle est par contre parfaitement définie.

DÉFINITION 5.2. — *La partie réelle d'un quasi-caractère χ désignera dans la suite la partie réelle de α et l'on écrira* $\mathrm{Re}(\chi)$ *pour* $\mathrm{Re}(\alpha)$. *Si $\alpha \in \mathbb{C}$ et si χ est un caractère de $k^\times$, la fonction $t \mapsto |t|^\alpha\, \chi(t)$ est un quasi-caractère que l'on note (α, χ) et la partie réelle de (α, χ) est* $\mathrm{Re}(\alpha)$ *: noter que, contrairement à α, la partie réelle de α ne dépend que du quasi-caractère donné.*

Remarque. — L'application de restriction de l'ensemble des caractères de $k^\times$ vérifiant (ii) à $\mathcal{O}_k^\times \subset k^\times$ établit un isomorphisme du sous-groupe $\widehat{k^\times}$ caractérisé par cette condition avec le groupe $\widehat{\mathcal{O}_k^\times}$ dual de $\mathcal{O}_k^\times$. En particulier, l'ensemble des caractères $\dot{\chi}$ vérifiant (ii) est dénombrable puisque $\mathcal{O}_k^\times$ est infini compact.

Nous dirons qu'une fonction définie sur l'ensemble des quasi-caractères est holomorphe (resp. méromorphe) si, dans l'identification de cet ensemble avec le produit de $\mathbb{C}/(\frac{2\pi i}{\ln q}\mathbb{Z})$ par l'ensemble des caractères $\dot{\chi}$ de $k^\times$ tels que $\dot{\chi}(\varpi) = 1$, on obtient, pour chaque $\dot{\chi}$, une fonction holomorphe (resp. méromorphe) de la première variable.

Rappelons que $\widehat{\mathcal{O}_k^\times}$ est un ensemble dénombrable car il s'agit du dual de Pontriaguin du groupe infini et compact $\mathcal{O}_k^\times$. Une fonction méromorphe sur l'ensemble des quasi-caractères de $k^\times$ peut-être vue comme une application $F : (\mathbb{C}/(\frac{2\pi i}{\ln q}\mathbb{Z}) \times \widehat{\mathcal{O}_k^\times}) \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $\dot{\chi}$ appartenant à $\widehat{\mathcal{O}_k^\times}$, l'application $z \mapsto F(z, \dot{\chi})$ soit méromorphe.

5.2. Facteur Gamma dans le cas non archimédien

Soit χ un quasi-caractère de $k^\times$. Si $\mathrm{Re}\chi > -1$, il est aisé de vérifier que la fonction $t \mapsto \chi(t)$ est une distribution tempérée sur k, notée R_χ. Sa transformée de Fourier inverse, i.e. la distribution définie au sens faible par $(\mathcal{F}^{-1}(R_\chi))(s) = \int_k \chi(t)\psi(st)dt$, est également une distribution tempérée qui est donnée, lorsque $-1 < \mathrm{Re}\chi < 0$, par la formule

$$\mathcal{F}^{-1}(R_\chi) = c(\chi)R_{|\,|^{-1}\chi^{-1}}, \tag{5.1}$$

où le coefficient $c(\chi)$ est traditionnellement noté $\Gamma(|\,|\,\chi)$ (cf. [G.G.P.S.] ; page 144), le caractère $|\,|\,\chi$ étant bien sr la fonction $t \mapsto |t|\,\chi(t)$. On notera qu'une identité analogue existe dans le cas archimédien, mais la notation $\Gamma(|\,|\,\chi)$ ne représenterait pas, dans ce cas, une fonction Gamma usuelle mais le produit d'une puissance de π par le rapport de deux telles fonctions. Pour tout couple de fonctions (u, v) sur k, on note $< u, v >$ l'intégrale, lorsqu'elle converge, $\int_k u(t)v(t)\ dt$. Soit $\dot{\chi}$ un caractère de $k^\times$ tel que $\dot{\chi}(\varpi) = 1$, la relation 5.1 montre que l'égalité

$$\begin{aligned} < |\,|^z \dot{\chi}\ ,\ \mathcal{F}(\phi\dot{\chi}) > &= \Gamma(|\,|^{1+z}\dot{\chi}) < |\,|^{-1-z} \dot{\chi}^{-1}\ ,\ \phi\dot{\chi} > \\ &= \Gamma(|\,|^{1+z}\dot{\chi}) < |.|^{-1-z}\ ,\ \phi >= \Gamma(|\,|^{1+z}\dot{\chi})\frac{1-|\varpi|}{1-|\varpi|^{-z}} \end{aligned}$$

est valable pour tout nombre complexe z tel que $-1 < \mathrm{Re}z < 0$. On en déduit que

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ tel que } -1 < \mathrm{Re}z < 0, \quad \Gamma(|\,|^{1+z}\dot{\chi}) =< |\,|^z \dot{\chi}\ ,\ \mathcal{F}(\phi\dot{\chi}) > \frac{1-|\varpi|^{-z}}{1-|\varpi|}$$

L'application $z \mapsto \dfrac{1-|\varpi|^{-z}}{1-|\varpi|}$ possède un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$ tout entier dont $z=0$ est l'unique zéro (qui est simple). Pour l'application $z \mapsto <|\,|^z \dot{\chi}\,,\mathcal{F}(\phi\dot{\chi})>$ nous allons étudier deux cas. Si $\dot{\chi}=1$, l'application $z \mapsto <|\,|^z \dot{\chi}\,,\mathcal{F}(\phi\dot{\chi})>=<|\,|^z,\phi>=\dfrac{1-|\varpi|}{1-|\varpi|^{1+z}}$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ ne s'annulant jamais et dont l'unique pole est $z=-1$ d'ordre 1. Si $\dot{\chi}\neq 1$, l'application $z \mapsto <|\,|^z \dot{\chi}\,,\mathcal{F}(\phi\dot{\chi})>$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ ne s'annulant jamais. Nous ne démontrons pas ce résultat qui résulte essentiellement de la non nullité de sommes de Gauss et la nullité de l'intégrale $\int\limits_{|s|=1} \dot{\chi}(s)ds$ pour $\dot{\chi}\neq 1$ (cf. [G.G.P.S.] ou [A.W.]).

Les résultats précédents montrent que l'application $\chi \mapsto \Gamma(|\,|\chi)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur l'ensemble des quasi-caractères de $k^\times$ dont $\chi=1$ est l'unique zéro (d'ordre 1) et $\chi=|\,|^{-1}$ est l'unique pôle (d'ordre 1). On note encore $\Gamma(|\,|\chi)$ son prolongement. L'application $\chi \mapsto R_\chi$ est une application holomorphe de l'ensemble des quasi-caractères tels que $\mathrm{Re}\chi>-1$ dans l'espace des distributions tempérées. Nous pouvons la prolonger de façon méromorphe à l'ensemble de tous les quasi-caractères différents de 1 et $|\,|^{-1}$ en posant

$$\mathcal{R}_\chi=\begin{cases} R_\chi & \text{si } \mathrm{Re}\chi>-1 \\ \Gamma(|\,|\chi)\mathcal{F}(R_{|\,|^{-1}\chi^{-1}}) & \text{si } \mathrm{Re}\chi<0 \end{cases}.$$

Le principe du prolongement analytique montre que pour tout quasi-caractère χ différent de 1 et de $|\,|^{-1}$, on a $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{R}_\chi)=\Gamma(|\,|\chi)\mathcal{R}_{|\,|^{-1}\chi^{-1}}$. En composant par la transformation de Fourier cette relation, on en déduit la formule des compléments $\Gamma(|\,|\chi)\ \Gamma(\chi^{-1})=\chi(-1)$, valable pour tout quasi-caractère χ distinct de 1 et de $|\,|^{-1}$.

Définition 5.3. — *Pour tout nombre complexe α et tout caractère χ de $k^\times$ tel que $|\,|^\alpha\,\chi\neq 1$, on pose $\Gamma(\alpha,\chi)=\Gamma(|\,|^\alpha\,\chi)$.*

Soit χ un caractère de $k^\times$. La fonction $\alpha \mapsto \Gamma(\alpha,\chi)$ est une fonction entière dans le cas où la restriction de χ à $\mathcal{O}_k^\times$ est non- triviale et, si le caractère χ est trivial sur $k^\times$, $\alpha \mapsto \Gamma(\alpha,\chi)$ a pour seul pôle le point $\alpha=0$ et pour seul zéro $\alpha=1$. En identifiant les distributions χ et $\mathcal{R}_\chi$, on a les deux formules suivantes

$$(\mathcal{F}^{-1}\chi)(s)=\Gamma(1,\chi)\,|s|^{-1}\,\chi^{-1}(s), \tag{5.2}$$

$$\Gamma(\alpha,\chi)\ \Gamma(1-\alpha,\chi^{-1})=\chi(-1). \tag{5.3}$$

valables pour tout nombre complexe α et tout quasi-caractère χ tel que $|\,|^\alpha\,\chi$ soit différent de $|\,|$ et de 1.

5.3. Décomposition en fonctions homogènes

On se propose d'utiliser la transformation de Mellin sur $(k^\times, \times)$ pour décomposer toute fonction f appartenant à $L^2(k^2)$ en une superposition intégrale de fonctions homogènes c'est-à-dire dont chacune satisfait à une relation de la forme $h(tX) = |t|^{-1}\,\chi(t)h(X)$ pour un certain caractère χ. Soit f une fonction appartenant à $L^2(k^2)$: alors pour presque tout X, la fonction $t \mapsto |t|\,f(tX)$ appartient à $L^2(k^\times, d^\times t)$ donc elle possède une transformée de Mellin $\chi \mapsto f_\chi(X)$ appartenant à $L^2(\widehat{k^\times}, d\chi)$ qui est donnée, lorsque f appartient à $\mathcal{S}(k^2)$, par la formule

$$f_\chi(X) = \int_{k^\times} f(tX)\overline{\chi(t)}\,|t|\; d^\times t. \tag{5.4}$$

Il est immédiat que la fonction f_χ satisfait à la relation fonctionnelle $f_\chi(tX) = |t|^{-1}\,\chi(t) f_\chi(X)$, autrement dit est «homogène» du type associé au quasi-caractère $(-1, \chi)$. La connaissance de la fonction f_χ est donc équivalente à celle de la fonction $f_\chi^\flat$ sur k, définie par $f_\chi^\flat(s) = f_\chi(s, 1)$, puisqu'elles sont liées par la formule

$$f_\chi(x, \xi) = |\xi|^{-1}\,\chi(\xi) f_\chi^\flat(\frac{x}{\xi}). \tag{5.5}$$

De ce qui précède, et de la formule de Plancherel pour la transformée de Mellin appliquée à la fonction $t \mapsto |t|\,f(tX)$, il résulte que, pour presque tout $X \in k^2$,

$$\int_{\widehat{k^\times}} |f_\chi(X)|^2\,d\chi = \frac{1}{1 - |\varpi|} \int_{k^\times} |f(tX)|^2\,|t|\; dt.$$

On en déduit l'identité suivante

$$\int_{\widehat{k^\times}} \left\| f_\chi^\flat \right\|_{L^2(k)}^2\; d\chi = \frac{1}{1 - |\varpi|}\, \|f\|_{L^2(k^2)}^2\,, \tag{5.6}$$

d'où par polarisation, quelles que soient f et $g \in L^2(k^2)$,

$$\int_{k^2} f(X)\overline{g(X)}\; dX \fallingdotseq (1 - |\varpi|) \int_{\widehat{k^\times}} d\chi \int_k f_\chi^\flat(s)\; \overline{g_\chi^\flat(s)}\; ds.$$

Lorsque g appartient à $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$, on peut bien entendu expliciter la fonction $g_\chi^\flat(s)$ via l'intégrale (5.4), ce qui conduit à l'identité

$$\int_{k^2} f(X)\overline{g(X)}\; dX = (1 - |\varpi|) \int_{\widehat{k^\times}} d\chi \int_k f_\chi^\flat(s)\; ds \int_{k^\times} \overline{g(ts, t)}\; \chi(t)\,|t|\; d^\times t.$$

En d'autres termes, toujours sous l'hypothèse que f appartient à $L^2(k^2)$, on a, au sens faible, en testant contre une fonction appartenant à $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$, l'identité $\int\limits_{k^2} f(X)\overline{g(X)}\, dX = \int\limits_{\widehat{k^\times}} d\chi \int\limits_{k\times k} f^\flat_\chi(\frac{x}{\xi})\overline{g(x,\xi)}\ \chi(\xi)\, |\xi|^{-1}\ dx\ d\xi$, c'est-à-dire, grâce à (5.5), au sens faible dans $\mathcal{S}'_{alg}(k^2)$,

$$f = \int\limits_{\widehat{k^\times}} f_\chi d\chi. \tag{5.7}$$

5.4. Composantes homogènes de la composée de certains symboles

Le groupe $\mathcal{O}_k^\times$ opére sur $L^2(k)$ via la représentation $\mathcal{L}$ telle que

$$\forall\ u \in L^2(k),\ \forall a \in \mathcal{O}_k^\times,\ (\mathcal{L}(a)u)(x) = u(ax).$$

Sur $L^2(k^2)$, le groupe $(\mathcal{O}_k^\times)^2$ opère via la représentation $\mathcal{R}$ telle que

$$\forall f \in L^2(k^2), \forall (a,b) \in (\mathcal{O}_k^\times)^2, (\mathcal{R}(a,b)f)(y,\eta) = f(ay, b\eta).$$

On montre ici que si un symbole $f \in L^2(k^2)$ vérifie une certaine propriété relative à l'action sur f de la représentation $\mathcal{R}$, alors seuls certains caractères sont susceptibles d'intervenir dans sa décomposition. De plus (lemme 5.4), on a une information sur l'action de $\mathcal{R}$ sur un composé $f\#g$, au sens du calcul symbolique, de deux symboles pour lesquels on dispose d'une information similaire.

La décomposition des représentations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$ de groupes abéliens compacts comme sommes de leurs restrictions aux sous-espaces associés aux caractères de ces groupes montre que l'espace $L^2(k^2)$ (resp. $L^2(k)$) est la somme directe hilbertienne des espaces $L^2_{\delta_1,\delta_2}(k^2)$ (resp. $L^2_\delta(k)$) lorsque le couple (δ_1,δ_2) décrit $\widehat{(\mathcal{O}_k^\times)^2}$ (resp.δ décrit $\widehat{\mathcal{O}_k^\times}$) et où l'on a défini $L^2_\delta(k)$ et $L^2_{\delta_1,\delta_2}(k^2)$ par :

$$L^2_\delta(k) = \left\{u \in L^2(k),\ \forall a \in \mathcal{O}_k^\times,\ \mathcal{L}(a)u = \delta(a)u\right\}. \tag{5.8}$$

$$L^2_{\delta_1,\delta_2}(k^2) = \left\{f \in L^2(k^2),\ \forall (a,b) \in (\mathcal{O}_k^\times)^2,\ \mathcal{R}(a,b)f = \delta_1(a)\delta_2(b)f\right\}, \tag{5.9}$$

En particulier, si pour chaque caractère δ de $k^\times$, on introduit l'espace suivant :

$$L^2_\delta(k^2) = \widehat{\bigoplus_{\delta_1{}^{-1}\delta_2=\delta}} L^2_{\delta_1,\delta_2}(k^2), \tag{5.10}$$

on obtient que l'espace $L^2(k^2)$ est la somme directe hilbertienne, sur l'ensemble des caractères de $k^\times$, des espaces $L^2_\delta(k^2)$.

Par ailleurs, pour tout symbole f appartenant à $L^2(k^2)$ et tout élément a de $\mathcal{O}_k^\times$, on a : $\mathcal{L}(a)Op(f)\mathcal{L}(a)^{-1} = Op(\mathcal{R}(a,a^{-1})f)$ (cette dernière égalité n'est rien d'autre que la relation (2.9) dans le cas où $g = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$). Ecrivant, quels que soient $f \in L^2_{\delta_1,\delta_2}(k^2)$ et $u \in L^2_\chi(k)$,

$$\mathcal{L}(a)Op(f)u = Op(\mathcal{R}(a,a^{-1})f)\mathcal{L}(a)u = (\delta_1\delta_2^{-1}\chi)(a)Op(f)u, \tag{5.11}$$

on voit que $f \in L^2(k^2)$ appartient en fait à $L^2_\delta(k^2)$ si et seulement si pour tout caractère $\chi \in \widehat{\mathcal{O}_k^\times}$, on a $Op(f)L^2_\chi(k) \subset L^2_{\delta^{-1}\chi}(k)$.

Par conséquent si f appartient à $L^2_\delta(k^2)$ et g à $L^2_{\delta'}(k^2)$, on a l'inclusion ensembliste

$$\begin{aligned} Op(f\#g)L^2_\chi(k) &= Op(f)Op(g)L^2_\chi(k) \subset Op(f)L^2_{\delta^{-1}\chi}(k) \subset L^2_{\delta^{-1}\delta'^{-1}\chi}(k) \\ &= L^2_{(\delta\delta')^{-1}\chi}(k) \end{aligned}$$

qui démontre le lemme suivant :

LEMME 5.4. — *Si f appartient à $L^2_\delta(k^2)$ et g à $L^2_{\delta'}(k^2)$, alors $f\#g$ appartient à $L^2_{\delta\delta'}(k^2)$.*

Le lemme suivant est une conséquence immédiate de l'expression intégrale (5.4) :

LEMME 5.5. — *Si $f \in L^2_{\delta_1,\delta_2}(k^2)$, alors pour tout caractère χ de $k^\times$, $f_\chi = 0$ si $\dot\chi \neq \delta_1\delta_2$. Si $f \in L^2_\delta(k^2)$ et si χ est un caractère χ de $k^\times$, $f_\chi \neq 0 \Rightarrow \dot\chi = \delta\nu^2$ pour un certain caractère ν de ${\mathcal{O}_k}^\times$.*

6. Une formule de composition en calcul de Weyl $\mathfrak{p}$–adique à une dimension

Soient f_1 et f_2 deux symboles de $k^d \times k^d$. Comme il a été remarqué dans l'introduction, il ne peut exister dans le cas non-archimédien de formule de composition « à la Moyal » du composé $f_1\#f_2$. Par contre, dans le cas archimédien , il existe en dimension 1 un opérateur à noyau intégral explicite $K_{\lambda_1,\lambda_2;\lambda}(X,Y;Z)$ tel que, si l'on exprime f_1 (resp. f_2) (supposés appartenir à $\mathcal{S}_{\text{paire}}(\mathbb{R}^2)$) comme superpositions intégrales de symboles homogènes $(f_1)_{\lambda_1}$ (resp. $(f_2)_{\lambda_2}$) de degrés $-1-i\lambda_1$ (resp. $-1-i\lambda_2$), alors

$f_1 \# f_2$ se décompose en intégrale de symboles homogènes de degrés $-1-i\lambda$, avec

$$(f_1 \# f_2)_\lambda(Z) = \iint d\lambda_1 d\lambda_2 \iint K_{\lambda_1,\lambda_2;\lambda}(X,Y;Z)(f_1)_{\lambda_1}(X)(f_2)_{\lambda_2}(Y)dXdY \tag{6.1}$$

(cf. [A.U.3], théorème 17.1 : une modification mineure marche pour des symboles non nécessairement pairs, cf [A.U.2], théorème 5.3). Dans le cadre non-archimédien, nous allons prouver un analogue de cette formule dans laquelle le paramètre imaginaire pur $i\lambda$ (qui paramétrise l'ensemble des caractères unitaires du groupe $\mathbb{R}_+^\times$) sera remplacé par un caractère χ du groupe $k^\times$. En outre, le noyau K, dans le cas archimédien, fait intervenir de nombreux facteurs Gamma. Dans notre cas, ce noyau fait également intervenir les facteurs Gamma qui sont définis dans [G.G.P.S.]. Ils correspondent, dans le cas réel, essentiellement au quotient de deux facteurs Gamma classiques. Nous avons étendu la méthode employée dans [A.U.3], qui consiste à prouver cette formule dans le cas où f_1 et f_2 sont deux caractères non-unitaires (la formule devant alors être interprétée au sens des distributions), puis à exprimer une fonction arbitraire dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ comme une superposition intégrale de caractères non-unitaires. La preuve est alors analogue, avec les différences propres à l'analyse non-archimédienne, telle celle-ci par exemple : comme il est rappelé dans le lemme 5.1 plus loin, un caractère de $k^\times$ est caractérisé par un couple $(\lambda, \dot\chi)$ avec $\lambda \in (\mathbb{R}/\frac{2\pi}{\ln q}\mathbb{Z})$, $\dot\chi$ s'identifiant à un caractère de $\mathcal{O}_k^\times$. Il y a une simplification par rapport au cas archimédien puisque l'intégration par rapport à λ se fait sur un domaine compact, mais aussi une difficulté supplémentaire, à savoir l'existence d'une infinité (dénombrable) de caractères $\dot\chi$. Cette dernière difficulté disparaîtra grâce à l'utilisation de fonctions-test dans l'espace de Schwartz-Bruhat $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$, étant entendu que le théorème principal sera énoncé au sens faible dans le dual de cet espace.

Nous allons désormais supposer, dans toute cette section, que $d = 1$.

6.1. Énoncé du théorème principal

Pour énoncer le théorème de composition des symboles en dimension 1, nous introduison un noyau intégral et une fonction de trois caractères qui nous permettront d'expliciter le noyau K recherché.

DÉFINITION 6.1. — *Étant donnés deux quasi-caractères $\chi_1 = (\alpha_1, \dot\chi_1)$, $\chi_2 = (\alpha_2, \dot\chi_2)$, un caractère $\chi = (i\lambda, \dot\chi)$, et un caractère $\nu \in \widehat{k^\times}$ tel que $\dot\chi = \dot\chi_1\dot\chi_2\nu^2$, on pose*

$$\begin{aligned}\vartheta^{\nu}_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s) &= |s_1-s_2|^{\frac{-1-(\alpha_1+\alpha_2+i\lambda)}{2}}\left[(\dot\chi^{-1}\nu)(s_1-s_2)\right]\\ &\times|s_2-s|^{\frac{-1+\alpha_1-\alpha_2+i\lambda}{2}}\left[(\dot\chi_1\nu)(s_2-s)\right]\\ &\times|s-s_1|^{\frac{-1-\alpha_1+\alpha_2+i\lambda}{2}}\left[(\dot\chi_2\nu)(s-s_1)\right].\end{aligned}\tag{6.2}$$

DÉFINITION 6.2. — *On désigne par* $\mathbb{W}$ *l'ensemble des caractères d'ordre 2 de* $k^\times$ *(i.e* $\chi\in\mathbb{W}$ *ssi* $\chi^2\equiv 1$*). On remarque alors que* $\mathbb{W}\simeq k^\times/(k^\times)^2$.

DÉFINITION 6.3. — *Étant donnés deux quasi-caractères* $\chi_1=(\alpha_1,\dot\chi_1)$, $\chi_2=(\alpha_2,\dot\chi_2)$, *un caractère* $\chi=(i\lambda,\dot\chi)$, *et un caractère* $\nu\in\widehat{k^\times}$ *tel que* $\dot\chi=\dot\chi_1\dot\chi_2\nu^2$, *on pose*

$$\begin{aligned}a_\nu(\chi_1,\chi_2;\chi) &= (1-|\varpi|)^{-1}\#(\mathbb{W})^{-1}\;|2|^{\frac{-1+i\lambda-\alpha_1-\alpha_2}{2}}\,\nu(2)\;\chi_1(-1)\\ &\times\frac{\Gamma(\frac{1-i\lambda-\alpha_1+\alpha_2}{2},(\dot\chi_1\nu)^{-1})}{\Gamma(\frac{1+i\lambda-\alpha_1+\alpha_2)}{2},\dot\chi_2\nu)\;\Gamma(\frac{1-i\lambda-\alpha_1-\alpha_2}{2},\dot\chi^{-1}\nu)}.\end{aligned}\tag{6.3}$$

DÉFINITION 6.4. — *Étant donnés trois caractères* $\chi_1=(i\lambda_1,\dot\chi_1)$, $\chi_2=(i\lambda_2,\dot\chi_2)$ *et* $\chi=(i\lambda,\dot\chi)$,. *on définit le noyau* $K_{\chi_1,\chi_2;\chi}$ *par*

$$K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s)\tag{6.4}$$
$$=\begin{cases}\sum\limits_{\nu\in\mathbb{W}}a_\nu(\chi_1,\chi_2;\chi)\vartheta^{\nu}_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s) & \text{si } \dot\chi(\dot\chi_1\dot\chi_2)^{-1} \text{ est un carré de } \widehat{k^\times}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

Nous sommes alors énoncer le théorème principal de la deuxième moitié de ce travail.

THÉORÈME 6.5 (FORMULE DE COMPOSITION $\mathfrak{p}$-ADIQUE). — *Quels que soient les symboles* h_1 *et* h_2 *appartenant à* $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$, *on a au sens faible dans le dual de* $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$ *la relation*

$$h_1\#h_2=\int_{\widehat{k^\times}}h_\chi d\chi \text{ avec } h_\chi(x,\xi)=|\xi|^{-1}\chi(\xi)h^\flat_\chi(\frac{x}{\xi})$$

avec

$$(h^\flat_\chi)(s)=\iint_{\widehat{k^\times}\times\widehat{k^\times}}(\iint_{k^2}K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s)\;(h_1)^\flat_{\chi_1}(s_1)\;(h_2)^\flat_{\chi_2}(s_2)\;ds_1ds_2)\;d\chi_1d\chi_2.\tag{6.5}$$

6.2. Détermination heuristique de la forme du noyau

Dans cette section, nous partons de l'hypothèse qu'une formule telle que (6.5) existe : des raisonnements de covariance permettent alors de montrer que, nécessairement, le noyau $K_{\chi_1,\chi_2;\chi}$ recherché a, pour certaines constantes a_ν, la forme donnée par (6.4). Il restera bien sûr, plus loin, à déterminer la nature des coefficients a_ν et à procéder aux justifications établissant la convergence des intégrales rencontrées et la validité finale du théorème 6.5.

Si f et g appartiennent à $L^2(k^2)$, la décomposition de $f\#g$ en ses parties homogènes, définie par (5.4) et (5.7), est caractérisée par un certain opérateur bilinéaire $(f,g) \mapsto (f\#g)^\flat_\chi$, puisque $(f\#g)_\chi$ peut être reconstitué (cf (5.5)) à partir de $(f\#g)^\flat_\chi$. Décomposant également f et g en leurs parties homogènes, on parvient, formellement au moins, à une identité

$$(f\#g)^\flat_\chi(s) = \iint_{\chi_1,\chi_2} (\iint_{k^2} K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s) f^\flat_{\chi_1}(s_1) f^\flat_{\chi_2}(s_2) ds_1 ds_2)\ d\chi_1 d\chi_2. \tag{6.6}$$

Nous adopterons dans tout ce qui suit les notations du lemme 5.1 concernant les quasi-caractères. Nous allons montrer pour commencer que dans (6.6) l'intégrale porte sur l'ensemble des couples de caractères (χ_1,χ_2) pour lesquels $\dot\chi(\dot\chi_1\dot\chi_2)^{-1}$ est le carré d'un caractère de $\widehat{\mathcal{O}_k^\times}$.

Supposons que f et g soient des symboles tels que $f \in L^2_\delta(k^2)$ et $g \in L^2_{\delta'}(k^2)$. Il résulte du lemme 5.4 que $f\#g$ appartient à $L^2_{\delta\delta'}(k^2)$. D'autre part, le lemme 5.5 montre que les caractères χ_1 ou χ_2 qui interviennent dans les décompositions de f et g ne sont que ceux pour lesquels il existe ν_1 et $\nu_2 \in \mathcal{O}_k^\times$ tels que $\dot\chi_1 = \delta\nu_1^2$ et $\dot\chi_2 = \delta'\nu_2^2$, et que les caractères χ intervenant dans la décomposition de $f\#g$ sont seulement ceux pour lesquels $\dot\chi = \delta\delta'\nu^2$ pour un certain caractère $\nu \in \mathcal{O}_k^\times$. On en déduit que, dans l'intégrale (6.6), seuls interviennent les couples de caractères (χ_1,χ_2) vérifiant $\dot\chi_1\dot\chi_2 = \dot\chi(\frac{\nu}{\nu_1\nu_2})^2$ pour un certain triplet $(\nu_1,\nu_2;\nu)$ de caractères de $\mathcal{O}_k^\times$. La formule (6.6) se réduit donc à :

$$(f\#g)^\flat_\chi(s) = \tag{6.7}$$

$$\iint_{\chi=\chi_1\chi_2 \text{ mod les carrés de } \widehat{k^\times}} (\iint_{k^2} K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s)\ f^\flat_{\chi_1}(s_1) g^\flat_{\chi_2}(s_2)\ ds_1 ds_2)\ d\chi_1 d\chi_2.$$

Comme δ et δ' sont arbitraires, cette formule s'étend, par bilinéarité, à tous les couples de symboles (f,g), en un sens qui restera bien entendu à préciser.

Nous allons obtenir de nouvelles propriétés du noyau $K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s)$ en examinant comment ce noyau se transforme sous l'action par transformation homographique du groupe $SL(2,k)$.

On note π la représentation régulière de $SL(2,k)$ dans $L^2(k^2)$ qui est définie par : $(\pi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f)(y,\eta) = f(dy-b\eta,-cy+a\eta)$. Soit χ un caractère de $k^\times$: on note π_χ la représentation unitaire de $SL(2,k)$ dans $L^2(k)$ définie par $(\pi_\chi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} u)(s) = |-cs+a|^{-1}\,\chi(-cs+a)u(\frac{ds-b}{-cs+a})$. Il est aisé de vérifier que pour toute fonction f appartenant à $L^2(k^2)$, pour tout caractère χ de $k^\times$, et presque tout s appartenant à k, on a : $(\pi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f)^\flat_\chi(s) =$

$(\pi_\chi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f^\flat_\chi)(s)$. En d'autres termes, la représentation π se décompose comme l'intégrale de la famille de représentations π_χ. Une conséquence de la covariance du calcul de Weyl à l'égard de la représentation métaplectique est la formule $\pi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(f\#g) = (\pi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f)\#(\pi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} g)$. Tout comme dans le cas archimédien (cf [A.U.2], page 35), on en déduit l'équation fonctionnelle :

$$\begin{aligned} K_{\chi_1,\chi_2;\chi}&(\frac{as_1+b}{cs_1+d},\frac{as_2+b}{cs_2+d};\frac{as+b}{cs+d}) \\ &= |cs_1+d|\,\chi_1(cs_1+d) \quad |cs_2+d|\,\chi_2(cs_2+d) \\ &\qquad \times |cs+d|\,\chi^{-1}(cs+d) \quad K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s). \end{aligned} \tag{6.8}$$

Rappelons que seuls sont à considérer les noyaux $K_{\chi_1,\chi_2;\chi}$ avec $\frac{\dot\chi}{\dot\chi_1\dot\chi_2} = \nu^2$ pour un certain caractère ν de $k^\times$, où $\dot\chi,\dot\chi_1,\dot\chi_2$ sont définis par le lemme 5.1. Plus généralement, soient χ_1,χ_2 deux quasi-caractères, et χ,ν deux caractères tels que

$$\frac{\dot\chi}{\dot\chi_1\dot\chi_2} = \nu^2. \tag{6.9}$$

Il est facile de voir que pour chaque caractère solution ν de (6.9), la fonction $\vartheta^\nu_{\chi_1,\chi_2;\chi}$ vérifie la même équation fonctionnelle que la fonction K donc chacune des fonctions $(\vartheta^\nu_{\chi_1,\chi_2;\chi})^{-1}K_{\chi_1,\chi_2;\chi}$ est invariante sous les transformations

$$(s_1,s_2,s)\mapsto(\frac{as_1+b}{cs_1+d},\frac{as_2+b}{cs_2+d},\frac{as+b}{cs+d}).$$

Posons $\Omega = \{(s_1,s_2,s)\in\mathbb{P}^1(k)\times\mathbb{P}^1(k)\times\mathbb{P}^1(k) \text{ tel que } s_1\neq s_2\neq s,\ s_1\neq s\}$. Alors le groupe $SL(2,k)$ agit sur Ω par

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.(s_1, s_2, s) = (\frac{as_1+b}{cs_1+d}, \frac{as_2+b}{cs_2+d}, \frac{as+b}{cs+d})$. Ainsi chacune des fonctions $(\vartheta^{\nu}_{\chi_1,\chi_2;\chi})^{-1}K_{\chi_1,\chi_2;\chi}$ peut être considérée comme une fonction sur $SL(2,k)\backslash\,\Omega$. La formule $\frac{as_1+b}{cs_1+d} - \frac{as_2+b}{cs_2+d} = \frac{s_1 - s_2}{(cs_1+d)(cs_2+d)}$, montre que deux points « finis » (s_1, s_2, s) et (s'_1, s'_2, s') de l'espace Ω sont dans la même orbite si et seulement si le quotient de $\frac{s_1 - s_2}{(s_1 - s)(s_2 - s)}$ par $\frac{s'_1 - s'_2}{(s'_1 - s')(s'_2 - s')}$ est le carré d'un élément de $k^{\times}$. Le cardinal de $SL(2,k)\backslash\,\Omega$ est donc égal à l'indice du groupe des carrés dans $k^{\times}$. Il est clair que si ν_0 est un quasi-caractère solution de l'équation (6.9), la solution générale ν de l'équation est $\nu = \nu_0\varepsilon$ avec $\varepsilon \in \mathbb{W}$, ensemble des caractères introduit dans la définition 6.2. En particulier, le nombre de solutions de cette équation est $\#(\mathbb{W}) = \#(k^{\times}/(k^{\times})^2)$ (ce nombre est fini : cf [G.G.P.S.],[A.W.]) et l'espace des fonctions sur $SL(2,k)\backslash\,\Omega$ est de dimension $\#(\mathbb{W})$. En outre, si ν_0 est une solution particulière de (6.9), une base de cet espace est constituée par la famille de fonctions $\big((\vartheta^{\nu_0}_{\chi_1,\chi_2;\chi})^{-1}(\vartheta^{\nu}_{\chi_1,\chi_2,\chi})\big)$ où ν décrit l'ensemble de toutes les solutions de l'équation précédente : ceci permet d'écrire la fonction $(\vartheta^{\nu_0}_{\chi_1,\chi_2;\chi})^{-1}K_{\chi_1,\chi_2;\chi}$ comme une combinaison linéaire des fonctions $(\vartheta^{\nu_0}_{\chi_1,\chi_2;\chi})^{-1}(\vartheta^{\nu}_{\chi_1,\chi_2;\chi})$. Par suite, il existe donc des constantes $a_\nu(\chi_1, \chi_2; \chi)$ telles que

$$K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1, s_2; s) = \sum_{\nu} a_\nu(\chi_1, \chi_2; \chi)\vartheta^{\nu}_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1, s_2; s) : \tag{6.10}$$

dans cette somme le paramètre ν décrit l'ensemble des solutions de (6.9)

6.3. La composition de deux symboles quasi-homogènes particuliers

Nous revenons maintenant à des considérations rigoureuses. Il reste à expliciter les constantes $a_\nu(\chi_1, \chi_2; \chi)$: la méthode consistera à appliquer la formule (6.9) en y remplaçant $f = f_{\chi_1}$ et $g = g_{\chi_2}$ par une paire de symboles particuliers, mais suffisamment généraux. On sera en même temps en mesure de justifier (6.6) par des considérations plus précises que celles, formelles, qui précèdent.

Soient h_1 et h_2 deux quasi-caractères ne dépendant que de x et ξ respectivement. Dans le lemme 6.7, nous allons calculer explicitement le composé $h_1\#h_2$: remarquer que l'on sort ici du cadre envisagé puisque h_1 et h_2 ne sont certainement pas dans $\mathcal{S}(1)$. La remarque qui précède la proposition 2.10 montre que le symbole $h_1\#h_2$ est néanmoins bien défini. Ensuite nous vérifierons, dans le lemme 6.8 , que les formules (6.6) et (6.10) sont valables dans le cas où h_1 et h_2 sont deux quasi-caractères ne dépendant que de x et ξ respectivement.

DÉFINITION 6.6. — *Soient $\chi_1 = (\alpha_1, \dot\chi_1)$ et $\chi_2 = (\alpha_2, \dot\chi_2)$ deux quasi-caractères. Posons, pour tout caractère $\chi = (i\lambda, \dot\chi)$ et toute solution ν de l'équation (6.9),*

$$c_\nu(\chi_1, \chi_2; \chi) = (\#(\mathbb{W}))^{-1}\nu(2)\ \chi_1(-1)\ |2|^{\frac{-1+i\lambda-\alpha_1-\alpha_2}{2}}\ \Gamma(0,\chi_1)\ \Gamma(0,\chi_2) \times \frac{\Gamma(\frac{1-i\lambda-\alpha_1+\alpha_2}{2}, (\dot\chi_1\nu)^{-1})\ \Gamma(\frac{1+i\lambda-\alpha_1-\alpha_2}{2}, \nu)}{\Gamma(\frac{1+i\lambda-\alpha_1+\alpha_2}{2}, \dot\chi_2\nu)}. \quad (6.11)$$

LEMME 6.7. — *Soient h_1 et h_2 deux symboles définis par $h_1(x,\xi) = |x|^{-1}\chi_1(x)$ et $h_2(x,\xi) = |\xi|^{-1}\chi_2(\xi)$ où χ_1 et χ_2 sont deux quasi-caractères. Supposons que $|Re(\chi_1) \pm Re(\chi_2)| < 1$. Alors on a, au sens faible dans le dual de $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$, $h_1\#h_2 = \int_{\widehat{k^\times}} h_\chi\ d\chi$, c'est-à-dire pour toute fonction $f \in \mathcal{S}_{alg}(k^2)$,*

$$< h_1\#h_2\ ,\ f >= \int_{\widehat{k^\times}} < h_\chi\ ,\ f >\ d\chi \quad (6.12)$$

avec, par définition, $h_\chi(x,\xi) = |\xi|^{-1}\chi(\xi)\ h_\chi^\flat(\frac{x}{\xi})$, où la fonction $h_\chi^\flat$ est définie par

$$(h_\chi^\flat)(s) = (1-|\varpi|)^{-1}\ |s|^{\frac{-1+i\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{2}}\ \dot\chi_1(s)\sum_\nu c_\nu(\chi_1,\chi_2;\chi)\ \nu(s), \quad (6.13)$$

et où la sommation porte sur l'ensemble des solutions de (6.9).

Preuve. — La fonction f sur laquelle on teste la décomposition intégrale (6.12) appartient à $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$: elle est donc localement constante à support compact. Il existe donc un certain voisinage $V = 1 + \varpi^N\mathcal{O}_k$ de 1 tel que $f(ax, a\xi) = f(x,\xi)$ pour tout élément a de V et tout couple $(x,\xi) \in k^2$. On en déduit que

$$\begin{aligned} f_\chi(x,\xi) &= \int_{k^\times} f(tx,t\xi)\overline{\chi(t)}\,|t|\ d^\times t = \int_{k^\times} f(tax,ta\xi)\overline{\chi(t)}\,|t|\ d^\times t \\ &= |a|^{-1}\chi(a)f_\chi(x,\xi) = \dot\chi(a)f_\chi(x,\xi) \end{aligned}$$

pour tout élément a de V et tout couple $(x,\xi) \in k^2$. En particulier, si la composante homogène f_χ n'est pas identiquement nulle, alors $\dot\chi(a) = 1$

pour tout $a \in V$. Le caractère $\dot{\chi}$ induit ainsi un caractère multiplicatif sur $\mathcal{O}_k^\times/(1+\varpi^N\mathcal{O}_k)$, qui est un groupe fini (puisque c'est le quotient d'un groupe compact par un sous-groupe ouvert). Donc, la composante homogène f_χ ne peut être non-identiquement nulle que pour un nombre fini de choix du caractère $\dot{\chi}$, le lemme 5.1 montre alors que f_χ est identiquement nulle sauf lorsque χ décrit une partie compacte de $\widehat{k^\times}$. Il est clair par ailleurs que la fonction $(x,\xi) \mapsto f_\chi(x,\xi)$ est continue sur $k^2\backslash\{(0,0)\}$: on voit aussi que la fonction $(\chi, s) \mapsto (f_\chi^\flat)(s) = f_\chi(s,1)$ est uniformément bornée.

Nous allons montrer que les deux membres de l'équation (6.12) sont des fonctions holomorphes de α_1, α_2 dans le domaine indiqué. Pour le second membre cela résulte de (6.13) et de la relation qui s'en déduit grâce à (5.5):

$$\begin{aligned}(h_\chi)(x,\xi) \quad &= (1-|\varpi|)^{-1} \sum_\nu c_\nu(\chi_1,\chi_2;\chi)\,|x|^{\frac{-1+i\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{2}} \quad (\dot{\chi}_1\nu)(x) \times \\ &\qquad |\xi|^{\frac{-1-i\lambda-\alpha_1+\alpha_2}{2}} \,(\chi\dot{\chi}_1^{-1}\nu^{-1})(\xi),\end{aligned}$$

puisque la fonction h_χ est localement intégrable (on a $|Re(\alpha_1-\alpha_2)| < 1$) et que l'intégration en χ porte, comme il a été dit plus haut sur une partie compacte. Pour ce qui concerne le membre de gauche, on rappelle que, comme le symbole $h_j(x,\xi)$ dépend seulement de x ou seulement de ξ, h_j est aussi le symbole standard de l'opérateur $Op(h_j)$ (cf (2.12)). On sait aussi que $Op_{st}(h_1)Op_{st}(h_2) = Op_{st}(h_1 \otimes h_2)$, avec $(h_1 \otimes h_2)(x,\xi) = h_1(x)\ h_2(\xi)$. D'autre part, l'application qui, à un couple de quasi-caractères (χ_1,χ_2), associe la distribution tempérée sur k^2 définie par $(x,\xi) \mapsto |x|^{-1}\chi_1(x)\,|\xi|^{-1}\chi_2(\xi)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur l'ensemble $\{(\chi_1,\chi_2),\ \chi_1 \neq 1$ et $\chi_2 \neq 1\}$. Rappelons que la notion de fonction holomorphe d'un quasi-caractère $\chi_1 = (\alpha_1, \dot{\chi}_1)$ doit s'entendre comme celle de fonction holomorphe de α_1 lorsque $\dot{\chi}_1$ est fixé.

De plus, l'opérateur Λ défini par la formule (2.14), qui lie les symboles standard et de Weyl du même opérateur, est continu de $\mathcal{S}'(k^2)$ dans $\mathcal{S}'(k^2)$ et de $\mathcal{S}(k^2)$ dans $\mathcal{S}(k^2)$; ceci montre que la fonction

$$< h_1 \# h_2\ ,\ f >=< (x,\xi) \mapsto |x|^{-1}\chi_1(x)\,|\xi|^{-1}\chi_2(\xi), (\Lambda f) >$$

est holomorphe sur l'ensemble $\{(\chi_1,\chi_2),\ \chi_1 \neq 1$ et $\chi_2 \neq 1\}$. Pour démontrer l'identité (6.12), on peut donc, utilisant le prolongement analytique, se ramener au cas où

$$0 < Re(\chi_2) < Re(\chi_1) < 1 \tag{6.14}$$

Le symbole de Weyl $h_1 \# h_2$ de l'opérateur produit $Op(h_1)Op(h_2)$ est donné (cf. (2.15)) par la formule

$$(\mathcal{F}_1(h_1\#h_2))(\eta,\xi) = (\mathcal{F}_1(h_1 \otimes h_2))(\eta, \xi - \frac{\eta}{2})$$

où, rappelons-le, $\mathcal{F}_1$ désigne la transformation de Fourier par rapport à la première variable. Lorsque les inégalités (6.14) sont vérifiées, on peut utiliser la formule (5.2)

$$(h_1\#h_2)(x,\xi) = \Gamma(0,\chi_1)\ \chi_1(-1) \int\limits_{k^\times} \chi_1^{-1}(\eta) \left|\xi - \frac{\eta}{2}\right|^{-1} \chi_2(\xi - \frac{\eta}{2})\ \psi(x\eta)\ d\eta. \tag{6.15}$$

Rappelons par ailleurs (cf. [G.G.P.S], page 145) que si δ_1 et δ_2 sont deux quasi-caractères vérifiant $Re(\delta_1) > 0$, $Re(\delta_2) > 0$ et $Re(\delta_1) + Re(\delta_2) < 1$, alors

$$\int\limits_{k^\times} |\eta|^{-1}\, \delta_1(\eta)\, |1-\eta|^{-1}\, \delta_2(1-\eta) d\eta = \frac{\Gamma(0,\delta_1)\Gamma(0,\delta_2)}{\Gamma(0,\delta_1\delta_2)}. \tag{6.16}$$

Donc, en effectuant le changement de variable $\eta \mapsto 2\xi\eta$ dans l'intégrale (6.15), nous obtenons la majoration suivante

$$|(h_1\#h_2)(x,\xi)| \leqslant C(\chi_1,\chi_2)(|\xi|^{Re(\chi_2)-\mathrm{Re}(\chi_1)}\ , \tag{6.17}$$

où $C(\chi_1,\chi_2) = \dfrac{\Gamma(0,\delta_1)\Gamma(0,\delta_2)}{\Gamma(0,\delta_1\delta_2)} |\Gamma(0,\chi_1)|$ est une constante qui, pour $\varepsilon \in]0,1[$, est uniformément bornée sur l'ensemble $\{(\chi_1,\chi_2)$ tel que $\forall i = 1,2$, $\varepsilon \leqslant \mathrm{Re}(\chi_i) \leqslant 1-\varepsilon\}$. Un calcul direct (ou la règle de covariance) montre en outre que la distribution $h_1\#h_2$ satisfait à la règle de transformation suivante

$$\forall\ a \in \mathcal{O}_k^\times,\ (h_1\#h_2)(a^{-1}x, a\xi) = \chi_1^{-1}(a)\chi_2(a)\ (h_1\#h_2)(x,\xi).$$

En transposant l'action de a, on voit que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{S}_{alg}(k^2)\bigcap L^2_\delta(k^2)$ (cf. la définition (5.10)) $< h_1\#h_2, f >$ est égal à zéro si $\delta \neq \dot\chi_1\dot\chi_2^{-1}$. Ainsi, pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$, on a $< h_1\#h_2, f > = < h_1\#h_2, P_{\dot\chi_1\dot\chi_2^{-1}} f >$ où $P_{\dot\chi_1\dot\chi_2^{-1}} f$ est la composante de f sur $L^2_{\dot\chi_1\dot\chi_2^{-1}}(k^2)$. Nous pouvons donc supposer dans la suite que la fonction f appartient à $\mathcal{S}_{alg}(k^2)\bigcap L^2_{\dot\chi_1\dot\chi_2^{-1}}(k^2)$. En particulier, d'après le lemme 5.5, seuls les caractères χ tels que $\dot\chi = \dot\chi_1\dot\chi_2\nu^2$, pour un certain caractère ν de $k^\times$, interviennent dans la décomposition en parties homogènes de f . Cela revient au même d'écrire $\dot\chi^{-1} = \dot\chi_1\dot\chi_2\nu^2$, en changeant ν en $(\nu\dot\chi_1\dot\chi_2)^{-1}$. On a

$$< h_1\#h_2, f > = \Gamma(0,\chi_1)\ \chi_1(-1)$$

$$\int\limits_k \int\limits_k \left(\int\limits_k \chi_1^{-1}(\eta) \left|\xi - \frac{\eta}{2}\right|^{-1} \chi_2(\xi - \frac{\eta}{2})\ \psi(x\eta)\ d\eta \right) f(x,\xi)\ dx\ d\xi,$$

où le domaine d'intégration en x, ξ est compact, et l'inégalité (6.17) montre que l'intégrale triple converge (puisque $Re(\chi_2) - Re(\chi_1) > -1$). Ainsi, à l'aide des changements de variables $x = s\xi$ et $\eta \mapsto 2\xi\eta$, on obtient

$$< h_1 \# h_2, f >= \Gamma(0,\chi_1)\ |2|\ \chi_1^{-1}(2)\ \chi_1(-1) \int_{k^3} |\xi|\ \chi_1^{-1}(\xi)\ \chi_2(\xi) \times \\ \chi_1^{-1}(\eta)\,|1-\eta|^{-1}\,\chi_2(1-\eta)\psi(2s\xi^2\eta)\ f(s\xi,\xi)\ ds\ d\xi\ d\eta,$$

qui est une intégrale absolument convergente sous les conditions (6.14) : cette intégrale est aussi la limite lorsque $\varepsilon \to 0$, de l'intégrale $I(\varepsilon)$ analogue, obtenue en faisant porter l'intégrale sur l'ensemble défini par la condition $|2s\eta| \geqslant \varepsilon$.

Rappelons que ϕ (resp. ϕ^0) désigne, à un facteur multiplicatif près, la fonction indicatrice de $\mathcal{O}_k$ (resp. $\mathcal{O}_k^0$). Puisque la fonction f appartient à $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$, on a $f(x,\xi) = f(x,\xi)\phi^0(a\xi^2)$ pour tout $a \in k^\times$ avec $|a|$ assez petit, d'où

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) &= \Gamma(0,\chi_1)\ |2|\ \chi_1^{-1}(2)\ \chi_1(-1) \int_k \int_{|2s\eta|\geqslant\varepsilon} |\xi|\ \chi_1^{-1}(\xi)\ \chi_2(\xi) \\ &\quad \times \chi_1^{-1}(\eta)\,|1-\eta|^{-1}\,\chi_2(1-\eta)\psi(2s\xi^2\eta)\ f(s\xi,\xi)\ \phi^0(a\xi^2)\ ds\ d\xi\ d\eta \\ &= \Gamma(0,\chi_1)\ |2|\ \chi_1^{-1}(2)\ \chi_1(-1) \int_{|2s\eta|\geqslant\varepsilon} \chi_1^{-1}(\eta)\,|1-\eta|^{-1}\,\chi_2(1-\eta)\ ds\ d\eta \\ &\quad \times \int_k |\xi|\ \chi_1^{-1}(\xi)\ \chi_2(\xi)\psi(2s\xi^2\eta)\ f(s\xi,\xi)\ \phi^0(a\xi^2)\ d\xi\ . \end{aligned} \tag{6.18}$$

D'après la relation (5.7) et puisque f appartient à $\mathcal{S}_{alg}(k^2) \bigcap L^2_{\dot\chi_1\dot\chi_2^{-1}}(k^2)$, la fonction $f(s\xi,\xi)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(s\xi,\xi) = \int_{\widehat{k^\times}} f_\chi(s\xi,\xi)d\chi = \int_{D(\chi_1,\chi_2)} f_\chi(s\xi,\xi)d\chi = |\xi|^{-1} \int_{D(\chi_1,\chi_2)} f_\chi^\flat(s)\chi(\xi)d\chi, \tag{6.19}$$

où $D(\chi_1,\chi_2)$ est l'ensemble des caractères χ tels que $\dot\chi^{-1} = \dot\chi_1\dot\chi_2$ modulo les carrés de $\widehat{k^\times}$ et qui, en outre, interviennent dans la décomposition en parties homogènes de f. Ainsi l'intégration ne porte que sur une partie compacte de $\widehat{k^\times}$. On a donc

$$I(\varepsilon) = |2| \; \chi_1^{-1}(2) \, \Gamma(0,\chi_1) \, \chi_1(-1) \int\limits_{D(\chi_1,\chi_2)} f_\chi^\flat(s) \, d\chi \; .$$

$$\iint\limits_{|2s\eta|\geqslant\varepsilon} \chi_1^{-1}(\eta) \, |1-\eta|^{-1} \, \chi_2(1-\eta) \, d\eta \, ds \tag{6.20}$$

$$\times \int\limits_{k} (\chi\chi_1^{-1}\chi_2)(\xi) \; \phi^0(a\xi^2)\psi(2s\xi^2\eta) \; d\xi \; .$$

Rappelons que $\dot{\chi}^{-1} = \dot{\chi}_1\dot{\chi}_2\nu^2$ pour un certain caractère ν appartenant à $\widehat{k^\times}$: on fixe un tel caractère ν_0, mais on verra que la formule finale ne dépend pas de ce choix. Donc $\chi\chi_1^{-1}\chi_2 = |.|^{i\lambda-\alpha_1+\alpha_2} \, (\dot{\chi}_1)^{-2}\nu_0^{-2}$, ce qui nous permet de calculer l'intégrale suivante :

$$\int\limits_{k^\times} (\chi\chi_1^{-1} \; \chi_2)(\; \xi)\phi^0(a\xi^2)\psi(2\xi^2 s\eta) \; d\xi$$

$$= \int\limits_{k^\times} |\xi^2|^{\dfrac{i\lambda-\alpha_1+\alpha_2}{2}} \; \phi^0(a\xi^2)((\dot{\chi}_1)^{-2}\nu_0^{-2})(\xi)\psi(2\xi^2 s\eta) \; d\xi.$$

On effectue le changement de variable $t = \xi^2$ (on désignera par $k^{\times \; 2}$ l'ensemble des carrés de $k^\times$), qui transforme l'intégrale qui précède en

$$|2|^{-1} \int\limits_{k^{\times 2}} |t|^{\dfrac{-1+i\lambda-\alpha_1+\alpha_2}{2}} \; \phi^0(at)((\dot{\chi}_1)^{-1}\nu_0^{-1})(t)\psi(2ts\eta)dt.$$

Or $k^{\times 2} = \bigcap\limits_{\epsilon\in\mathbb{W}}$ Ker ϵ, où, rappelons-le, $\mathbb{W}$ est le groupe des caractères d'ordre 2 de $k^\times$. En particulier la fonction indicatrice de $k^{\times 2}$ est égale à $\dfrac{1}{\#(\mathbb{W})} \sum\limits_{\epsilon\,\in\,\mathbb{W}} \epsilon^{-1}$. On remarque, en outre, que $\dfrac{1}{\#(\mathbb{W})} \sum\limits_{\epsilon\in\mathbb{W}} \epsilon^{-1}\nu_0^{-1} = \dfrac{1}{\#(\mathbb{W})} \sum\limits_{\nu} \nu^{-1}$ où la sommation porte sur l'ensemble des solutions de l'équation $\dot{\chi}^{-1} = \dot{\chi}_1\dot{\chi}_2\nu^2$. D'où

$$\int\limits_{k^\times} (\chi\chi_1^{-1}\chi_2)(\xi)\phi^0(a\xi^2)\psi(2\xi^2 s\eta) \; d\xi \; = (|2| \, \#(\mathbb{W}))^{-1} \sum_{\nu} \int\limits_{k^\times} |t|^{\frac{-1+i\lambda-\alpha_1+\alpha_2}{2}}$$

$$\times\phi^0(at)((\dot{\chi}_1)^{-1}\nu^{-1})(t)\psi(2ts\eta)dt.$$

Soit μ un quasi-caractère de $k^\times$. Alors, prenant $\mathcal{F}^{-1}\mu$ au sens des distributions tempérées,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(t \mapsto \phi^0(at)\mu(t))(2s\eta) &= (\mathcal{F}^{-1}(t \mapsto \phi^0(at)) * \mathcal{F}^{-1}\mu)(2s\eta) \\ &= \Gamma(1,\mu)\ |a|^{-1} \int_{k^\times} \phi(a^{-1}(2s\eta - t))\,|t|^{-1}\,\mu^{-1}(t)\ dt,\end{aligned}$$

où l'on a appliqué la formule (5.2). Cette intégrale porte sur l'ensemble $2s\eta + a\mathcal{O}_k$. Il existe une constante C^{-1}, ne dépendant que du plus petit entier N tel que μ soit trivial sur le voisinage $1 + \varpi^N\mathcal{O}_k$ de 1 dans $k^\times$, telle que, quel que soit $\varepsilon > 0$, les inégalités $|2s\eta| \geqslant \varepsilon$ et $|a| \leqslant C^{-1}\varepsilon$ entraînent :

$$\forall t \in 2s\eta + a\mathcal{O}_k,\quad |t|^{-1}\,\mu^{-1}(t) = |2s\eta|^{-1}\,\mu^{-1}(2s\eta).$$

On suppose désormais que $|a| \leqslant C^{-1}\varepsilon$, ce qu'il est possible de faire. Pour $|2s\eta| \geqslant \varepsilon$ et $|a| \leqslant C\varepsilon$, on a alors

$$\mathcal{F}^{-1}(t \mapsto \phi^0(at)\mu(t))(2s\eta) = \Gamma(1,\mu)\ |2s\eta|^{-1}\,\mu^{-1}(2s\eta). \tag{6.21}$$

Nous appliquons cette dernière formule au caractère
$\mu = |\ |^{\frac{-1+i\lambda-\alpha_1+\alpha_2}{2}}\,(\dot{\chi}_1)^{-1}\nu^{-1}$. Il est possible ainsi d'expliciter $I(\varepsilon)$ sous la forme :

$$\begin{aligned}I(\varepsilon) = {}& (\#(\mathbb{W}))^{-1}\chi_1^{-1}(2)\ \chi_1(-1)\ \Gamma(0,\chi_1) \sum_\nu \Gamma\Big(\frac{1+i\lambda-\alpha_1+\alpha_2}{2}, (\dot{\chi}_1)^{-1}\nu^{-1}\Big) \\ &\times \int_{D(\chi_1,\chi_2)} d\chi \iint_{|2s\eta|\geqslant\varepsilon} f_\chi^\flat(s)\ |2s|^{\frac{-1-i\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{2}}\ (\dot{\chi}_1)(2s)\ \nu(2s) \\ &\times \chi_1^{-1}(\eta)\,|1-\eta|^{-1}\,\chi_2(1-\eta)\ |\eta|^{\frac{-1-i\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{2}}\ (\dot{\chi}_1\nu)(\eta)\ d\eta\ ds.\end{aligned}$$

L'intégrale relativement à $d\chi$ ne porte que sur un compact. La condition (6.14) et le fait que la fonction $f_\chi^\flat$ soit continue et équivalente à l'infini à $C\,|s|^{-1}\,\chi(s)$ pour une certaine constante C montrent que l'intégrale relative à $d\eta\ ds$, prise sur k^2 tout entier, est absolument convergente : la limite, lorsque $\varepsilon \to 0$, de $I(\varepsilon)$ s'obtient donc en supprimant la restriction $|2s\eta| \geqslant \varepsilon$ sous l'intégrale double.

D'où, en écrivant

$$\chi_1^{-1}\dot{\chi}_1\nu\,|\ |^{\frac{-1-i\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{2}} = \nu\,|\ |^{\frac{-1-i\lambda-\alpha_1-\alpha_2}{2}}$$

et en utilisant la formule 6.16, nous pouvons alors expliciter (6.21) :

$$
\begin{aligned}
< h_1\#h_2, f >= & \ (\#(\mathbb{W}))^{-1}\chi_1^{-1}(2)\ \chi_1(-1)\ \Gamma(0,\chi_1)\ \Gamma(0,\chi_2) \\
\times & \int\limits_{D(\chi_1,\chi_2)} d\chi \int\limits_k ds\ f_\chi^\flat(s)\ |2s|^{\frac{-1-i\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{2}}\ (\dot{\chi}_1)(2s)
\end{aligned}
$$

$$
\times \sum_\nu \frac{\Gamma(\frac{1+i\lambda-\alpha_1+\alpha_2}{2},(\dot{\chi}_1\nu)^{-1})\Gamma(\frac{1-i\lambda-\alpha_1-\alpha_2}{2},\nu)}{\Gamma(\frac{1-i\lambda-\alpha_1+\alpha_2}{2},\dot{\chi}_2\nu)}\nu(2s). \quad (6.22)
$$

Par ailleurs, on a

$$
< h_\chi, f >= (1-|\varpi|) \int\limits_k h_\chi^\flat(s) f_{\chi^{-1}}^\flat(s) ds \quad (6.23)
$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{S}_{alg}(k^2)$. Cela résulte en effet de la formule (5.5) jointe à la formule (5.4) et à la relation $|t|\ d^\times t = \dfrac{dt}{(1-|\varpi|)}$.

En changeant χ en χ^{-1} dans (6.22), l'équation $\dot{\chi}^{-1} = \dot{\chi}_1\dot{\chi}_2\nu^2$ devient la condition (6.9), et on voit donc (toujours avec $\chi = (i\lambda, \dot{\chi})$) que $< h_1\#h_2, f >$ s'écrit effectivement $\int\limits_{\widehat{k^\times}} < h_\chi, f > d\chi$ à la condition que $h_\chi^\flat(s)$ soit défini par l'expression (6.13). Ceci termine la preuve du lemme 6.7. □

Le lemme qui précède explicite effectivement la décomposition de $h_1\#h_2$ dans le cas où h_1 et h_2 sont des quasi-caractères. Le lemme qui suit permet d'écrire chaque « terme » de la décomposition sous la forme intégrale souhaitée dans le cas général.

LEMME 6.8. — *Soient $h_1(x,\xi) = |x|^{-1}\chi_1(x)$ et $h_2(x,\xi) = |\xi|^{-1}\chi_2(\xi)$ où χ_1 et χ_2 sont des quasi-caractères. On suppose que $\chi_1 = (\alpha_1, \dot{\chi}_1)$ et $\chi_2 = (\alpha_2, \dot{\chi}_2)$. En outre, on suppose que $|Re(\chi_1) \pm Re(\chi_2)| < 1$, $Re(\chi_1) > 0$ et $Re(\chi_2) > 0$. On note ici $(h_1\#h_2)_\chi$ et $(h_1\#h_2)_\chi^\flat$ les fonctions notées h_χ et $h_\chi^\flat$ dans l'énoncé du lemme 6.7. Pour tout caractère χ, on a alors la formule*

$$
\begin{aligned}
(h_1\#h_2)_\chi^\flat(s) &= \iint\limits_{k^2} K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s)\,|s_1|^{-1}\chi_1(s_1)ds_1ds_2 \quad (6.24)\\
&= \sum_\nu a_\nu(\chi_1,\chi_2;\chi) \iint\limits_{k^2} \vartheta^\nu_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s)\,|s_1|^{-1}\chi_1(s_1)ds_1ds_2,
\end{aligned}
$$

dans laquelle les fonctions $\vartheta^{\nu}_{\chi_1,\chi_2,\chi}$ *ont été définies en (6.2), et les coefficients* $a_\nu(\chi_1,\chi_2;\chi)$ *sont donnés par la formule (6.3)*

Preuve. — On évalue d'abord l'intégrale double intervenant au second membre de (6.24), à savoir

$$\iint\limits_{k^2} |s_1-s_2|^{\frac{-1-(i\lambda+\alpha_1+\alpha_2)}{2}}\,[(\dot\chi^{-1}\nu)(s_1-s_2)]\;|s_2-s|^{\frac{-1+i\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{2}}\times$$
$$[(\dot\chi_1\nu)(s_2-s)]\,|s-s_1|^{\frac{-1+i\lambda-\alpha_1+\alpha_2}{2}}\,[(\nu\dot\chi_2)(s-s_1)]\,|s_1|^{-1}\,\chi_1(s_1)\;ds_1\;ds_2.$$

Utilisant la formule (6.16), la relation $\dot\chi=\dot\chi_1\dot\chi_2\nu^2$, ainsi que la formule (5.3), on obtient que l'intégrale double qui précède s'écrit donc

$$\Gamma(0,\chi_1)\;\Gamma(0,\chi_2)\;\Gamma(\frac{1-i\lambda-\alpha_1-\alpha_2}{2},\dot\chi^{-1}\nu)$$
$$\Gamma(\frac{1+i\lambda-\alpha_1-\alpha_2}{2},\nu)\,|s|^{\frac{-1+i\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{2}}\;(\dot\chi_1\nu)(s).$$

Cette dernière égalité ainsi que le lemme 6.7 nous donnent

$$\begin{aligned}
&\sum_\nu a_\nu(\chi_1,\chi_2;\chi)\iint\limits_{k^2}\vartheta^{\nu}_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s)\,|s_1|^{-1}\,\chi_1(s_1)ds_1ds_2\\
&=\sum_\nu a_\nu(\chi_1,\chi_2;\chi)\;\Gamma(0,\chi_1)\;\Gamma(0,\chi_2)\;\Gamma(\frac{1-i\lambda-\alpha_1-\alpha_2}{2},\dot\chi^{-1}\nu)\\
&\quad\times\Gamma(\frac{1+i\lambda-\alpha_1-\alpha_2}{2},\nu)\;|s|^{\frac{-1+i\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{2}}\;(\dot\chi_1\nu)(s)\\
&=(1-|\varpi|)^{-1}\,|s|^{\frac{-1+i\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{2}}\;\dot\chi_1(s)\sum_\nu c_\nu(\chi_1,\chi_2;\chi)\nu(s)\\
&=(h_1\#h_2)^\flat_\chi(s),
\end{aligned}$$

qui est l'égalité recherchée (rappelons que les coefficients $c_\nu(\chi_1,\chi_2;\chi)$ ont été définis dans la définition 6.6). □

COROLLAIRE 6.9. — *Soit* $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ *une matrice appartenant à* $GL(2,k)$. *Sous les mêmes hypothèses que dans le lemme 6.8, on a*

$$\Big(|ax+b\xi|^{-1}\,\chi_1(ax+b\xi)\Big)\;\#\;\Big(|cx+d\xi|^{-1}\,\chi_2(cx+d\xi)\Big)=\int\limits_{\widehat{k^\times}} g_\chi(x,\xi)\;d\chi$$

avec g_χ défini par l'équation (5.5) et par

$$\begin{aligned}(g_\chi^\flat)(s) &= \iint_{k^2} K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s)\,|as_1+b|^{-1}\,\chi_1(as_1+b) \\ &\qquad\qquad |cs_2+d|^{-1}\,\chi_2(cs_2+d)\;ds_1ds_2 \\ &= \sum_\nu a_\nu(\chi_1,\chi_2;\chi)\iint_{k^2}\vartheta^\nu_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s) \\ &\quad\times|as_1+b|^{-1}\,\chi_1(as_1+b)\;\;|cs_2+d|^{-1}\,\chi_2(cs_2+d)\;ds_1ds_2.\end{aligned}$$

Preuve. — La formule que nous allons démontrer est invariante par homothétie relativement au vecteur (a,b). On peut donc supposer que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ appartient à $SL(2,k)$ i.e. $ad-bc=1$. La formule se démontre alors en utilisant le lemme 6.7, la formule (5.5) puis le lemme 6.8 et pour finir les règles de transformations (6.9) qui sont satisfaites par le noyau $K_{\chi_1,\chi_2;\chi}$. □

6.4. Composition de deux ondes planes transverses quasi-homogènes

On estime, au sens faible, la composée de deux ondes planes transverses quasi-homogènes (lemme 6.11). Auparavant, on a besoin du lemme suivant qui s'obtient exactement comme dans [A.U.3], lemme 3.5, vu que sa preuve n'utilise pas autre chose que le fait que la fonction $|s|^{-\varepsilon}$ est intégrable en 0 (resp. l'infini) si $\varepsilon<1$ (resp. $\varepsilon>1$).

LEMME 6.10. —

$$\textit{Soit } I = \iiint_{k^3} |s_1-s_2|^{\frac{-1-\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}}\,|s_2-s|^{\frac{-1+\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}} \times|s-s_1|^{\frac{-1-\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}}\,|u_1(s_1)\;u_2(s_2)\;u(s)|\,ds_1ds_2\;ds.$$

Posons, pour $j=1$ ou 2, $|||u_j|||_j=\sup((1+|s_j|)^{1-\varepsilon_j}\;\;|u_j(s_j)|)$, et supposons que $|\varepsilon_1\pm\varepsilon_2|<1$: alors il existe une contante $C(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ telle que

$$I\leqslant C(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\;\;|||u_1|||_1\;\;|||u_2|||_2\;\;\|u\|_{L^2(k)}\,.$$

LEMME 6.11. — *Soient $(\chi_j)_{j\in\{1,2\}}=((\alpha_j,\dot\chi_j))_{j\in\{1,2\}}$ deux quasi-caractères tels que $|Re(\chi_1)-Re(\chi_2)|<1$, $Re(\chi_1)>0$, $Re(\chi_2)>0$ et*

$|Re(\chi_1) - Re(\chi_2)| + Re(\chi_1) + Re(\chi_2) < 2$ *et soit* h_3 *une fonction appartenant à* $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$. *Alors, pour tout couple* (σ_1, σ_2) *d'éléments de* k^2 *tel que* $\sigma_1 \neq \sigma_2$, *on a*

$$\left|\left\langle (|x - \sigma_1\xi|^{-1} \chi_1(x - \sigma_1\xi)) \# (|x - \sigma_2\xi|^{-1} \chi_2(x - \sigma_2\xi)) \ , \ h_3 \right\rangle\right|$$
$$\leqslant C(\alpha_1, \alpha_2) \ \mid 1, \sigma_1 \mid^{Re(\chi_1 - \chi_2)} \mid \sigma_1 - \sigma_2 \mid^{-1+Re\ \chi_2} . \qquad (6.25)$$

$C(\alpha_1, \alpha_2)$ *étant une fonction localement bornée de* α_1, α_2.

Preuve. — Pour commencer, on étend le lemme 6.7. Soit δ un nombre réel appartenant à $]0,1[$. La déformation de contour $\chi \mapsto \mid . \mid^{\delta} \chi$ dans la formule (6.12) montre que l'on a :

$$(|x|^{-1} \chi_1(x)) \#(|\xi|^{-1} \chi_2(\xi)) = \int_{\widehat{k^\times}} h_\chi(x, \xi) \ d\chi \qquad (6.26)$$

avec

$$\begin{aligned} h_\chi(x, \xi) \quad = \quad & (1 - |\varpi|)^{-1} |x|^{\frac{-1+\delta+i\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{2}} \ |\xi|^{\frac{-1+\delta+i\lambda-\alpha_1+\alpha_2}{2}} \\ & \times \sum_\nu c_\nu(\chi_1, \chi_2; |.|^{\delta} \chi) \ (\dot{\chi}_1\nu)(x) \ (\dot{\chi}_2\nu)(\xi) : \end{aligned}$$

Rappelons que, d'après la définition 6.6, la sommation ne porte que sur les caractères ν pour lesquels (6.9) est vérifiée. En particulier, h_χ ne peut-être non nulle que si $\frac{\dot{\chi}}{\dot{\chi}_1\dot{\chi}_2}$ appartient au groupe $\mathbb{W}$. Les formules (6.11), (5.5) et (6.13) montrent que cette décomposition est valable si l'on suppose, outre les inégalités $0 < Re(\chi_1) < 1$, $0 < Re(\chi_2) < 1$, que $Re(\chi_1) + Re(\chi_2) < 1 + \delta$, $|Re(\chi_1) - Re(\chi_2)| < 1 - \delta$: elle permet donc d'étendre le domaine de validité du lemme 6.7. Ensuite, nous appliquons au premier membre de (6.26) la formule de covariance (2.10) où g est la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2} & -\frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2} \\ 1 & -\sigma_2 \end{pmatrix}$ qui appartient à $SL(2, k)$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} & < (|x - \sigma_1\xi|^{-1} \chi_1(x - \sigma_1\xi))\#(|x - \sigma_2\xi|^{-1} \chi_2(x - \sigma_2\xi)), h_3 >= (1 - |\varpi|)^{-1} \\ & \times |\sigma_1 - \sigma_2|^{\frac{-1-\delta-i\lambda+\alpha_1+\alpha_2}{2}} \int_{\widehat{k^\times}} d\chi \iint_{k^2} dx \ d\xi \ h_3(x, \xi) \ |x - \sigma_1\xi|^{\frac{-1+\delta+i\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{2}} \\ & \times |x - \sigma_2\xi|^{\frac{-1+\delta+i\lambda-\alpha_1+\alpha_2}{2}} \\ & \qquad \sum_\nu \nu(\sigma_1 - \sigma_2)^{-1} \ c_\nu(\chi_1, \chi_2; |.|^{\delta} \chi) \ (\dot{\chi}_1\nu)(x - \sigma_1\xi) \ (\dot{\chi}_2\nu)(x - \sigma_2\xi), \end{aligned}$$

formule dans laquelle l'intégration relativement à $d\chi$ ne porte que sur un compact (en vertu de ce qui a été dit plus haut). Posons (puisque $\dot\chi_1, \dot\chi_2$ et ν sont des caractères)
$R(\sigma_1, \sigma_2) =$

$$\iint_{k^2} |x - \sigma_1\xi|^{\frac{-1+\delta+Re(\chi_1-\chi_2)}{2}} |x - \sigma_2\xi|^{\frac{-1+\delta-Re(\chi_1-\chi_2)}{2}} |h_3(x, \xi)| \ dx\ d\xi.$$

La fonction h_3 appartient à $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$ donc, pour tout entier N, elle est dominée par la fonction $|1, x,\xi|^{-2N}$, d'où
$R(\sigma_1, \sigma_2) \leqslant$

$$C_N \int_k\int_k |x - \sigma_1\xi|^{\frac{-1+\delta+Re(\chi_1-\chi_2)}{2}} |x - \sigma_2\xi|^{\frac{-1+\delta-Re(\chi_1-\chi_2)}{2}} |1, x,\xi|^{-2N} dxd\xi.$$

En vue de la majoration de $R(\sigma_1, \sigma_2)$, nous allons distinguer deux cas :

premier cas : $|\sigma_1| \leqslant 1$. On effectue le changement de variable $x \mapsto x + \sigma_1\xi$ et, en remarquant que $|1, x + \sigma_1\xi,\xi| = |1, x,\xi|$, on obtient

$R(\sigma_1, \sigma_2) \leqslant$

$$C_N \int_k\int_k |x|^{\frac{-1+\delta+Re(\chi_1-\chi_2)}{2}} |x - (\sigma_2 - \sigma_1)\xi|^{\frac{-1+\delta-Re(\chi_1-\chi_2)}{2}} |1, x,\xi|^{-2N} dxd\xi$$

$$\leqslant C_N \int_k dx\ |x|^{\frac{-1+\delta+Re(\chi_1-\chi_2)}{2}} |1, x|^{-N}$$

$$\int_k |x - (\sigma_2 - \sigma_1)\xi|^{\frac{-1+\delta-Re(\chi_1-\chi_2)}{2}} |1, \xi|^{-N}\ d\xi$$

$$\leqslant C_N\ |\sigma_2 - \sigma_1|^{\frac{-1+\delta-Re(\chi_1-\chi_2)}{2}} \int_k dx\ |x|^{\frac{-1+\delta+Re(\chi_1-\chi_2)}{2}} |1, x|^{-N}$$

$$\times \int_k \left|\frac{x}{\sigma_2 - \sigma_1} - \xi\right|^{\frac{-1+\delta-Re(\chi_1-\chi_2)}{2}} |1, \xi|^{-N}\ d\xi.$$

La dernière intégrale de cette inégalité est bornée indépendamment de $\dfrac{x}{\sigma_2 - \sigma_1}$, ce qui nous fournit les majorations suivantes

$$R(\sigma_1, \sigma_2) \leqslant C_N\ |\sigma_2 - \sigma_1|^{\frac{-1+\delta-Re(\chi_1-\chi_2)}{2}} \int_k dx\ |x|^{\frac{-1+\delta+Re(\chi_1-\chi_2)}{2}} |1, x|^{-N}$$

$$\times \sup_{x\in k}\int_k |x-\xi|^{\frac{-1+\delta-Re(\chi_1-\chi_2)}{2}} \quad |1,\xi|^{-N} \quad d\xi$$

$$\begin{aligned}&\leqslant \quad C_N \ |\sigma_2-\sigma_1|^{\frac{-1+\delta-Re(\chi_1-\chi_2)}{2}} \int_k dx \ |x|^{\frac{-1+\delta+Re(\chi_1-\chi_2)}{2}} \quad |1,x|^{-N} \\ &\leqslant \quad C_N \ |\sigma_2-\sigma_1|^{\frac{-1+\delta-Re(\chi_1-\chi_2)}{2}}.\end{aligned}$$

deuxième cas : $|\sigma_1|>1$.

$$R(\sigma_1,\sigma_2)\leqslant C_N \int_k\int_k |x-\sigma_1\xi|^{\frac{-1+\delta+Re(\chi_1-\chi_2)}{2}}$$

$$\times\,|x-\sigma_2\xi|^{\frac{-1+\delta-Re(\chi_1-\chi_2)}{2}} \ |1,x,\xi|^{-2N}\,dx\ d\xi$$

$$\begin{aligned}\leqslant \quad C_N \ |\sigma_1|^{\frac{-1+\delta+Re(\chi_1-\chi_2)}{2}} \int_k\int_k \left|\sigma_1^{-1}x-\xi\right|^{\frac{-1+\delta+Re(\chi_1-\chi_2)}{2}}\\ \times\,|x-\sigma_2\xi|^{\frac{-1+\delta-Re(\chi_1-\chi_2)}{2}} \ |1,x,\xi|^{-2N}\,dx\ d\xi.\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $\xi\mapsto\xi+\sigma_1^{-1}x$, en remarquant de nouveau que $\left|1,x,\xi+\sigma_1^{-1}x\right|=|1,x,\xi|$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}R(\sigma_1,\sigma_2) \quad &\leqslant \quad C_N \ |\sigma_1|^{\frac{-1+\delta+Re(\chi_1-\chi_2)}{2}} \int_k\int_k |\xi|^{\frac{-1+\delta+Re(\chi_1-\chi_2)}{2}} \\ &\qquad \times\left|x-\sigma_2(\xi+\sigma_1^{-1}x)\right|^{\frac{-1+\delta-Re(\chi_1-\chi_2)}{2}} \ |1,x,\xi|^{-2N}\,dx\ d\xi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leqslant C_N \ |\sigma_1|^{\frac{-1+\delta+Re(\chi_1-\chi_2)}{2}} \int_k\int_k |\xi|^{\frac{-1+\delta+Re(\chi_1-\chi_2)}{2}} \ |1,\xi|^{-N}\,d\xi \\ &\qquad \times\left|\sigma_1^{-1}(\sigma_1-\sigma_2)x-\sigma_2\xi\right|^{\frac{-1+\delta-Re(\chi_1-\chi_2)}{2}} \ |1,x|^{-N}\,dx\end{aligned}$$

$$\leqslant C_N \ |\sigma_1|^{\frac{-1+\delta+Re(\chi_1-\chi_2)}{2}} \ \left|\sigma_1^{-1}(\sigma_1-\sigma_2)\right|^{\frac{-1+\delta-Re(\chi_1-\chi_2)}{2}}$$

$$\int_k |\xi|^{\frac{-1+\delta+Re(\chi_1-\chi_2)}{2}} \ |1,\xi|^{-N}\int_k \left|x-\frac{\sigma_1\sigma_2\xi}{(\sigma_1-\sigma_2)}\right|^{\frac{-1+\delta-Re(\chi_1-\chi_2)}{2}} \ |1,x|^{-N}\,dxd\xi.$$

À l'aide de l'argument utilisé à la fin du premier cas, nous obtenons la majoration suivante

$$R(\sigma_1, \sigma_2) \leqslant C_N \ |\sigma_1|^{Re(\chi_1-\chi_2)} \, |\sigma_1 - \sigma_2|^{\frac{-1+\delta-Re(\chi_1-\chi_2)}{2}} .$$

D'où, finalement, dans tous les cas,

$$R(\sigma_1, \sigma_2) \leqslant C_N \ |1, \sigma_1|^{Re(\chi_1-\chi_2)} \, |\sigma_1 - \sigma_2|^{\frac{-1+\delta-Re(\chi_1-\chi_2)}{2}} ,$$

ce qui termine la preuve du lemme 6.11. $\square$

6.5. Preuve de la formule de composition

Le reste de ce travail est consacré à la preuve du théorème 6.5. La méthode employée consiste à décomposer chacun des deux symboles h_1 et h_2 en « ondes planes », c'est-à-dire en symboles dont chacun ne dépend que d'une combinaison linéaire (variable) de x et ξ : génériquement, dans l'intégrale que nous aurons à considérer, la condition de transversalité $\sigma_1 \neq \sigma_2$ qui intervient dans le lemme 6.11 sera vérifiée, et on pourra donc utiliser ce lemme après avoir décomposé chaque onde plane en ses composantes homogènes. Il y a d'assez grandes difficultés de convergence, dont on viendra à bout pour commencer par des méthodes de prolongement analytique, mais également, tout à la fin, par l'usage d'un opérateur approprié, sorte d'analogue $\mathfrak{p}$-adique de l'oscillateur harmonique, qui contribuera à certaines estimations critiques.

En utilisant (6.23), on voit que l'assertion du théorème 6.5 est équivalente à prouver que, pour tout triplet (h_1, h_2, h_3) de fonctions appartenant à $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$, on a

$$\begin{aligned} < h_1 \# h_2, h_3 >= (1 - |\varpi|) \int_{\widehat{k^\times}} d\chi \int_k \ (h_3)^\flat_{\chi^{-1}}(s) ds \iint_{\widehat{k^\times}^2} (\iint_{k^2} K_{\chi_1, \chi_2; \chi}(s_1, s_2; s) \\ \times (h_1)^\flat_{\chi_1}(s_1) \ (h_2)^\flat_{\chi_2}(s_2) \ ds_1 ds_2) \ d\chi_1 d\chi_2. \end{aligned} \tag{6.27}$$

Pour commencer, nous allons, en utilisant un prolongement analytique, montrer que l'intégrale au second membre de (6.27) se ramène à l'intégrale (6.30) plus bas dans laquelle une déformation de contour a été effectuée relativement aux variables χ_1 et χ_2. Il faut pour cela étendre la définition (5.4) des composantes homogènes d'une fonction sur k^2 au cas où l'on remplace le caractère χ par un quasi-caractère.

Soit h une fonction appartenant à $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$ et $\chi = (\alpha, \dot{\chi})$ un quasi-caractère tel que $Re(\chi) < 1$. On pose

$$h_\chi(x,\xi) = \int\limits_{k^\times} h(tx, t\xi)\chi^{-1}(t)\,|t|\;d^\times t \tag{6.28}$$

et $h^\flat_\chi(s) = h_\chi(s,1)$. L'intégrale qui définit cette fonction est bien convergente en raison de l'hypothèse faite sur α.

Soient h_1, h_2, et h_3 trois fonctions appartenant à $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$, $\chi_1 = (\alpha_1, \dot{\chi}_1)$ et $\chi_2 = (\alpha_2, \dot{\chi}_2)$ deux quasi-caractères tels que $|Re(\chi_1) \pm Re(\chi_2)| < 1$, ce qui entraine que $|Re(\chi_1)| < 1$ et $|Re(\chi_2)| < 1$, et enfin $\chi = (i\lambda, \dot{\chi})$ un caractère. Nous allons appliquer le lemme 6.10 aux fonctions $u_j(s_j) = (h_j)^\flat_{\chi_j}(s_j)$ pour $j = 1$ ou 2 et $u(s) = (h_3)^\flat_\chi(s)$, avec $\varepsilon_j = Re\,\chi_j$. On remarque que $|s_j|^{-1}\chi_j(s_j)(h_j)^\flat_{\chi_j}(s_j^{-1}) = \int\limits_{k^\times} h_j(t, ts_j)\chi_j^{-1}(t)\,|t|\;d^\times t$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
|||u_j|||_j &\leqslant C(\varepsilon_j)(\sup_{s_j}|u_j(s_j)| + \sup_{s_j}(|s_j|^{1-\varepsilon_j}\;|u_j(s_j)|)) \\
&\leqslant C(\varepsilon_j)(\sup_{s_j}\int\limits_{k^\times}|h_j(ts_j,t)|\,|t|^{-\varepsilon_j}\,dt + \sup_{s_j}\int\limits_{k^\times}|h_j(t,ts_j)|\,|t|^{-\varepsilon_j}\,dt) < +\infty,
\end{aligned}$$

puisque la fonction h_j est à support compact, et que $|\varepsilon_j| < 1$.

La fonction $u = (h_3)^\flat_{\chi^{-1}}$ est continue et équivalente à l'infini à $C\,|s|^{-1}\chi^{-1}(s)$ pour une certaine constante C, d'où

$$\forall s \in k, \left|(h_3)^\flat_{\chi^{-1}}\right|(s) \leqslant C\,|1,s|^{-1}. \tag{6.29}$$

Le lemme 6.10 prouve alors que l'intégrale

$$\iiint\limits_{k^3}\left|\vartheta^\nu_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s)(h_1)^\flat_{\chi_1}(s_1)\;(h_2)^\flat_{\chi_2}(s_2)\;(h_3)^\flat_{\chi^{-1}}(s)\right|\;ds_1 ds_2\;ds$$

est convergente et est majorée par une constante ne dépendant que des parties réelles de χ_1 et χ_2. De plus, pour $Re(\chi_j)$ fixé, $(h_j)^\flat_{\chi_j} = 0$ sauf sur une partie compacte de l'ensemble des quasi-caractères dont la partie réelle est égale à celle de χ_j. Rappelons que $\chi_j = (\alpha_j, \dot{\chi}_j)$ et que $\chi = (i\lambda, \dot{\chi})$ et posons $H(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \{(\chi_1,\chi_2),\;Re(\chi_1) = \varepsilon_1,\;Re(\chi_2) = \varepsilon_2\}$. Considérons alors l'intégrale

$$\iint\limits_{H(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} d\chi_1 d\chi_2 \tag{6.30}$$

$$\int\limits_{\widehat{k^\times}} d\chi(\iiint\limits_{k^3} K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s)(h_1)^\flat_{\chi_1}(s_1)\;(h_2)^\flat_{\chi_2}(s_2)\;(h_3)^\flat_{\chi^{-1}}(s)\;ds_1\;ds_2\;ds),$$

dans laquelle on suppose la condition $|\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2| < 1$ satisfaite. D'après ce qui précède, l'intégrale est absolument convergente ; en outre, d'après la définition (6.28), la fonction

$$(\alpha_1, \alpha_2) \mapsto K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1, s_2; s)(h_1)^{\flat}_{\chi_1}(s_1)(h_2)^{\flat}_{\chi_2}(s_2)$$

est holomorphe dans le domaine $|Re(\alpha_1 \pm \alpha_2)| < 1$. Une déformation de contour, utilisant le fait que l'application $\alpha_j \mapsto (h_j)_{(\alpha_j, \dot{\chi}_j)}$ est holomorphe sur l'ensemble $|Re(\alpha_j)| < 1$ et $\dfrac{2\pi i}{\ln q}$−périodique, permet alors de ramener l'intégrale au second membre de (6.27) à l'intégrale (6.30) dans laquelle on suppose désormais $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $|\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2| < 1$.

On continue comme dans la preuve du théorème 3.1 de [A.U.3] en décomposant $(h_1)_{\chi_1}$ et $(h_2)_{\chi_2}$ en intégrales de symboles susceptibles de permettre l'application du corollaire 6.9 : en d'autres termes il s'agit de décomposer $(h_j)_{\chi_j}$ en une intégrale de symboles élémentaires dont chacun ne dépend que d'une combinaison linéaire de x et ξ. Cette décomposition conduit à deux intégrations supplémentaires et un peu de travail sera nécessaire pour justifier la convergence de la nouvelle intégrale multiple obtenue. Rappelons que la transformée de Fourier symplectique $\mathcal{G}$ (qui est définie en (1.7)) est une involution sur $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$. Si h une fonction appartenant à $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$, on a donc

$$h(x,\xi) = |2| \int_{k^2} (\mathcal{G}h)(y,\eta)\psi(2(x\eta - y\xi))\; dy\; d\eta, \tag{6.31}$$

soit, après changement de variable,

$$h(x,\xi) = |2| \int_{k^2} (\mathcal{G}h)(\sigma\eta,\eta)\psi(2\eta(x - \sigma\xi))\;\; |\eta|\;\; d\eta\; d\sigma.$$

On pose alors, pour $h_j = h_1$ ou h_2, $h_j^\sigma(x) = |2| \int_k (\mathcal{G}h_j)(\sigma\eta,\eta)\psi(2\eta x)\; |\eta|\; d\eta$, ce qui conduit à la décomposition $h_j(x,\xi) = \int_k h_j^\sigma(x - \sigma\xi)\; d\sigma$. Remarquons pour un usage ultérieur que la fonction $\eta \mapsto (\mathcal{G}h_j)(\sigma\eta,\eta)\; |\eta|$ est à support compact et lipschitzienne, d'une façon uniforme par rapport à σ pour $|\sigma| \leqslant 1$, d'où l'inégalité $\left|h_j^\sigma(x)\right| \leqslant C\; |1,x|^{-1}$ valable pour tout couple (x,σ) avec $|\sigma| \leqslant 1$. Pour $|\sigma| \geqslant 1$, on écrit
$h_j^\sigma(x) = |2|\; |\sigma|^{-2} \int_k (\mathcal{G}h_j)(\eta, \sigma^{-1}\eta)\psi(2\sigma^{-1}\eta x)\; |\eta|\; d\eta$ et le même argument montre que $\left|h_j^\sigma(x)\right| \leqslant C\; |\sigma|^{-2}\; \left|1,\sigma^{-1}x\right|^{-1}$ d'où

$$\left|h_j^\sigma(x)\right| \leqslant \left\{ \begin{array}{c} C\;\; |1,x|^{-1} \text{ si } |\sigma| \leqslant 1 \\ C\;\; |1,\sigma|^{-1}\;\; |\sigma,x|^{-1} \text{ si } |\sigma| > 1 \end{array} \right. , \tag{6.32}$$

avec $|x,\xi| = \max(|x|,|\xi|)$ pour tout $(x,\xi) \in k^2$. Nous avons donc écrit la fonction h_j comme une superposition intégrale d'« ondes planes ». Appliquons cette méthode à la composante homogène de degré χ_j (où χ_j est un quasi-caractère) d'une fonction h_j :

$((h_j)_{\chi_j})^\sigma(x) = |2| \int_k \mathcal{G}((h_j)_{\chi_j})(\sigma\eta,\eta)\psi(2\eta x)\,|\eta|\,d\eta$. Or, $\mathcal{G}((h_j)_{\chi_j}) = (\mathcal{G}h_j)_{\chi_j^{-1}}$, donc l'égalité précédente devient, d'après (6.28),

$$\begin{aligned}
((h_j)_{\chi_j})^\sigma(x) &= |2| \int_k (\mathcal{G}h_j)_{\chi_j^{-1}}(\sigma\eta,\eta)\psi(2\eta x)\,|\eta|\,d\eta \\
&= |2| \int_{k^\times} \psi(2\eta x)\ |\eta|\ d\eta \int_k (\mathcal{G}h_j)(t\sigma\eta, t\eta)\chi_j(t)\ |t|\ d^\times t\,.
\end{aligned}$$

Si nous testons la fonction $((h_j)_{\chi_j})^\sigma$ sur une fonction appartenant à $\mathcal{S}_{alg}(k)$, on voit que l'on peut permuter l'ordre d'intégration du second membre de l'égalité précédente. D'où

$$\begin{aligned}
((h_j)_{\chi_j})^\sigma(x) &= |2| \int_{k^\times} \chi_j(t)\ |t|\ d^\times t \int_k (\mathcal{G}h_j)(t\sigma\eta, t\eta)\psi(2\eta x)\,|\eta|\,d\eta \\
&= \int_{k^\times} \chi_j(t)\ |t|^{-1}\ h_j^\sigma(\frac{x}{t})\ d^\times t \\
&= |x|^{-1}\,\chi_j(x) \int_{k^\times} |t|\ \chi_j^{-1}(t)\ h_j^\sigma(t)\ d^\times t. \qquad (6.33)
\end{aligned}$$

Nous posons pour ce qui suit $b_j(\chi_j,\sigma) = \int_{k^\times} |t|\ \chi_j^{-1}(t)\ h_j^\sigma(t)\ d^\times t$. Comme $1 > Re(\chi_j) > 0$, la majoration (6.32) montre que, pour tout σ,

$$|b_j(\chi_j,\sigma)| \leqslant C\,|1,\sigma|^{-1-Re(\chi_j)}\,. \qquad (6.34)$$

On déduit de ce qui précède l'identité suivante

$$(h_j)^\flat_{\chi_j}(s) = \int_k ((h_j)_{\chi_j})^\sigma(s-\sigma)\ d\sigma = \int_k |s-\sigma|^{-1}\ \chi_j(s-\sigma)\ b_j(\chi_j,\sigma)\ d\sigma, \qquad (6.35)$$

que nous allons substituer à deux des trois facteurs de l'intégrale (6.30). Rappelons que l'expression (6.30), une fois multipliée par $(1-|\varpi|)$, représente le second membre de (6.5) testé sur la fonction h_3 : celui-ci s'écrit donc

$$(1-|\varpi|) \iint_{H(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} d\chi_1 d\chi_2 \int_{\widehat{k^\times}} d\chi \int_k \int_k b_1(\chi_1,\sigma_1)\ b_2(\chi_2,\sigma_2)\ d\sigma_1\ d\sigma_2$$

$$\iiint_{k^3} K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s) \times$$
$$|s_1-\sigma_1|^{-1}\chi_1(s_1-\sigma_1)\ |s_2-\sigma_2|^{-1}\chi_2(s_2-\sigma_2)\ (h_3)^\flat_{\chi^{-1}}(s)ds_1ds_2ds, \quad (6.36)$$

sous réserve de l'absolue convergence de la nouvelle intégrale multiple obtenue, qui comprend une intégrale supplémentaire par rapport à la mesure $d\sigma_1\ d\sigma_2$. Posons (rappelant que (6.4) définit le noyau K comme combinaison linéaire des fonctions $\vartheta^\nu_{\chi_1,\chi_2;\chi}$)

$$\begin{aligned} I(\sigma_1,\sigma_2) &= \iiint_{k^3} \left|\vartheta^\nu_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s)\,|s_1-\sigma_1|^{-1}\chi_1(s_1-\sigma_1)\right| \\ &\qquad \left|\ |s_2-\sigma_2|^{-1}\chi_2(s_2-\sigma_2)\ (h_3)^\flat_{\chi^{-1}}(s)\right|\ ds_1\ ds_2\ ds. \end{aligned}$$

Si $\sigma_1\neq\sigma_2$, on effectue dans l'intégrale définissant $I(\sigma_1,\sigma_2)$ les changements de variables

$$s_j \mapsto \frac{-\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1-\sigma_2}s_j+\sigma_1}{-\dfrac{s_j}{\sigma_1-\sigma_2}+1} \quad \text{et} \quad s\mapsto \frac{-\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1-\sigma_2}s+\sigma_1}{-\dfrac{s}{\sigma_1-\sigma_2}+1}.$$

On remarque, d'une part, que la matrice $\begin{pmatrix} -\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1-\sigma_2} & \sigma_1 \\ -\dfrac{1}{\sigma_1-\sigma_2} & 1\end{pmatrix}$ appartient à $SL(2,k)$, ce qui permet d'utiliser la règle de transformation (6.9) valable on le sait pour les fonctions $\left|\vartheta^\nu_{\chi_1,\chi_2;\chi}\right| = \vartheta^1_{|.|^{\varepsilon_1},|.|^{\varepsilon_2};1}$ aussi bien que pour le noyau K correspondant, et, d'autre part, que $s_1-\sigma_1$ (resp. $s_2-\sigma_2$) est transformé par ce changement de variable en $\dfrac{s_1}{-\dfrac{s_1}{\sigma_1-\sigma_2}+1}$ (resp. $\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{-\dfrac{s_2}{\sigma_1-\sigma_2}+1}$). On peut donc écrire, après simplification, $I(\sigma_1,\sigma_2)$ sous la forme

$$\begin{aligned} &|\sigma_1-\sigma_2\ |^{-1+\varepsilon_2}\iiint_{k^3} |s_1-s_2|^{\frac{-1-\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}}\,|s_2-s|^{\frac{-1+\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}}\,|s-s_1|^{\frac{-1-\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}} \\ &\times |s_1|^{-1+\varepsilon_1}\ \left|-\frac{s}{\sigma_1-\sigma_2}+1\right|^{-1}\left|(h_3)^\flat_{\chi^{-1}}\Bigl(\frac{-\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1-\sigma_2}s+\sigma_1}{-\dfrac{s}{\sigma_1-\sigma_2}+1}\Bigr)\right|\ ds_1\ ds_2\ ds. \end{aligned}$$

Dans la démonstration du lemme 6.8, il est prouvé, en particulier, que

$$\iint_{k^2} |s_1 - s_2|^{\frac{-1-\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}} |s - s_1|^{\frac{-1-\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}} |s_2 - s|^{\frac{-1+\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}} |s_1|^{-1+\varepsilon_1} ds_1\, ds_2$$

$$= \quad C(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\ |s|^{\frac{-1+\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}}.$$

si $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ et $|\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2| < 1$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} I(\sigma_1, \sigma_2) &= C(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\, |\sigma_1 - \sigma_2|^{-1+\varepsilon_2} \int_k |s|^{\frac{-1+\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}} \left| -\frac{s}{\sigma_1 - \sigma_2} + 1 \right|^{-1} \times \\ &\qquad \left| (h_3)^\flat_{\chi^{-1}} \left(\frac{-\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} s + \sigma_1}{-\dfrac{s}{\sigma_1 - \sigma_2} + 1} \right) \right| ds. \end{aligned}$$

La majoration (6.29) montre que $I(\sigma_1, \sigma_2) \leqslant C(\varepsilon_1, \varepsilon_2) J(\sigma_1, \sigma_2)$ avec, par définition,

$$J(\sigma_1, \sigma_2) = |\sigma_1 - \sigma_2|^{-1+\varepsilon_2} \int_k |s|^{\frac{-1+\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}} \left| -\frac{\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} s + \sigma_1, -\frac{s}{\sigma_1 - \sigma_2} + 1 \right|^{-1} ds,$$

soit, après le changement de variable $s \mapsto (\sigma_1 - \sigma_2)s$,

$$\begin{aligned} J(\sigma_1, \sigma_2) &= |\sigma_1 - \sigma_2|^{\frac{-1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}} \int_k |s|^{\frac{-1+\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}} |\sigma_2 s + \sigma_1,\ s + 1|^{-1} ds \\ &= |\sigma_1 - \sigma_2|^{\frac{-1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}} \Big(\int_{|s| \leqslant 1} |s|^{\frac{-1+\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}} |\sigma_2 s + \sigma_1\ ,\ s + 1|^{-1} ds \\ &\qquad + \int_{|s| < 1} |s|^{\frac{-1-\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}} |\sigma_1 s + \sigma_2\ ,\ s + 1|^{-1} ds \Big). \qquad (6.37) \end{aligned}$$

La fonction $s \mapsto |\sigma_2 s + \sigma_1\ ,\ s + 1|^{-1} = |s + 1|^{-1} \left| 1\ ,\ \dfrac{\sigma_2 s + \sigma_1}{s + 1} \right|^{-1}$ est de carré intégrable sur k et sa norme L^2 sur k est égale, à un facteur multiplicatif constant près, à $|\sigma_1 - \sigma_2|^{-\frac{1}{2}}$ (effectuant le changement de variable homographique $s \mapsto \dfrac{\sigma_2 s + \sigma_1}{s + 1}$). D'autre part, on a l'estimation suivante

$$\sup_{s \in k} |\sigma_2 s + \sigma_1\ ,\ s + 1|^{-1} = \sup_{s \in k} |\sigma_2 s + \sigma_1 - \sigma_2\ ,\ s|^{-1} \leqslant |1\ , \sigma_2|\ \ |\sigma_1 - \sigma_2|^{-1},$$

que l'on obtient en appliquant l'inégalité ultramétrique dans les cas $|\sigma_2 s|$ $\begin{cases} < |\sigma_1 - \sigma_2| \\ = |\sigma_1 - \sigma_2| \\ > |\sigma_1 - \sigma_2|. \end{cases}$ Ces estimations sur la norme L^2 et la norme L^∞ de la fonction $s \mapsto |\sigma_2 s + \sigma_1\ ,\ s+1|^{-1}$ nous fournissent, par interpolation, la majoration suivante (qui est valable pour tout nombre réel $p > 2$, la confusion n'étant pas à craindre avec le p de $\mathbb{Q}_p$)

$$\begin{aligned}\left\| |\sigma_2 s + \sigma_1\ ,\ s+1|^{-1} \right\|_{L^p(B(0,1))} &\leqslant C\,|\sigma_1 - \sigma_2\,|^{\frac{2-p}{p}}\,|1\ ,\ \sigma_2|^{\frac{p-2}{p}}\,|\sigma_1 - \sigma_2\,|^{-\frac{1}{p}} \\ &\leqslant C\,|\sigma_1 - \sigma_2\,|^{\frac{1-p}{p}}\,|1\ ,\ \sigma_2|^{\frac{p-2}{p}}.\end{aligned}$$

Soit q le nombre réel défini par $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. La fonction $s \mapsto |s|^{\frac{-1-|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|}{2}}$ appartient à $L^q(B(0,1))$ si $\dfrac{-1-|\varepsilon_1-\varepsilon_2|}{2} > -\dfrac{1}{q}$, c'est-à-dire $\dfrac{1-|\varepsilon_1-\varepsilon_2|}{2} > \dfrac{1}{p}$. Sous cette dernière condition, nous obtenons, d'après l'inégalité de Hölder, l'estimation suivante

$$\int_{|s|\leqslant 1} |s|^{\frac{-1+\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}}\,|\sigma_2 s + \sigma_1,\ s+1|^{-1}\,ds \leqslant C(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\,|\sigma_1 - \sigma_2\,|^{\frac{1-p}{p}}\,|1,\sigma_2|^{\frac{p-2}{p}}.$$

Cette dernière estimation est également valable pour le deuxième terme du second membre de la formule (6.37) définissant $J(\sigma_1,\sigma_2)$, à condition d'échanger σ_1 et σ_2, ainsi que ε_1 et ε_2, donc, pourvu que $\dfrac{1-|\varepsilon_1-\varepsilon_2|}{2} > \dfrac{1}{p}$,

$$J(\sigma_1,\sigma_2) \leqslant C(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\ |\sigma_1 - \sigma_2\,|^{\frac{-1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\frac{1-p}{p}}\,(|\,1\ ,\ \sigma_1|^{1-\frac{2}{p}} + |1\ ,\ \sigma_2|^{1-\frac{2}{p}}) \tag{6.38}$$

et, par conséquent,

$$I(\sigma_1,\sigma_2) \leqslant C(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\,|\sigma_1 - \sigma_2\,|^{\frac{-1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\frac{1-p}{p}}\,(|\,1\ ,\ \sigma_1|^{1-\frac{2}{p}} + |1\ ,\ \sigma_2|^{1-\frac{2}{p}}).$$

Pour assurer la convergence de l'intégrale (6.36), il suffit donc, utilisant également (6.34), que, toujours avec $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $|\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2| < 1$, il existe $p > 2$ tel que, avec la nouvelle condition $\dfrac{1-|\varepsilon_1-\varepsilon_2|}{2} > \dfrac{1}{p}$, la fonction

$$|1,\sigma_1\,|^{-1}\,|1,\sigma_2\,|^{-1}\,|\sigma_1 - \sigma_2\,|^{\frac{-1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\frac{1-p}{p}}\,(|\,1,\ \sigma_1|^{1-\frac{2}{p}} + |\,1,\ \sigma_2|^{1-\frac{2}{p}})$$

soit intégrable sur k^2. Or cette fonction est intégrable sur k^2 sous les conditions

$$\frac{1-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{2} < \frac{1}{p} < \frac{1-|\varepsilon_1-\varepsilon_2|}{2} \tag{6.39}$$

rappelons que $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, choix fait peu après (6.30) ; nous prenons alors n'importe quel nombre p satisfaisant à cette dernière condition et traitons à présent l'intégrale (6.36), dont nous venons d'établir la convergence à l'aide du corollaire 6.9.

Supposons $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Conformément au corollaire 6.9, posons

$$(|x-\sigma_1\xi|^{-1}\chi_1(x-\sigma_1\xi))\ \#\ (|x-\sigma_2\xi|^{-1}\chi_2(x-\sigma_2\xi)\ ) = \int\limits_{\widehat{k^\times}} (g^{\sigma_1,\sigma_2}_{\chi_1,\chi_2})_\chi(x,\xi)\ d\chi$$

avec
$(g^{\sigma_1,\sigma_2}_{\chi_1,\chi_2})^\flat_\chi(s) =$

$$\iint\limits_{k^2} K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s)\,|s_1-\sigma_1|^{-1}\chi_1(s_1-\sigma_1)\,|s_2-\sigma_2|^{-1}\chi_2(s_2-\sigma_2)ds_1ds_2.$$

D'après (5.5), on a

$$\begin{aligned}&< (g^{\sigma_1,\sigma_2}_{\chi_1,\chi_2})_\chi, h_3 >= (1-|\varpi|)\int\limits_k (h_3)^\flat_{\chi^{-1}}(s)\ ds \iint\limits_{k^2} K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s)\times\\ &|s_1-\sigma_1|^{-1}\chi_1(s_1-\sigma_1)\ \ |s_2-\sigma_2|^{-1}\chi_2(s_2-\sigma_2)\ ds_1\ ds_2 \qquad (6.40)\end{aligned}$$

et on voit que l'expression au second membre de (6.27), qui, comme on l'a vu, s'identifie à (6.36), s'écrit aussi

$$\begin{aligned}&\int\limits_{Re(\chi_1)=\varepsilon_1} d\chi_1 \int\limits_{Re(\chi_2)=\varepsilon_2} d\chi_2 \iint\limits_{k^2} b_1(\chi_1,\sigma_1)\ b_2(\chi_2,\sigma_2)\ \times \qquad (6.41)\\ &< (|x-\sigma_1\xi|^{-1}\chi_1(x-\sigma_1\xi))\ \#\ (|x-\sigma_2\xi|^{-1}\chi_2(x-\sigma_2\xi))\ ,\ h_3 > d\sigma_1\ d\sigma_2.\end{aligned}$$

Rappelons que ceci a été établi sous les hypothèses $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $|\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2| < 1$. Par ailleurs, (5.7), (6.28) et une déformation de contour complexe fournissent, pour $0 < \varepsilon_j < 1$,

$$\begin{aligned}h_j(x,\xi) &= \int\limits_{Re(\chi_j)=\varepsilon_j} (h_j)_{\chi_j}\ (x,\xi)\ d\chi_j\\ &= \int\limits_{Re(\chi_j)=\varepsilon_j} d\chi_j \int\limits_k (h_j)^{\sigma_j}_{\chi_j}(x-\sigma_j\xi)\ d\sigma_j\\ &= \int\limits_{Re(\chi_j)=\varepsilon_j} d\chi_j \int\limits_k b_j(\chi_j,\sigma_j)\ \ |x-\sigma_j\xi|^{-1}\chi_j(x-\sigma_j\xi)\ d\sigma_j,\end{aligned}$$

où l'on a utilisé (6.35). D'où

$$< h_1 \# h_2, h_3 > = < \left(\int_{Re(\chi_1)=\varepsilon_1} d\chi_1 \int_k b_1(\chi_1, \sigma_1) \, |x - \sigma_1 \xi|^{-1} \chi_1(x - \sigma_1 \xi) \, d\sigma_1 \right) \#$$

$$\left(\int_{Re(\chi_2)=\varepsilon_2} d\chi_2 \int_k b_2(\chi_2, \sigma_2) \; |x - \sigma_2 \xi|^{-1} \chi_2(x - \sigma_2 \xi) \, d\sigma_2 \right), h_3 > .$$

Cette expression est identique à (6.41) pourvu que l'on puisse enfin commuter les intégrations et l'opération de composition # dans la dernière expression. On voit donc qu'il s'agit d'écrire, au sens faible en testant contre une fonction appartenant à $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$, l'identité

$$\begin{aligned} &\left(\int_{Re(\chi_1)=\varepsilon_1} d\chi_1 \int_k b_1(\chi_1, \sigma_1) \; |x - \sigma_1 \xi|^{-1} \chi_1(x - \sigma_1 \xi) d\sigma_1 \right) \# \\ &\left(\int_{Re(\chi_2)=\varepsilon_2} d\chi_2 \int_k b_2(\chi_2, \sigma_2) \; |x - \sigma_2 \xi|^{-1} \chi_2(x - \sigma_2 \xi) \, d\sigma_2 \right) \\ &= \int_{Re(\chi_1)=\varepsilon_1} d\chi_1 \int_{Re(\chi_2)=\varepsilon_2} d\chi_2 \int_k \int_k b_1(\chi_1, \sigma_1) \; b_2(\chi_2, \sigma_2) \\ &\times (\, |x - \sigma_1 \xi|^{-1} \chi_1(x - \sigma_1 \xi)) \# (\, |x - \sigma_2 \xi|^{-1} \chi_2(x - \sigma_2 \xi)) \; d\sigma_1 \; d\sigma_2 \end{aligned} \tag{6.42}$$

ou l'identité analogue dans laquelle les quasi-caractères χ_1 et χ_2 sont fixés : les intégrations sur $d\chi_1$ et $d\chi_2$ se font sur des compacts.

Nous allons montrer pour commencer que chacun des deux membres de l'équation

$$\begin{aligned} &\left(\int_k b_1(\chi_1, \sigma_1) \; |x - \sigma_1 \xi|^{-1} \chi_1(x - \sigma_1 \xi) d\sigma_1 \right) \\ &\qquad \# \left(\int_k b_2(\chi_2, \sigma_2) \; |x - \sigma_2 \xi|^{-1} \chi_2(x - \sigma_2 \xi) \, d\sigma_2 \right) \\ &= \int_k \int_k b_1(\chi_1, \sigma_1) \; b_2(\chi_2, \sigma_2) \; (\, |x - \sigma_1 \xi|^{-1} \chi_1(x - \sigma_1 \xi)) \\ &\qquad \# \; (\, |x - \sigma_2 \xi|^{-1} \chi_2(x - \sigma_2 \xi)) \; d\sigma_1 \; d\sigma_2 \end{aligned} \tag{6.43}$$

(testé contre une fonction $h_3 \in \mathcal{S}_{alg}(k^2)$) est une fonction analytique de (χ_1, χ_2) dans le domaine $|Re(\chi_1) - Re(\chi_2)| < 1$, $Re(\chi_1) > 0$, $Re(\chi_2) > 0$ et $|Re(\chi_1) - Re(\chi_2)| + Re(\chi_1) + Re(\chi_2) < 2$. Nous montrerons ensuite l'identité des deux membres sous les hypothèses supplémentaires $\frac{1}{2} < Re(\chi_1)$ et $\frac{1}{2} < Re(\chi_2)$. Pour le membre de gauche de l'égalité (6.43), lequel s'écrit aussi $(h_1)_{\chi_1}\# \ (h_2)_{\chi_2}$, cela résulte de ce que chacune des deux fonctions $(h_j)_{\chi_j}$ s'écrit $(h_j)_{\chi_j}\phi + (h_j)_{\chi_j}(1-\phi)$, décomposition dans laquelle le premier terme est sommable et le second est un symbole de poids 1, comme il en résulte de (6.28) et de $0 < Re(\chi_j) < 1$: Par suite, l'expression $< (h_1)_{\chi_1}\#(h_2)_{\chi_2}, h_3 >$ dépend analytiquement de (χ_1, χ_2), pour tout $h_3 \in \mathcal{S}_{alg}(k^2)$.

Comme la fonction $|1,\sigma_1|^{-1-Re(\chi_2)}\,|1,\sigma_2|^{-1-Re(\chi_2)}\,|\sigma_1-\sigma_2|^{-1+Re\chi_2}$ est intégrable sur k^2, le lemme 6.11 et la formule (6.34) montrent que le membre de droite de (6.43) dépend analytiquement de α_1 et α_2 sur le domaine défini par les conditions $|Re(\chi_1) - Re(\chi_2)| < 1$, $Re(\chi_1) > 0$ et $Re(\chi_2) > 0$, $|Re(\chi_1) - Re(\chi_2)| + Re(\chi_1) + Re(\chi_2) < 2$. En particulier, on peut se borner à prouver (6.43) sous l'hypothèse supplémentaire $Re(\chi_1) > \frac{1}{2}$, $Re(\chi_2) > \frac{1}{2}$, compatible avec ce qui précède, et que nous faisons désormais.

Introduisons à cet effet l'opérateur $L = Op(\max(1, |2x|, |2\xi|))$, analogue non-archimédien de l'oscillateur harmonique. On pose aussi $\delta_\chi(x,\xi) = |x|^{-1}\chi(x)$, de sorte que, avec $g_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & -\sigma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $(\delta_\chi \circ g_\sigma)(x,\xi) = |x-\sigma\xi|^{-1}\chi(x-\sigma\xi)$. Introduisons également l'opérateur $A_{\chi,\sigma}$ de symbole de Weyl $\delta_\chi \circ g_\sigma$. Regardant L comme un opérateur non-borné dans L^2, on note que L, de domaine initial $\mathcal{S}(k)$, est formellement auto-adjoint, et que, se rappelant la famille $(\phi_Y) = (\phi_{y,\eta})$ d'états cohérents (cf. définition 1.1), on a les formules $L\phi_{y,\eta} = \max(1,|2y|,|2\eta|)\phi_{y,\eta}$ et $Op(\max(1,|2\xi|))\phi_{y,\eta} = \max(1,|2\eta|)\phi_{y,\eta}$: rappelons pour la deuxième de ces identités que $Op(\max(1,|2\xi|))$ est l'opérateur noté J^1 en (1.4). Par suite, si l'on pose

$$D(L) = \left\{ u \in L^2(k) : \int_k \max(1,|2y|,|2\eta|)^2\,|(u,\phi_{y,\eta})|^2\ dy\,d\eta < +\infty \right\},$$

on voit que L s'étend en un opérateur auto-adjoint sur $L^2(k)$ de domaine $D(L)$. En outre,

$$\begin{aligned}\|Op(\max(1,|2\xi|))\ u\|^2 &= \int_k \max(1,|2\eta|)^2\,|(u,\phi_{y,\eta})|^2\ dy\ d\eta\\ &\leqslant C\int_k \max(1,|2y|,|2\eta|)^2\,|(u,\phi_{y,\eta})|^2\ dy\ d\eta \leqslant C\,\|Lu\|^2.\end{aligned}$$

Il résulte de là que $D(L)\subset D(J^1)\subset L^\infty_{\mathrm{loc}}(k)$. Remplaçant $Op(\max(1,|2\xi|))$ dans l'identité précédente par $Op(\max(1,|2y|))$, on voit d'ailleurs que $D(L)\subset L^\infty(k)$: ceci montre que pour $\frac{1}{2}<Re(\chi)<1$, l'opérateur $Op(\delta_\chi)$ envoie $D(L)$ dans $L^2(k)$. En prenant l'adjoint, on voit qu'il envoie aussi $L^2(k)$ dans $D(L^{-1})$.

L'avantage de l'espace de Hilbert $D(L)$ est qu'il est invariant par l'action de tous les opérateurs $\pm\mathrm{M}et(g_\sigma)$ dans le cas où $|\sigma|\leqslant 1$. Cela résulte en effet de l'invariance du symbole de L sous l'action linéaire de $SL(2,\mathcal{O}_k)$, dont la vérification est immédiate.

Il résulte de là que, pour $|\sigma|\leqslant 1$, l'opérateur $A_{\chi,\sigma}$ envoie $D(L)$ dans $L^2(k)$ et $L^2(k)$ dans $D(L^{-1})$ avec une norme indépendante de σ. Pour $|\sigma|>1$ et sous la même hypothèse pour $Re(\chi)$, on écrit

$$|x-\sigma\xi|^{-1}\,\chi(x-\sigma\xi)=|\sigma|^{-1}\,\chi(\sigma)\,|\sigma^{-1}x-\xi|^{-1}\,\chi(\sigma^{-1}x-\xi)$$

et on voit de même que $A_{\chi,\sigma}$ envoie $D(L)$ dans $L^2(k)$ et $L^2(k)$ dans $D(L^{-1})$ avec une norme moindre que $C\,|\sigma|^{-1+Re(\chi)}$. Finalement, l'identité (6.43) équivaut à l'identité entre opérateurs

$$\begin{aligned}&\Big(\int_k b(\chi_1,\sigma_1)A_{\chi_1,\sigma_1}d\sigma_1\Big)\Big(\int_k b(\chi_2,\sigma_2)A_{\chi_2,\sigma_2}d\sigma_2\Big)\\ &\qquad\qquad = \int_k\int_k b(\chi_1,\sigma_1)\ b(\chi_2,\sigma_2)\ A_{\chi_1,\sigma_1}A_{\chi_2,\sigma_2}\ d\sigma_1\ d\sigma_2.\end{aligned}$$

Cette identité résulte, vu que l'on a maintenant $Re(\chi_1)>\frac{1}{2}$, $Re(\chi_2)>\frac{1}{2}$, et que $|b(\chi_j,\sigma_j)|\leqslant C\,|1,\sigma_j|^{-1-Re(\chi_j)}$ de ce que le second membre est une intégrale convergente en norme dans l'espace des opérateurs bornés de $D(L)$ dans $D(L^{-1})$.

Bibliographie

[A.B.] BECHATA (A.). — *Calcul pseudo-différentiel p-adique*, thèse Université de Reims (2001).

[R.B.] BEALS (R.). — Characterization of pseudodifferential operators ans applications, *Duke Math. J.* **42**, p. 45-57 (1977).

[G.F.] FOLLAND (G.). — Harmonic analysis in phase space, *Annals of Math. Studies* **122**, Princeton University Press (1989).

[G.G.P.S.] GUELFAND (I.M.), GRAEV (M.I), PIATESKII-SHAPIRO (I.I). — *Representation theory and automorphic functions*, vol. 6, Academic Press, Boston (1990).

[S.H.] HARAN (S.). — Quantization and symbolic calculus over the p-adic numbers, *Annales de l'Institut Fourier* **43,4**, p. 997-1053 (1993).

[L.H.] HÖRMANDER (L.). — The Weyl Calculus of pseudodifferential operators, *Comm. Pure Appl. Math.* **32,3**, p. 360-444 (1979).

[S.L.] LANG (S.). — *Algebraic Number Theory*, Addison-Wesley, Reading Mass. (1970).

[R.S.] REED (M.) & SIMON (B.). — *Methods of modern mathematical physics*, tome I, Functional Analysis, Academic Press, New-York (1980).

[M.T.] TAIBLESON (M.H.). — *Fourier Analysis on local field*, Princeton University Press, Princeton (1975).

[A.U.1] UNTERBERGER (A.). — Oscillateur harmonique et opérateurs pseudodifférentiels, *Annales de l'Institut Fourier* **29,3**, p. 201-221 (1979).

[A.U.2] UNTERBERGER (A.). — *Quantization and non-holomorphic modular forms*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag (2000).

[A.U.3] A. UNTERBERGER (A.). — *Automorphic pseudodifferential analysis and higher-level Weyl calculi*, Birkhäuser, Berlin-Heidelberg-New York (2003).

[U.U.] UNTERBERGER, H.UPMEIER. — *Pseudodifferential analysis on symmetric cones*, CRC Press, Boca Raton (USA) (1996).

[V.V.Z] VLADIMIROV (V.S.), VOLOVICH (I.V.), ZELENOV (E.I.). — *p-adic analysis and mathematical physics*, Series on Soviet & European Mathematics-vol. 1, World Scientific (1994).

[A.W.] WEIL (A.). — *Basic Number Theory*, Springer-Verlag, Berlin (1967).