ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

LAURENT BERNIS

Solutions stationnaires des équations de Vlasov-Poisson à symétries cylindriques

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 14, nº 1 (2005), p. 51-70

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_2005_6_14_1_51_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XIV, n° 1, 2005
pp. 51–70

Solutions stationnaires des équations de Vlasov-Poisson à symétries cylindriques[(*)]

LAURENT BERNIS [(1)]

RÉSUMÉ. — Nous montrons l'existence de solutions stationnaires des équations de Vlasov-Poisson (dans le cas des plasmas), en symétrie cylindrique, qui sont fonctions de l'énergie et de la norme du moment cinétique.

ABSTRACT. — We prove the existence of stationary cylindrically symmetric solutions of Vlasov-Poisson system (in the plasma physics case), which are functions of both energy and modulus of angular momentum.

1. Introduction

Ce travail a été mené dans le contexte des études sur le transport des particules chargées dans les accélérateurs de fort courant (cf. [14] et [13]). Dans ce type d'accélérateur, les effets de charge d'espace, interaction mutuelle entre les particules, jouent un rôle non négligeable, il convient donc d'avoir une connaissance de la dynamique transverse du faisceau sous les effets antagonistes du confinement par la ligne accélératrice et du déconfinement par répulsion de charge d'espace (voir à ce propos [10] et [12]).

Nous avons considéré dans ce travail le modèle le plus simple, mais déjà riche, décrivant le transport d'un faisceau non collisionnel de particules chargées le long d'un canal de focalisation continue et uniforme, l'ensemble du système étant supposé de symétrie cylindrique. Nous allons étudier la variation de la fonction de distribution transverse de charge f, fonction de la distance r à l'axe du faisceau (symétrie de révolution), de la composante radiale de la vitesse p, du moment angulaire L, (r fois la composante orthoradiale de la vitesse), sous l'action d'un potentiel électrostatique U dépendant

(*) Reçu le 26 juin 2003, accepté le 28 juin 2004
(1) Université d'Orléans, UFR de Sciences, Département de Mathématiques, BP 6759, 45067 Orléans Cedex 2, France.
E-mail : Laurent.Bernis@Wanadoo.fr

uniquement de r et tel que $\partial_\theta U$ soit nul (absence de dynamique ortho-radiale).

Le potentiel est somme de deux termes : U_{int} potentiel interne dû à la charge d'espace et u_c potentiel de confinement. Par ρ_c nous désignerons r fois la densité de charge associée au potentiel de confinement. Nous prendrons : $\rho_c(r) = -cr$, ce qui correspond à une densité de confinement constante, et donc $u_c(r) = \frac{1}{4}cr^2$, $c > 0$. Notons cependant que seul le comportement en l'infini du potentiel de confinement sera utilisé : il suffit qu'il croisse infiniment plus vite qu'un logarithme.
La densité de charge du faisceau par unité de longueur sera fixée égale à une constante Q.

Le problème est gouverné par les équations de Vlasov-Poisson stationnaires à symétrie radiale (voir [6], [9] et [5]) :

$$\left(p\,\partial_r + \left(\frac{L^2}{r^3} - \partial_r U\right)\partial_p\right) f(r,p,L) = 0, \tag{1.1}$$

$$(r\,U')'(r) = -\rho_c(r) - \int_{\mathbb{R}^2} f(r,p,L)\,dpdL, \tag{1.2}$$

$$U'_{int}(r) \underset{+\infty}{\sim} \frac{-Q}{r} \text{ avec } U_{int} = U - u_c, \tag{1.3}$$

$$\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2} f(r,p,L)\,drdpdL = Q. \tag{1.4}$$

La première équation (Vlasov) modélise la variation de la fonction de distribution transverse de charge f.
La seconde équation (Poisson) donne le potentiel en fonction de :

- $\int_{\mathbb{R}^2} f(r,p,L)\,dpdL$, quantité représentant r fois la densité de charge due aux particules.
- $\rho_c = -(ru'_c)'$, quantité représentant r fois la densité associée au potentiel de confinement u_c.

L'équation (1.3) fixe le potentiel interne $U_{int} = U - u_c$, à une constante près ((1.2) ne le définit qu'à une fonction harmonique radiale près).
L'équation (1.4) traduit que la densité de charge par unité de longueur du faisceau est fixée.

Les équations de Vlasov-Poisson dans le cas des plasmas comme dans le cadre gravitationnel ont fait l'objet de nombreuses études mathématiques. Le plus souvent l'étude des solutions et de leur régularité s'effectue en dimension 3 et avec une dépendance en temps (cf. [15], [17] et [18]). Pour ce qui nous concerne, nous étudierons des solutions stationnaires de ces équations en dimension 2 comme dans ([12]). De plus du fait des symétries propres à notre problème, liées à sa nature physique, nous chercherons des solutions présentant une symétrie de révolution. D'autre part, nous chercherons des solutions de l'équation de Vlasov (fonctions de distributions des particules) fonctions de l'énergie locale du plasma et du moment angulaire. Cette prescription classique de la forme des solutions a notamment été étudiée ou utilisée dans le cas gravitationnel dans [16], [1], [2], et [11] et plus récemment utilisée dans [4] ou [8] ; on trouve dans cette dernière référence une étude de la stabilité de solutions fonctions de l'énergie. L'étude de la stabilité du système Vlasov-Poisson qui fait appel à la méthode de Casimir, a été aussi étudiée, en se limitant au cas des plasmas, dans [3], [19], [7]. Dans le cas présent, le fait de se placer en dimension 2 avec une symétrie radiale complique quelque peu l'étude mathématique à cause du comportement logarithmique du potentiel coulombien à grande distance et du comportement singulier de l'origine. De plus, le fait propre de ce travail est de chercher une fonction de distribution à la fois fonction fixée de l'énergie et du moment angulaire, et d'intégrale fixée, ce qui correspond physiquement à la nécessité de prescrire l'intensité du faisceau.

Nous allons nous intéresser à des solutions pour lesquelles la fonction de distribution est une fonction positive fixée F des deux intégrales premières du champ associé à (1.1) que sont l'énergie locale, $\frac{1}{2}p^2 + U(r) + \frac{L^2}{2r^2}$, et le moment angulaire L :

$$f(r,p,L) = F\left(\frac{1}{2}p^2 + U(r) + \frac{L^2}{2r^2}, L\right). \tag{1.5}$$

Commençons par quelques définitions et notations :
Nous chercherons le potentiel U sous la forme

$$U = u_c + u_0 + u, \tag{1.6}$$

où la quantité u_0 est définie pour des raisons techniques par

$$u_0(r) = -\frac{Q}{2}\ln\left(1 + r^2\right). \tag{1.7}$$

Notons que :

$$\int_0^{+\infty} \left(-ru_0'\right)'(r)\, dr = Q, \tag{1.8}$$

autrement dit la « charge » associée à u_0 est la charge totale. De plus le comportement en l'infini de u_0 est celui imposé au champ interne par (1.3), de sorte que nous récupérons une bonne décroissance en l'infini pour u.

DÉFINITION 1.1. — *Nous désignerons par $\mathbb{H}$ l'espace de Sobolev à poids, ensemble des applications $r \mapsto u(r)$, éléments de $L^2\left(\mathbb{R}_+^*, (r+1)^{-2}\, dr\right)$, dont la dérivée au sens des distributions u' est élément de $L^2\left(\mathbb{R}_+^*, rdr\right)$. Les éléments de $\mathbb{H}$ seront confondus avec leur représentant continu et $\mathbb{H}$ sera muni du produit scalaire $\langle . \mid . \rangle$, défini par :*

$$\langle u \mid v \rangle = u(1)\, v(1) + \int_0^{+\infty} u'(r)\, r v'(r)\, dr.$$

Remarque 1.2. — On peut vérifier sans difficultés que ce produit scalaire fait de $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert, et que la norme associée, $\|.\|$, est équivalente à la norme naturelle : $u \mapsto \left(\int_0^{+\infty} |u|^2 (r+1)^{-2}\, dr + \int_0^{+\infty} |u'|^2 r dr\right)^{\frac{1}{2}}$.

Le résultat principal que nous énoncerons se fera pour une application F, élément de $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, vérifiant les hypothèses techniques suivantes :

- En $+\infty$, le comportement de F est donné par : il existe $\alpha > 7/2$ tel que :

  $$F \text{ est bornée sur } [C, +\infty[\times\mathbb{R}, \text{ pour tout } C \in \mathbb{R} \text{ et } v^\alpha F(v, L) \underset{v \to +\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{1.9}$$

  uniformément en L.

- En $-\infty$, F croît moins vite qu'une exponentielle, c'est-à-dire qu'il existe $\beta > 0$ et $D \in \mathbb{R}$, tels que pour tout $L \in \mathbb{R}$ et tout $v < D$:

  $$F(v, L) \leqslant \exp(-\beta v). \tag{1.10}$$

- Il existe enfin un intervalle I, d'intérieur non vide, un réel A et un réel $k > 0$, tels que, pour tout $L \in I$ et pour tout $v \leqslant A$:

  $$F(v, L) \geqslant k. \tag{1.11}$$

Énonçons maintenant les deux théorèmes principaux de ce travail :

THÉORÈME 1.3 (EXISTENCE). — *Soient Q un réel > 0 et F un élément de $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, vérifiant les hypothèses* (1.9) (1.10) *et* (1.11). *Il existe un élément u de $\mathbb{H}$ (cf. Déf. 1.1), admettant ainsi que ru' un prolongement de classe C^1 à $\mathbb{R}_+$, tel que le couple (U, f) donné par* (1.5) – (1.7) *soit solution au sens fort sur $\mathbb{R}_+^*$ des équations* (1.1), (1.2), (1.3) *et* (1.4).

Remarque 1.4. — En prouvant ce théorème nous montrerons en fait un peu plus : *toute application u, élément de $\mathbb{H}$, telle que (U, f) (de la forme précédente) soit solution au sens faible de* (1.2) *est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et (U, f) est alors solution au sens fort sur $\mathbb{R}_+^*$ des équations* (1.1), (1.2), (1.3) *et* (1.4), *et de plus u et ru' admettent un prolongement de classe C^1 à $\mathbb{R}_+$.*

Nous démontrerons également que si F décroît en la première variable sans s'annuler, ce qui assure que (1.11) est automatiquement vérifiée, l'élément u donné par le théorème précèdent est unique :

THÉORÈME 1.5 (UNICITÉ). — *Soient $Q > 0$ et F un élément de $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, vérifiant* (1.9) *et* (1.10). *Si de plus $v \mapsto F(v, L)$ décroît sans s'annuler, pour tout $L \in \mathbb{R}$, alors il existe un unique élément u de $\mathbb{H}$ admettant ainsi que ru' un prolongement de classe C^1 à $\mathbb{R}_+$, tel que le couple (U, f) donné par* (1.5) – (1.7) *soit solution au sens fort sur $\mathbb{R}_+^*$ des équations* (1.1), (1.2), (1.3) *et* (1.4).

Remarque 1.6. — Dans la preuve de ce résultat nous montrerons en fait un résultat plus fort : *l'élément u donné par ce théorème est l'unique élément de $\mathbb{H}$ tel que (U, f) soit solution au sens faible de* (1.2).

Donnons de façon informelle le principe de la preuve des théorèmes 1.3 et 1.5. La démonstration rigoureuse fera l'objet des sections suivantes.
Fixons l'application F. Pour toute application u régulière, le couple (U, f) donné par (1.5) – (1.7) est une solution de (1.1). Cherchons s'il existe u telle que (U, f) soit solution de (1.1) et (1.2).
Le principe de notre étude consiste à interpréter l'équation de Poisson comme une équation de stationnarité d'une fonctionnelle E_F que nous allons maintenant définir.
Considérons l'application suivante, qui, appliquée à $U(r)$, fournira r fois la densité spatiale en r :

$$\rho_F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (r, v) \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} F\left(\frac{1}{2}p^2 + v + \frac{L^2}{2\,r^2}, L\right) dpdL.$$

On pose ensuite :

$$H_F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (r,v) \mapsto \int_v^{+\infty} \rho_F(r,w)\, dw,$$

$$E_F : u \mapsto \int_0^{+\infty} H_F(r, U(r)) + \frac{1}{2} u'(r)\, r u'(r) - (r u_0')'(r)\, u(r)\, dr.$$

Formellement :

$$dE_F(u).w = \int_0^{+\infty} -\rho_F(r, U(r))\, w(r) + u'(r)\, r w'(r) - (r u_0')'(r)\, w(r)\, dr. \tag{1.12}$$

Soit, après une intégration par parties :

$$dE_F(u).w = \int_0^{+\infty} \Big(-\rho_F(r,\, U(r)) - \rho_c(r) - (U'r)'(r)\Big)\, w(r)\, dr.$$

Donc $dE_F(u)$ est nulle, si et seulement si (U, f) est solution de (1.2). Si c'est le cas, on montre alors que la solution (U, f) ainsi construite satisfait (1.1), (1.3) et (1.4).
Ceci arrive en particulier lorsque E_F est extrémale en u. Or, on montrera que E_F est faiblement semi-continue inférieurement et est infinie en l'infini, E_F admet donc au moins un minimum.

Enfin, si de plus F décroît en la première variable, on montre que E_F est strictement convexe, d'où l'existence d'un unique minimum u, caractérisé par $dE_F(u) = 0$, d'où le théorème 1.5.

La section 2 établit rigoureusement que E_F est bien définie et différentiable et prouve la formule (1.12).
Dans la section 3, se trouve l'équivalence entre « $dE_F(u) = 0$ » et « (U, f) solution de (1.2) » (Proposition 3.1). Puis nous démontrerons que pour un tel élément, (1.3) et (1.4) sont automatiquement satisfaites (Proposition 3.5). Les Lemmes 3.6 et 3.7 montreront respectivement que E_F est infinie en l'infini et faiblement semi-continue inférieurement. Il en résultera l'existence d'un minimum pour E_F (Proposition 3.8), ce qui achèvera la preuve du Théorème 1.3. Suit la preuve du Théorème 1.5.

2. Construction et étude de la fonctionnelle E_F

Nous allons justifier rigoureusement l'existence de la fonctionnelle E_F et de sa différentielle, ce qui constitue le cœur de la preuve du théorème 1.3.

PROPOSITION 2.1. — *Soit* $F \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, *vérifiant* (1.9) *et* (1.10). *Les applications suivantes sont successivement bien définies et continues :*

$$\rho_F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (r,v) \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} F\left(\frac{1}{2}p^2 + v + \frac{L^2}{2\,r^2}, L\right) dpdL,$$

$$H_F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (r,v) \mapsto \int_v^{+\infty} \rho_F(r,w)\,dw,$$

$$E_F : \mathbb{H} \to \mathbb{R}\,,\ u \mapsto \int_0^{+\infty} H_F(r, U(r)) + \frac{1}{2}u'(r)\,ru'(r) + (-ru_0')'(r)\,u(r)\,dr,$$

où U *est donné par* (1.6) *et* (1.7).

De plus E_F *est de classe* C^1 *et*

$$dE_F(u)\,.h = \int_0^{+\infty} -\rho_F(r, U(r))\,h(r) + u'(r)\,rh'(r) + (-ru_0')'(r)\,h(r)\,dr.$$

Preuve. —

Étape 1 : Existence et propriétés de ρ_F.

D'après (1.9), l'application

$$\sigma_F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (w,L) \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} F\left(\frac{1}{2}p^2 + w, L\right) dp$$

est bien définie et continue.

Par intégration on déduit également de (1.9) que

$$w^{\alpha-1/2}\sigma_F(w,L) \underset{w\to+\infty}{\to} 0, \tag{2.1}$$

uniformément en L.

Enfin, (1.10) et (1.9) impliquent qu'il existe $d \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, tels que pour tout $L \in \mathbb{R}$ et tout $w < d$,

$$\sigma_F(w,L) < e^{-\gamma w}. \tag{2.2}$$

D'après (2.1), $\sigma_F(w,L) = \underset{w\to+\infty}{o}\left(w^{\left(-\alpha+\frac{1}{2}\right)}\right)$, uniformément en L. Nous en déduisons en premier lieu que $\sigma_F\left(\frac{L^2}{2\,r^2} + v, L\right) = \underset{w\to+\infty}{O}\left(\left(\frac{1}{L^2}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}\right)$, uniformément en $(r,v) \in [a,b]\times[a',b']$, où $0 < a < b$ et $a' < b'$. La définition et la continuité de ρ_F sur $[a,b] \times [a',b']$, puis sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ en résultent immédiatement.

Nous en déduisons également en intégrant (2.1) que :

$$\frac{v^{\alpha-1}}{r}\rho_F\,(r,v) \underset{v\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.3}$$

Ensuite (2.1) montre que pour tout $V \in \mathbb{R}$,

$$\rho_F\,(r,v) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0, \tag{2.4}$$

uniformément en $v \in [V,+\infty[$.
Enfin, d'après (2.1) et (2.2), il existe $\gamma' > 0$ et $D' \in \mathbb{R}$, tels que pour tout $r > 0$ et tout $v < D'$,

$$\rho_F\,(r,v) < r\, e^{-\gamma' v}. \tag{2.5}$$

Étape 2 : Existence et continuité de H_F.

H_F est bien définie puisque grâce à (2.3), $w \mapsto \rho_F(r,w)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. La continuité de H_F résulte de celle de ρ_F et de la convergence, uniforme en r sur $]0,R]$, de $v^{\alpha-1}\rho_F\,(r,v)$ vers zéro, lorsque v tend vers $+\infty$, pour tout $R > 0$, propriété fournie par (2.3).

Étape 3 :

En vue d'étudier la première partie de l'intégrale donnant E_F, introduisons pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$g_n\,:\mathbb{H}\to\mathbb{R};\quad u\mapsto\int_{1/n}^{n} H_F\,(\,r,(u+u_0+u_c)\,(r))\,dr.$$

Montrons que g_n est différentiable.

$$g_n(u) = \int_{1/n}^{n} \tilde{H}\,(u,r)\,dr,$$

où l'on a posé : $\tilde{H} : \mathbb{H}\times\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R};\quad (u,r)\mapsto H_F\,(r,(u+u_0+u_c)\,(r)\,)$.
Par ailleurs tout $u \in \mathbb{H}$, confondue avec son représentant continu, s'écrit :

$$u\,(r) = u\,(1) + \int_1^r u'\,(t)\,dt. \tag{2.6}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'en déduire, pour tout $r > 0$, l'inégalité que nous utiliserons souvent :

$$|u(r)| \leqslant \sqrt{2}\, \|u\| \left(\sqrt{|\ln(r)|} + 1\right). \tag{2.7}$$

Cette inégalité, jointe à la continuité de H_F, (étape 2), assure que $\tilde{H}$ est continue sur $\mathbb{H} \times [1/n, n]$.

D'autre part d'après (2.7),

$$|H_F(r, U(r) + h(r)) - H_F(r, U(r)) + \rho_F(r, U(r))\, h(r)| = o(\|h\|).$$

Donc $\tilde{H}$ admet une dérivée partielle en la première variable :

$$\partial_u \tilde{H}(u, r).h = -\rho_F(r, U(r))\; h(r).$$

En utilisant la continuité de $(u, r) \mapsto \rho_F(r, U(r))$ sur $\mathbb{H} \times [1/n, n]$ (qui se prouve exactement comme celle de $\tilde{H}$), grâce à l'inégalité (2.7) on obtient la continuité de $\partial_u \tilde{H}$ sur $\mathbb{H} \times [1/n, n]$. $\tilde{H}$ étant continue et admettant une dérivée partielle en la première variable continue, on peut « différencier sous le signe intégrale » : g_n est de classe C^1, et

$$dg_n(u).h = -\int_{1/n}^{n} \rho_F(r, U(r))\, h(r)\, dr.$$

Étape 4 : $(g_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

D'après (2.3) et le fait que $u_0(r) + u_c(r) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4} c r^2$, il vient :

$$\tilde{H}(0, r) \underset{r \to \infty}{=} O\left(\frac{1}{r^{2\alpha - 5}}\right). \tag{2.8}$$

Pour $r < 1$, $-u_c(r) + u_0(r) > -\frac{Q}{2} \ln(2)$ et donc :

$$0 \leqslant \tilde{H}(0, r) \leqslant \int_{-\frac{Q}{2}\ln(2)}^{+\infty} \rho_F(r, w)\, dw.$$

D'après (2.3) et (2.4), on déduit que :

$$\tilde{H}(0, r) \underset{r \to 0}{\rightarrow} 0. \tag{2.9}$$

(2.8) et (2.9) assurent que $(g_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la quantité finie $\int_0^{+\infty} H_F(r, u_0(r) + u_c(r))\, dr$.

Étape 5 : Convergence uniforme de $(dg_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur toute partie bornée de $\mathbb{H}$.

Soient $\varepsilon > 0$, $M > 0$ et $h \in \mathbb{H}$. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m > n > 0$. Pour $u \in \mathbb{H}$ tel que $\|u\| \leqslant M$,

$$\begin{aligned}|dg_m(u).h - dg_n(u).h| \leqslant & \int_n^m \rho_F(r, U(r))\,|h(r)|\,dr \\ & + \int_{1/m}^{1/n} \rho_F(r, U(r))\,|h(r)|\,dr.\end{aligned}$$

D'une part, les inégalités (2.3) et (2.7) montrent que :

$$\rho_F(r, U(r)) = O\left(r^{3-2\alpha}\right)(r \to \infty),$$

et donc, en utilisant encore une fois (2.7), on conclut qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m > n > N_0$, et tout $u \in \mathbb{H}$ tel que $\|u\| \leqslant M$,

$$\int_n^m \rho_F(r, U(r))\,|h(r)|\,dr \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|h\|. \tag{2.10}$$

D'autre part

$$\int_{1/m}^{1/n} \rho_F(r, U(r))\,|h(r)|\,dr = \int_{1/m}^{1/n}\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_F\left(\frac{L^2}{2r^2} + U(r), L\right)|h(r)|\,dLdr.$$

En contrôlant $\sigma_F\left(\frac{L^2}{2r^2} + U(r), L\right)$ grâce à (2.1) pour les grandes valeurs de L, grâce à (2.2) pour les autres et en utilisant dans les deux cas (2.7), on montre qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $m > n > N_1$, et tout $u \in \mathbb{H}$ tel que $\|u\| \leqslant M$,

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \rho_F(r, U(r))\,|h(r)|\,dr \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|h\|. \tag{2.11}$$

Il résulte de (2.10) et de (2.11) que la suite $(dg_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur toute partie bornée de $\mathbb{H}$.

Étape 6 : Conclusion.

Les étapes 3, 4 et 5 assurent l'existence de l'application g limite de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par :

$$g : \mathbb{H} \to \mathbb{R}, u \mapsto \int_0^{+\infty} H_F(r, U(r))\,dr.$$

Elles montrent aussi que g est C^1 et que

$$dg(u).h = -\int_0^{+\infty} \rho_F(r, u + u_0 + u_c(r))\,h(r)\,dr.$$

L'existence, la différentiabilité de E_F et la valeur de sa différentielle en découlent immédiatement, l'inégalité (2.7) assurant l'existence et la différentiabilité de la partie linéaire, la définition même de la norme celle de la partie quadratique. $\square$

3. Preuve des Théorèmes 1.3 et 1.5

On montre que les solutions de l'équation de Poisson vont être fournies par des points critiques de E_F. Plus précisément :

PROPOSITION 3.1. — *Soit $F \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ vérifiant* (1.9) *et* (1.10), *soit $u \in \mathbb{H}$. Alors avec la notation* (1.6)-(1.7), *dE_F est nulle si et seulement si*

$$\rho_F(r, U) + \rho_c = (-rU')' \tag{3.1}$$

au sens des distributions, sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus si on a (3.1), *alors u et $r\,u'$ admettent un prolongement C^1 à $\mathbb{R}_+$ et l'égalité précédente a lieu au sens des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$.*

La preuve de cette proposition va s'appuyer sur les lemmes qui suivent.

Dans les Lemmes 3.2–4, F désignera un élément de $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ vérifiant (1.9) et (1.10). Nous utiliserons les notations (1.6) et (1.7) et garderons celles de la section 2.

LEMME 3.2. — *Soit $u \in \mathbb{H}$, telle que $\rho_F(r, U) + \rho_c = (-r\,U')'$ au sens des distributions sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors ru' tend vers 0 en $+\infty$ et en 0.*

Preuve. — Puisque $r \mapsto \rho_F(r, U(r)) = (-rU'_{int})'(r)$, où $U_{int} = u + u_0$, est continue (cf. Proposition 2.1), et positive, $(-rU'_{int})$, est de classe C^1 et croissante. Donc $-rU'_{int}$ et par suite $(-ru')$ admettent une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, en $+\infty$. Or $u' \in L^2(\mathbb{R}_+^*, rdr)$, donc la limite en $+\infty$ de $-ru'$ est nulle. Un raisonnement en tout point analogue montre que ru' tend vers 0 en 0. $\square$

LEMME 3.3. — *Soit $u \in \mathbb{H}$, telle que $\rho_F(r, U) + \rho_c = (-r\,U')'$ au sens des distributions sur $\mathbb{R}_+^*$. L'application $]0, 1] \to \mathbb{R}, r \mapsto \sqrt{r}u'(r)$ est bornée sur $]0, 1]$.*

Preuve. — Soit $r \in]0,1]$, on a d'après le Lemme 3.2 :

$$ru'(r) = \int_0^r (su')'(s)\, ds. \tag{3.2}$$

Or $r \mapsto \rho_F(r, U(r)) \in L^2(]0,1])$. En effet, d'après (2.3) et (2.5) il existe $C \in \mathbb{R}$ et $\gamma' > 0$ tels que pour tout $r \in]0,1]$:

$$\rho_F(r,v) \leqslant C \exp(-\gamma' v) + C \frac{\chi_{[1,+\infty[}(v)}{v^{\alpha-1}}.$$

En utilisant alors (2.7) :

$$|\rho_F(r,(u_0+u_c+u)(r))| \leqslant C \exp\left(\gamma'\sqrt{2}\,\|u\|\left(|\ln(r)|^{1/2}+1\right)+\frac{Q}{2}\ln(2)\right)+C.$$

Donc $r \mapsto \rho_F(r,(U)(r))$ est dans $L^2(]0,1])$ car dominée par une fonction de $L^2(]0,1])$.
Donc $(rU')'$, puis $(ru')'$ sont également éléments de $L^2(]0,1])$.
L'inégalité de Hölder appliquée à (3.2) donne alors :

$$|ru'(r)| \leqslant \left(\int_0^1 \left((su'(s))'\right)^2 ds\right)^{1/2} r^{1/2}.$$

D'où le résultat. $\square$

LEMME 3.4. — *Soit $u \in \mathbb{H}$, telle que $\rho_F(r,U) + \rho_c = (-r\,U')'$ au sens des distributions sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors u et u' admettent une limite finie en* 0.

Preuve. — D'après le Lemme 3.3, $u'(r) = O\left(r^{-\frac{1}{2}}\right)(r \to 0)$ et donc l'application u admet une limite en 0 :

$$u(r) \underset{r\to 0}{\to} -\int_0^1 u'(s)\, ds + u(1).$$

D'après le Lemme 3.2, $\displaystyle\int_0^r -\rho_F(s,U(s))ds = ru'(r) + ru_0'(r)$. Or d'après (2.4), pour tout réel V, $\rho_F(r,v) \underset{r\to 0}{\to} 0$, uniformément en $v \in [V,+\infty[$. Donc

$$u'(r) \underset{r\to 0}{\to} -\lim_{r\to 0} u_0'(r) = 0. \qquad \square$$

Preuve de la Proposition 3.1. — On commence par supposer que $\rho_F\,(r, U) + \rho_c = (-r\,U')'$ au sens des distributions sur $\mathbb{R}_+^*$.

Puisque $r \mapsto \rho_F\,(r, U\,(r))$ est continue (cf. Proposition 2.1), $(-rU\,')'$ est la dérivée au sens ordinaire de $(-rU\,')$. On en déduit que u' est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Le Lemme 3.4 assure alors que u admet un prolongement C^1 à $\mathbb{R}_+$. Comme $(-U'r)' = \rho_F(r, U) + \rho_c$, on voit que $(u'r)'$ admet une limite en 0, et donc que $(u'r)$ admet un prolongement C^1 à $\mathbb{R}_+$. De plus, l'égalité (3.1) a lieu au sens des applications continues sur $\mathbb{R}_+$.

Montrons maintenant que $dE_F\,(u) = 0$. Soit $h \in \mathbb{H}$, il existe une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues à support compact de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ qui converge dans $L^2\left(\mathbb{R}_+^*, r\,dr\right)$ vers h'.

Désignons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par h_n la primitive de k_n :

$$h_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, r \mapsto h\,(1) + \int_1^r k_n\,(s)\,ds,$$

et prenons $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. Alors

$$\int_a^b -\rho_F\,(r, U)\,h_n + (-u'r)'\,h_n + (-u_0'r)'\,h_n = 0$$

et

$$\int_a^b -\rho_F\,(r, U)\,h_n + u'r\,k_n + (-u_0'r)'\,h_n - [u'rh_n]_a^b = 0.$$

L'inégalité de Hölder montre que :

$$\int_a^b u'r\,h_n' \underset{n\to+\infty}{\to} \int_a^b u'r\,h'.$$

Or l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à l'égalité (2.6) pour $h - h_n$ donne :

$$|h\,(r) - h_n\,(r)| \leqslant \left|\int_0^{+\infty} \left(h'\,(x) - k_n\,(x)\right)^2 x\,dx\right|^{1/2} \sqrt{|\ln\,(r)\,|},$$

ce qui assure la convergence uniforme de $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers h sur tout compact de $\mathbb{R}_+^*$. Donc,

$$\int_a^b -\rho_F\,(r, U)\,h + u'rh' + (-u_0'r)'\,h - [u'r\,h]_a^b = 0. \tag{3.3}$$

En faisant tendre a vers zéro et b vers $+\infty$, nous obtiendrons, compte-tenu de la Proposition 2.1 :

$$dE_F(u).h = 0,$$

pour peu que nous puissions montrer que $u'(r)\,rh(r) \underset{r\to 0}{\to} 0$ et $u'(r)\,r\,h(r) \underset{r\to+\infty}{\to} 0$.
Or, le Lemme 3.3 et (2.7) assurent que $u'(r)\,rh(r) \underset{r\to 0}{\to} 0$.
D'autre part on montre grâce à (2.7) et à (2.3) que :

$$\rho_F(r,U) = o\left(\frac{1}{r^{2\alpha-3}}\right)(r \to +\infty),$$

d'où

$$(-r\,u')' \sim -(-r\,u_0')' \sim \frac{2Q}{r^3}\,(r \to +\infty).$$

Comme, $u'(r)\,r \underset{r\to+\infty}{\to} 0$, (Lemme 3.2), $ru'(r) = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$. Donc, d'après l'inégalité (2.7) appliquée à h,

$$u'(r)\,r\,h(r) \underset{r\to+\infty}{\to} 0.$$

Finalement, $dE_F(u)$ est nulle comme application linéaire de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{R}$.

Réciproquement, on suppose que $dE_F(u) = 0$ (en tant qu'élément de $L(\mathbb{H},\mathbb{R})$). Alors, en appliquant $dE_F(u)$ à des applications C^∞ à support compact de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, et par définition de la distribution $(ru')'$ on a : $\rho_F(r,U) + \rho_c = (-r\,U')'$ au sens des distributions sur $\mathbb{R}_+^*$. □

Nous allons maintenant montrer que les solutions de (1.1) et (1.2) de la forme (1.6)–(1.7), vérifient automatiquement (1.3) et (1.4).

Proposition 3.5. — *Soient $F \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$ vérifiant* (1.9) *et* (1.10), *et $u \in \mathbb{H}$, telle qu'avec la notation* (1.6)–(1.7),

$$\rho_F(r,U(r)) + \rho_c(r) = (-rU')'(r)$$

au sens des distributions sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors :

$$\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2} F\left(\frac{1}{2}p^2 + U(r) + \frac{L^2}{2r^2}, L\right) drdLdp = Q$$

et

$$U_{int}' = u' + u_0' \underset{+\infty}{\sim} -\frac{Q}{r}.$$

Preuve. — On voit que

$$\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2} F\left(\frac{1}{2}p^2 + U(r) + \frac{L^2}{2r^2}, L\right) drdLdp = \int_0^{+\infty} \rho_F(r,U(r))\,dr,$$

$$\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2} F\left(\frac{1}{2}p^2+U(r)+\frac{L^2}{2r^2},L\right) drdLdp=\int_0^{+\infty}\left(-(r\,u')'-(r\,u_0')'\right)(r)dr.$$

Or, $\displaystyle\int_0^{+\infty}-(r\,u_0')'(r)\,dr=Q$, tandis que le Lemme 3.2 assure la nullité de $\displaystyle\int_0^{+\infty}-(r\,u')'(r)\,dr$.

Le deuxième point est immédiat puisque u_0' a le bon comportement asymptotique et que $u'(r)\underset{r\to+\infty}{=}o(1/r)$ (Lemme 3.2). $\square$

Pour achever la preuve du Théorème 1.3, il nous faut essentiellement montrer l'existence d'un point stationnaire pour E_F. On montre pour cela l'existence, pour cette fonction, d'un minimum local. Ce résultat s'appuie sur les deux lemmes suivants.

F désigne, jusqu'à la fin de la preuve de 2.1, un élément de $C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$ vérifiant (1.9), (1.10) et (1.11). De plus on associe à $u\in\mathbb{H}$, la fonction U donnée par (1.6)–(1.7).

LEMME 3.6. — *La fonctionnelle E_F est infinie en l'infini.*

Preuve. — Soit $u\in\mathbb{H}$, rappelons que

$$E_F(u)=\int_0^{+\infty}H_F(U)+\frac{1}{2}(u'ru')+(-ru_0')'\,u,$$

et que $\|u\|^2$ est la somme de $\int_0^{+\infty}u'ru'$ et de $|u(1)|^2$. Nous allons discuter sur l'importance relative de ces deux termes.

Soit θ un élément de $]0,1[$.

- *Premier cas* : $\displaystyle\int_0^{+\infty}u'ru'\geqslant\theta\,\|u\|^2$.

  L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à (2.6) donne que :

$$|u(r)|\leqslant|u(1)|+\left(\int_0^{+\infty}u'ru'\right)^{1/2}|\ln(r)|^{1/2}.$$

Donc

$$E_F(u) \geqslant \frac{1}{2}\theta \|u\|^2 - (1-\theta)^{1/2}\|u\| I_1 - \|u\| I_2, \tag{3.4}$$

où $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} (-ru_0')'(r)\,dr \geqslant 0$ et $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} (-ru_0')'(r)\,|\ln(r)|^{1/2}\,dr \geqslant 0$.

- *Deuxième cas :* $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'ru' < \theta\|u\|^2$.

  – Si $u(1) \geqslant 0$, alors

  $$\begin{aligned} u(r) &\geqslant u(1) - \left(\int_0^{+\infty} u'ru'\right)^{1/2} |\ln(r)|^{1/2} \\ &\geqslant \left((1-\theta)^{1/2} - \theta^{1/2}|\ln(r)|^{1/2}\right)\|u\|. \end{aligned}$$

  On en déduit que $u(r) \geqslant 0$ sur l'intervalle $[a_1, a_2]$ où,

  $$a_1 = \exp\left(-\frac{1-\theta}{\theta}\right), a_2 = \exp\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right),$$

  et que $u(r) \geqslant \frac{1}{2}(1-\theta)^{1/2}\|u\|$ sur $[b_1, b_2]$ où,

  $$b_1 = \exp\left(-\frac{1-\theta}{4\theta}\right), b_2 = \exp\left(\frac{1-\theta}{4\theta}\right).$$

  Finalement,
  $E_F \geqslant \frac{1}{2}(1-\theta)^{1/2}\|u\| \int_{b_1}^{b_2} (-ru_0')'$

  $$-\|u\|\int_0^{a_1}(-ru_0')'(r)\,|\ln(r)|^{1/2}\,dr - \|u\|\int_{a_2}^{+\infty}(-ru_0')'(r)\,|\ln(r)|^{1/2}\,dr.$$

  Or lorsque θ tend vers 0, a_1 et b_1 tendent vers 0, a_2 et b_2 tendent vers $+\infty$, donc, quitte à choisir θ suffisamment petit, il existe $I_3 > 0$ tel que,

  $$E_F \geqslant I_3\|u\|. \tag{3.5}$$

  – Si $u(1) < 0$, alors en utilisant (1.11), on montre qu'il existe $A' \in \mathbb{R}$ et $k' > 0$ tels que pour $v \leqslant A'$ et $r \in [b_1, b_2]$:

  $$H_F(r, v) \geqslant k'(A' - v)^{3/2}. \tag{3.6}$$

D'autre part,

$$u(r) \leqslant u(1) + \left(\int_0^{+\infty} u' r u'\right)^{1/2} |\ln(r)|^{1/2}$$
$$\leqslant \left(-(1-\theta)^{1/2} + \theta^{1/2} |\ln(r)|^{1/2}\right) \|u\| .$$

Donc, pour $r \in [b_1, b_2]$,

$$u(r) \leqslant -\frac{1}{2}(1-\theta)^{1/2} \|u\| .$$

Finalement, pour $\|u\|$ suffisamment grande et $r \in [b_1, b_2]$, on déduit de (3.6) l'estimation :

$$U(r) \leqslant -\frac{1}{2}(1-\theta)^{\frac{1}{2}} \|u\| + u_c(r) + u_0(r) \leqslant -\frac{1}{4}(1-\theta)^{\frac{1}{2}} \|u\| \leqslant A'.$$

Et donc, pour $\|u\|$ suffisamment grande,

$$E_F(u) \geqslant k'(b_2 - b_1)\left(A' + \frac{1}{4}(1-\theta)^{1/2} \|u\|\right)^{3/2} - (I_1 + I_2) \|u\| . \tag{3.7}$$

Il résulte des inégalités (3.4), (3.5) et (3.7) que E_F tend vers l'infini, lorsque $\|u\|$ tend vers l'infini. $\square$

LEMME 3.7. — *La fonctionnelle E_F est semi-continue inférieurement sur $\mathbb{H}$ pour la topologie faible.*

Preuve. — Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\phi_r : \mathbb{H} \to \mathbb{R}, u \mapsto u(r)$ est, d'après (2.7), une forme linéaire continue.

Donc si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{H}$ qui converge faiblement vers un élément u de $\mathbb{H}$, alors, la continuité de H_F (Proposition 2.1) assure que $(r \mapsto H_F(r, (v_n + u_0 + u_c)(r)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers l'application $r \mapsto H_F(r, (u + u_0 + u_c)(r))$.

Le lemme de Fatou donne alors :

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} H_F(r, (v_n + u_0 + u_c)(r))\, dr \geqslant \int_0^{+\infty} H_F(r, (u + u_0 + u_c)(r))\, dr.$$

Donc, $u \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} H_F(u(r) + u_0(r) + u_c(r))\, dr$ est faiblement semi-continue inférieurement. D'autre part, l'application

$$u \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} u'(r)\, u'(r) + (-r u_0')'(r)\, u(r)\, dr$$

est de classe C^1 (Proposition 2.1) et, comme somme d'une forme quadratique positive et d'une forme linéaire, est convexe. Elle est donc faiblement semi-continue inférieurement. Finalement E_F est semi-continue inférieurement pour la topologie faible. $\square$

PROPOSITION 3.8. — *La fonctionnelle E_F admet au moins un minimum sur $\mathbb{H}$.*

Preuve. — Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, minimisante pour E_F. Comme E_F est infinie en l'infini cette suite minimisante est bornée dans $\mathbb{H}$, donc quitte à en extraire une sous-suite on peut supposer qu'elle converge faiblement vers un élément w de $\mathbb{H}$. La semi-continuité inférieure de E_F assure que :

$$\inf_{v\in\mathbb{H}} (E_F(v)) = \lim_{n\to\infty} (E_F(u_n)) \geqslant E_F(w),$$

et donc

$$\inf_{v\in\mathbb{H}} (E_F(v)) = E_F(w). \qquad \square$$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le Théorème 1.3.

Preuve du Théorème 1.3. — La fontionnelle E_F admet d'après la Proposition 3.8 au moins un point stationnaire u. La Proposition 3.1 dit qu'alors (U, f) donné par (1.5)–(1.7) est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (1.1) et (1.2), au sens faible et même au sens fort, et que u et ru' admettent des prolongements de classe C^1 à $\mathbb{R}_+$. La Proposition 3.5 assure de plus que (U, f) vérifie (1.3) et (1.4). $\square$

Preuve du Théorème 1.5. — F désigne un élément de $C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ vérifiant (1.9) et (1.10), de plus maintenant, pour tout $L \in \mathbb{R}$, $v \mapsto F(v, L)$ décroît sans s'annuler.

On montre que la fonctionnelle E_F est strictement convexe sur $\mathbb{H}$: Soient $u, v \in \mathbb{H}$, $u \neq v$, alors

$$\begin{aligned}(dE_F(u) - dE_F(v)).(u-v) = &\int_0^{+\infty} (\rho_F(r,U) - \rho_F(r,V))(u-v)\\ &+ \int_0^{+\infty} (u'-v')r(u'-v'),\end{aligned}$$

où $V = u_c + u_0 + v$.

D'une part la décroissance de la fonction F par rapport à la première variable assure que

$$\int_0^{+\infty} \left(\rho_F\left(r, U\left(r\right)\right) - \rho_F\left(r, V\left(r\right)\right)\right)\left(u - v\right)\left(r\right) dr \geqslant 0,$$

d'autre part $\int_0^{+\infty} \left(u' - v'\right) r \left(u' - v'\right) \geqslant 0$. Supposons cette quantité nulle. Les applications u et v diffèrent donc d'une constante non nulle. La décroissance, sans annulation, de F par rapport à la première variable assure alors que

$$\int_0^{+\infty} \left(\rho_F\left(r, U\left(r\right)\right) - \rho_F\left(r, V\left(r\right)\right)\right)\left(u - v\right)\left(r\right) dr > 0.$$

Dans tous les cas :

$$\left(dE_F\left(u\right) - dE_F\left(v\right)\right).\left(u - v\right) > 0,$$

ce qui assure la stricte convexité de E_F.

On sait que E_F atteint son minimum (Proposition 3.8). Sa stricte convexité assure, d'une part l'unicité de l'élément u de $\mathbb{H}$ où elle atteint son minimum et que, d'autre part, cet élément se *caractérise* par la nullité $dE_F(u)$.
D'où le Théorème 1.5. $\square$

Bibliographie

[1] Batt (J.), Faltenbacher (W.), Horst (E.). — Stationary spherically symmetric models in stellar dynamics, Archives for Rational Mechanics and Analysis 93, p.159-183 (1986).

[2] Batt (J.), Berestycki (H.), Degond (P.), Perthame (B.). — Some families of solutions of the Vlasov-Poisson system, Archives for Rational Mechanics and Analysis 104-1, Springer-Verlag, p. 205–210 (1988).

[3] Batt (J.), Rein (G.). — A rigorous stability result for the Vlasov-Poisson system in three dimensions, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 164, p. 133–154 (1993).

[4] Ben Abdallah (N.), Dolbeault (J.). — Relative entropies for kinetic equations in bounded domains, Cahiers du CEREMADE, 0133 (2001).

[5] Bernis (L.), Chaix (P.). — Étude mathémétique des solutions stationnaires des équations de Vlasov Poisson en symétrie cylindrique, Note CEA CEAB3/DRIF/DPTA/SPPE N98-50/DO.

[6] Bers (E.), Delacroix (J.L.). — Physique des plasmas t.2. Savoirs actuels, Interédition/CNRS Editions (1994).

[7] Braasch (P.), Rein (G.), Vukadinović (J.). — Nonlinear stability of stationary plasmas-an extension of the energy-Casimir method, SIAM J. Appl. Math. 59, p. 831–844 (1999).

[8] CACERES (M.J.), CARRILLO (J.A.), DOLBEAULT (J.). — Non linear stability in L^p for solutions of the Vlasov-Poisson system for charched particles. Cahiers du CEREMADE, 0131 (2001).

[9] CHAIX (P.). — Étude du Halo, Note CEA NT/PT/RFP 56/95.

[10] DOLBEAULT (J.). — Free energy and solutions of the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system : external potential and confinement (large time behavior and steady states), J. Math. Pures Appl. 78, p. 121–157 (1999).

[11] DOLBEAULT (J.). — Solutions stationnaires de masse finie pour l'équation de Vlasov avec potentiel central en dimension trois : une démonstration du théorème de Jeans, Actes du Workshop « Fondements mathématiques pour les équations de Vlasov et de Boltzmann », GDR Sparch (1994).

[12] DOLBEAULT (J.). — Monokinetic charged particle beams : qualitative behavior of the solutions of the Cauchy problem and 2d time-periodic solutions of the Vlasov-Poisson system, Comm. Partial Differential Equations 25 n°. 9-10, p. 1567–1647 (2000).

[13] KLEIN (H.). — Procedings of the Linear Accelerator Conference, LINAC-94, Tsukuba, 322.

[14] LAWRENCE (G.). — Proceedings of the Particle Accelerator Conference. PAC-95, Dallas, 35.

[15] LIONS (P.L.), PERTHAME (B.). — Régularité des solutions du système de Vlasov-Poisson en dimension 3, C.R Acad.Sci. Paris 311, série I, p. 205–210 (1990).

[16] LYNDEN-BELL (D.). — Stellar dynamics. Part I. Only isolating integrals should be used in Jeans theorem, Mon. Nat. Roy. Astron. Soc. 124 n° 1, p. 1-9 (1962), Part II. Potentials with isolating integrals, Mon. Nat. Roy. Astron. Soc. 124, n° 2, p. 95-123 (1962).

[17] PFAFFELMOSER (K.). — Global classical solutions of Vlasov-Poisson system in three dimensions for general initial data, J.Differential Equations 95, n°2, p. 281–303 (1992).

[18] SCHAEFFER (J.). — Global existence of smooth solutions to Vlasov-Poisson system in three dimensions, Comm. Partial Differential Equations 16, n°8-9, p. 1313–1335 (1991).

[19] REIN (G.). — Non-linear stability for the Vlasov-Poisson system—the energy-Casimir method, Math. Methods Appl. Sci. 17 , p. 1129–1140 (1994).