Sandra Delaunay

Approximation diophantienne et distances ultramétriques non standard

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 14, nº 4 (2005), p. 629-661

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_2005_6_14_4_629_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XV, n° 4, 2005
pp. 629–661

Approximation diophantienne et distances ultramétriques non standard[(*)]

SANDRA DELAUNAY [(1)]

RÉSUMÉ. — Le but de ce travail est la construction de nouveaux outils pour l'étude de l'approximation diophantienne. Il s'agit d'exprimer les propriétés d'approximation par des propriétés topologiques à l'aide de « distances » à valeurs non standard.

ABSTRACT. — The aim of this work is the construction of new tools to study diophantine approximation. We express the diophantine properties through topological ones with "distances" taking non standard values.

0. Introduction

Dans tout ce texte, Z désignera soit l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers, soit un anneau de polynômes $k[T]$ où k est un corps commutatif quelconque, Q désignera le corps des fractions de Z c'est-à-dire $\mathbb{Q}$ ou $k(T)$ et R désignera soit le corps des réels $\mathbb{R}$, soit le corps des séries formelles de Laurent en $1/T$, $k((1/T))$. Nous appellerons encore rationnels les éléments de Q.

Nous considérerons alors sur R les relations d'équivalence suivantes : Soient $(\alpha,\beta) \in R \times R$

1) $\alpha \sim_H \beta \iff \left(\exists (a,b,c,d) \in Z^4, |ad-bc| \neq 0 \text{ tels que } \beta = \dfrac{a\alpha+b}{c\alpha+d}\right)$, on note $QH_1(R) = R/\sim_H$.

2) $\alpha \sim_L \beta \iff \left(\exists (p,q) \in Z^* \times Z^* \text{ tels que } \beta = \dfrac{p}{q}\alpha\right)$, on note $QL_1(R) = R^*/\sim_L = \mathbb{P}_Q(R)$.

(*) Reçu le 14 mai 2004, accepté le 2 mai 2005

(1) Université de Lille 1, UFR de Mathématiques, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex (France).
E-mail : sandra.delaunay@math.univ-lille1.fr

Notre propos est de munir ces ensembles quotients de topologies uniformes permettant de rendre compte des approximations des éléments de R par ceux de Q. Ce point de vue nouveau sur l'approximation, reprenant les classifications de Mahler, est dû à Patrice Philippon et a été développé dans un article intitulé « *Classification de Mahler et distances locales* » ([PPH]), dans lequel il étudie l'espace KM_1, quotient de $\mathbb{C}$ par la relation d'équivalence suivante :

$$\alpha \sim \beta \Longleftrightarrow (\alpha \text{ est algébrique sur } \mathbb{Q}(\beta) \text{ et } \beta \text{ est algébrique sur } \mathbb{Q}(\alpha)).$$

Cette relation classifie les nombres complexes selon leur dépendance algébrique et nous développons ici l'analogue du travail de P. Philippon pour la dépendance linéaire et rationnelle.

Cette approche des problèmes d'approximation diophantienne par une traduction topologique est tout à fait nouvelle et pourrait fournir des outils originaux pour l'étude de l'irrationalité et de la transcendance. En particulier, on aimerait pouvoir caractériser topologiquement la nature des nombres et, par exemple, exprimer le degré de transcendance sur Q d'un sous-corps de C en termes d'invariants topologiques. En l'état actuel, on peut déjà réinterpréter sur les espaces QL_1 et KM_1 les résultats d'irrationalité et de transcendance, ainsi que les méthodes classiques de démonstration de ces résultats.

La généralisation des relations d'équivalence définies ci-dessus à des n-uplets et l'étude des ensembles QL_n et KM_n correspondants doivent permettre de traduire de la même façon les résultats d'indépendance linéaire et algébrique. Nous reviendrons sur la construction des espaces QL_n dans un prochain article. En effet, on s'attend à ce que ce soit l'étude des applications continues entre les différents espaces QL_n et KM_n qui fasse apparaitre des invariants topologiques significatifs pour la théorie des nombres transcendants.

Après avoir fait quelques rappels sur l'approximation et les fractions continues (§1.), nous commencerons par définir sur QL_1 un ordre d'approximation qui exprime par une valeur non standard la mesure d'irrationnalité infinie ou finie d'un élément de R, et nous en démontrerons les propriétés essentielles (§2.1.). Nous munirons alors QL_1 d'une « distance » ultramétrique, à valeurs non standard, puis nous étudierons la topologie uniforme induite par cette « distance ». Nous vérifierons, en construisant des exemples, que cette topologie n'est pas triviale (§2.2.). Dans le §3., nous étudions de même l'ensemble QH_1 et sa topologie. Certaines applications continues sont traitées rapidement dans le §4. Pour ne pas alourdir le texte, nous avons reporté en annexes une présentation sommaire des hyper-réels (§5., annexe 1), la définition et les propriétés des espaces Γ-hypermétriques (§6., annexe 2).

1. Fractions continues. Mesure d'irrationnalité

Nous munissons le corps Q d'une valeur absolue que nous noterons $|\ \ |$ et R est le complété de Q pour cette valeur absolue. Dans le cas de $\mathbb{R}$ il s'agit de la valeur absolue archimédienne usuelle, dans le cas de $k((1/T))$, il s'agit de la valeur absolue définie par le degré, pour $f = a_d T^d + \ldots + a_0 + a_{-1}/T + \ldots + a_{-n}/T^n + \ldots$ on a $|f| = |T|^d$, avec $|T| > 1$.

Soit $\xi \in R$, son développement en fractions continues fournit une suite p_n/q_n d'éléments de Q dite de meilleure approximation dans le sens où si $q' \in Q$ est tel que $|q'| < |q_n|$, alors pour tout $p' \in Z$, $|q'\xi - p'| > |q_n\xi - p_n|$.([VDP] pour le cas des séries formelles, [DES] pour le cas réel).

DÉFINITION 1.1. — *On appelle mesure d'irrationnalité de ξ, l'infimum des exposants λ pour lesquels il existe $c = c(\xi, \lambda)$ telle que*

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{|q|^\lambda}, \quad \forall (p,q) \in Z \times Z^*.$$

Dans le cas réel, le théorème de Roth nous dit que les nombres algébriques ont une mesure d'irrationnalité égale à 2. D'après un théorème de Kintchin, il en est de même pour «presque» tous les irrationnels ([CAS.]). Par contre, le théorème de Roth n'est plus vrai dans le cas de $k((1/T))$ lorsque k est de caractéristique finie non nulle([L.d.M]).

THÉORÈME DE ROTH. — *Soient α un nombre algébrique irrationnel et ε un réel, $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c = c(\alpha, \varepsilon)$, telle que*

$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^{2+\varepsilon}}.$$

Ce théorème montre que certains nombres très bien approchés par des rationnels sont transcendants, ce sont les nombres de Liouville. Par exemple : pour $a > 1$ entier

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} a^{-k!}.$$

En effet, en posant $q_k = a^{k!}$ et $p_k = \sum_{h=1}^{k} a^{k!-h!}$, on a

$$0 < x - \frac{p_k}{q_k} = \sum_{h=k+1}^{+\infty} a^{-h!} \leqslant a^{-(k+1)} \sum_{h=0}^{+\infty} a^h \leqslant \frac{2}{q_k^{k+1}} \leqslant \frac{1}{q_k^k}\ .$$

Nous allons, dans les paragraphes qui suivent, munir les ensembles quotients définis dans l'introduction, d'abord d'un ordre d'approximation puis d'une distance qui traduise ces propriétés d'approximation. Un élément très bien approché sera à une distance infiniment petite de $Q^* = \overline{1}$. Un élément « mal approché », par exemple un élément ayant une mesure d'irrationnalité finie, en sera « loin ». Notre distance va permettre de distinguer entre eux les éléments ayant des mesures d'irrationnalité infinies. En raffinant la méthode, on pourrait distinguer les mesures d'irrationnalité finies.

2. Approximation linéaire

2.1. Définition de l'ordre d'approximation

DÉFINITION 2.1. — *Soit $\alpha \in R \setminus Q$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit*

$$\mathcal{O}(n;\alpha) = \max_{\log|q|<n} -\log|\alpha q - p|\,.$$

Remarque. — Pour $\alpha \in Q$, on convient de noter $\mathcal{O}(n;\alpha) = +\infty$ pour n assez grand. C'est-à-dire que l'on ne tient pas compte des approximations de α par les rationnels distincts de lui-même.

On s'intéresse à la suite : $\left(\frac{\mathcal{O}(n;\alpha)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, en effet, pour p_n et q_n réalisant le max on a

$$\frac{-\log|q_n\alpha - p_n|}{\log|q_n|} > \frac{\mathcal{O}(n;\alpha)}{n}$$

d'où

$$|q_n\alpha - p_n| < |q_n|^{\frac{-\mathcal{O}(n;\alpha)}{n}}.$$

On pourrait définir l'ordre d'approximation en considérant la limite supérieure de cette suite mais, cela ne permettrait pas de distinguer les nombres de Liouville des rationnels, ni les nombres de Liouville entre eux. Si par contre, on considère toute la suite, ce qui nous fournit le maximum de renseignements sur les approximations, on ne pourra pas écrire une « bonne » définition ; c'est-à-dire qui ne dépende pas de l'élément choisi dans les différentes classes d'équivalence et qui vérifie une inégalité ultramétrique. Comme il nous faut voir « à la loupe » ce qui se passe au voisinage de $Q^* = \overline{1}$, nous allons étoffer l'ensemble des valeurs prises autour de *zéro*, ceci en travaillant dans $^*\mathbb{R}$ l'ensemble des hyperréels. C'est d'ailleurs d'un quotient de $^*\mathbb{R}$ dont nous aurons besoin. (*cf.* annexe 1 pour la définition de $^*\mathbb{R}$).

Si $\mathcal{A}^*$ est l'ensemble des hyperréels limités d'inverse limité (dits hyperréels appréciables), on pose

$$\Gamma = ({}^*\mathbb{R}_+)^*/\mathcal{A}^*_+.$$

Γ est donc un groupe multiplicatif contenant : des infiniment petits (à constantes de $\mathcal{A}^*_+$ près), 1 auquel s'identifient tous les éléments de $\mathcal{A}^*_+$ et des infiniment grands (à constantes de $\mathcal{A}^*_+$ près). (La structure de Γ est étudiée en annexe 1)

On note ω la classe dans ${}^*\mathbb{R}$ de la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $k\omega$ est la classe de la suite $(kn)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On note $\mathcal{O}_\omega(\alpha)$ la classe dans ${}^*\mathbb{R}$ de la suite $(\mathcal{O}(n;\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\frac{\mathcal{O}_\omega(\alpha)}{\omega}$ la classe dans ${}^*\mathbb{R}$ de la suite $\left(\frac{\mathcal{O}(n;\alpha)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On notera par ailleurs $\langle\mathcal{O}_\omega(\alpha)\rangle$ la classe de $\mathcal{O}_\omega(\alpha)$ dans Γ.

LEMME PRINCIPAL. — *Pour $\alpha \in R \setminus Q$, on a*

1) $\left\langle \frac{\mathcal{O}_\omega(\alpha)}{\omega} \right\rangle \geqslant 1$ *dans* Γ

2) Si $n_1 \leqslant n_2$ sont deux entiers positifs alors, dans ${}^*\mathbb{R}$,

ou bien $\mathcal{O}_{n_2\omega}(\alpha) = \mathcal{O}_{n_1\omega}(\alpha)$

ou bien $\mathcal{O}_{n_1\omega}(\alpha) \leqslant n_2\omega + \log 2$

Ce qui se traduit dans Γ par :

$$\langle\mathcal{O}_{n_2\omega}(\alpha)\rangle = \langle\mathcal{O}_{n_1\omega}(\alpha)\rangle \quad \text{ou} \quad \left\langle \frac{\mathcal{O}_{n_1\omega}(\alpha)}{\omega} \right\rangle = 1.$$

Démonstration. —

1) Par définition, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{O}(n;\alpha) = \max_{\log|q|<n} -\log|\alpha q - p| = -\log|\alpha q_{r_n} - p_{r_n}|,$$

p_{r_n}/q_{r_n} est une réduite de α et on notera p_{r_n+1}/q_{r_n+1} la réduite suivante.

On a $e^n < q_{r_n+1}$ donc,

$$|\alpha q_{r_n} - p_{r_n}| \leqslant \frac{1}{|q_{r_n+1}|}$$

implique

$$\frac{-\log|\alpha q_{r_n} - p_{r_n}|}{n} \geqslant \frac{\log|q_{r_n+1}|}{n} \geqslant 1.$$

Ce qui prouve que, dans Γ , on a bien $\left\langle \frac{\mathcal{O}_\omega(\alpha)}{\omega} \right\rangle \geqslant 1$.

2) $\mathcal{O}_{n_2\omega}(\alpha) = (\mathcal{O}(n_2 n;\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans ${}^*\mathbb{R}$. Mais, par définition, on a

$$\mathcal{O}(n_2 n;\alpha) = \max_{\log|q|<n_2 n} -\log|\alpha q - p|$$

alors, si $n_2 \geqslant n_1$, pour tout n : $\mathcal{O}(n_2 n;\alpha) \geqslant \mathcal{O}(n_1 n;\alpha)$ et donc $\mathcal{O}_{n_2\omega}(\alpha) \geqslant \mathcal{O}_{n_1\omega}(\alpha)$.

Considérons alors l'ensemble

$$E = \{n \in \mathbb{N}/ \quad \mathcal{O}(n_1 n;\alpha) = \mathcal{O}(n_2 n;\alpha)\}.$$

Soit $\mathcal{U}$, l'ultrafiltre définissant ${}^*\mathbb{R}$, (cf.Annexe 1), ou bien $E \in \mathcal{U}$ et, par définition $\mathcal{O}_{n_1\omega}(\alpha) = \mathcal{O}_{n_2\omega}(\alpha)$, ou bien $E \notin \mathcal{U}$ mais, comme $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre, $\overline{E} \in \mathcal{U}$ or

$$\overline{E} = \{n \in \mathbb{N}/ \quad \mathcal{O}(n_1 n;\alpha) < \mathcal{O}(n_2 n;\alpha)\},$$

donc, pour tout $n \in \overline{E}$, on a

$$\max_{\log|q|\leqslant n_1 n} -\log|\alpha q - p| < \max_{\log|q|\leqslant n_2 n} -\log|\alpha q - p|.$$

Soient p_1, q_1, p_2, q_2 réalisant ces maximums (respectivement). Comme ce sont des réduites distinctes, $(p_1, q_1) = 1$ et $(p_2, q_2) = 1$ et on a l'inégalité

$$|\alpha q_1 - p_1| > |\alpha q_2 - p_2|.$$

Or

$$\underbrace{|q_2(\alpha q_1 - p_1) - q_1(\alpha q_2 - p_2)|}_{|q_1 p_2 - p_1 q_2|} \leqslant q_2|\alpha q_1 - p_1| + q_1|\alpha q_2 - p_2|,$$

d'où l'encadrement

$$1 \leqslant |q_1 p_2 - p_1 q_2| \leqslant (q_1 + q_2)|\alpha q_1 - p_1|.$$

Ainsi, pour tout $n \in \overline{E}$ on a

$$1 \leqslant 2e^{n_2 n}|\alpha q_1 - p_1|.$$

Ce qui nous donne en prenant les logarithmes

$$0 \leqslant \log 2 + n_2 n + \log |\alpha q_1 - p_1| .$$

C'est-à-dire

$$\mathcal{O}(n_1 n; \alpha) \leqslant n_2 n + \log 2 \quad \forall n \in \overline{E}$$

d'où

$$\mathcal{O}_{n_1 \omega}(\alpha) \leqslant n_2 \omega + \log 2 \quad \text{dans } {}^*\mathbb{R},$$

et donc, en divisant par ω, on obtient dans Γ

$$\left\langle \frac{\mathcal{O}_{n_1 \omega}(\alpha)}{\omega} \right\rangle \leqslant 1 \text{ car } n_2 + \frac{\log 2}{\omega} \in \mathcal{A}^*.$$

Ce lemme étant démontré, on donne alors la définition suivante :

DÉFINITION 2.2. — *Pour $\alpha \in R \setminus Q$, on pose*

$$\rho(\alpha) = \max \left\{ \left\langle \frac{\mathcal{O}_{k\omega}(\alpha)}{\omega} \right\rangle \ , \quad k \in \mathbb{N}^* \right\}$$

dans Γ. Si $\alpha \in Q$, alors, on pose : $\rho(\alpha) = +\infty$.

Le lemme permet d'affirmer que ce maximum existe bien, en effet

ou bien, dans Γ, on a $\left\langle \frac{\mathcal{O}_{k\omega}(\alpha)}{\omega} \right\rangle = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et, dans ce cas $\rho(\alpha) = 1$.

ou bien, il existe $k_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left\langle \frac{\mathcal{O}_{k_1 \omega}(\alpha)}{\omega} \right\rangle > 1$, alors, d'après le lemme, pour tout $k \geqslant k_1$, on a

$$\left\langle \frac{\mathcal{O}_{k\omega}(\alpha)}{\omega} \right\rangle = \left\langle \frac{\mathcal{O}_{k_1 \omega}(\alpha)}{\omega} \right\rangle$$

et il suffit de prendre le plus petit k tel que $\left\langle \frac{\mathcal{O}_{k\omega}(\alpha)}{\omega} \right\rangle > 1$, et, $\rho(\alpha) = \left\langle \frac{\mathcal{O}_{k\omega}(\alpha)}{\omega} \right\rangle$ pour ce k.

Nous allons montrer que cette définition ne dépend que la classe d'équivalence de α dans $QH_1(R)$ que nous noterons par la même lettre que l'élément de R^*.

PROPOSITION 2.1. — *Soient α et β des éléments de $R \setminus Q$. On suppose qu'il existe $(a, b, c, d) \in Z^4, |ad - bc| \neq 0$ tels que $\beta = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}$, on a alors $\rho(\alpha) = \rho(\beta)$.*

Démonstration. — On suppose $\beta = \dfrac{a\alpha + b}{c\alpha + d}$, d'où

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}(n;\beta) &= \max_{\log|q|<n} -\log|\beta q - p| \\
&= \max_{\log|q|<n} -\log|q\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d} - p| \\
&= \max_{\log|q|<n} -\log|q(a\alpha+b) - p(c\alpha+d)| + \log|c\alpha+d| \\
&= \max_{\log|q|<n} -\log|(qa-pc)\alpha + (qb-pd)| + \log|c\alpha+d|
\end{aligned}$$

Or, d'une part, $\log|c\alpha + d| = C_1$, où $C_1 = C_1(\alpha, c, d)$ est une constante qui ne dépend pas de n. D'autre part, on peut écrire les majorations suivantes :

$$|qa - pc| \leqslant C_2 e^n \text{ et } |qb - pd| \leqslant C_3 e^n,$$

où C_2 et C_3 sont également des constantes. On a donc, pour n assez grand

$$\log|qa - pc| \leqslant 2n \text{ et } \log|qb - pd| \leqslant 2n.$$

Ce qui montre que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a dans Γ

$$\left\langle \frac{\mathcal{O}_{k\omega}(\beta)}{\omega} \right\rangle \leqslant \left\langle \frac{\mathcal{O}_{2k\omega}(\alpha)}{\omega} \right\rangle \quad \text{et} \quad \rho(\beta) \leqslant \rho(\alpha).$$

Mais, comme on montre de même l'inégalité dans l'autre sens, on a l'égalité $\rho(\alpha) = \rho(\beta)$.

Ainsi l'élément $\rho(\alpha)$ de Γ ne dépend que de la classe de α dans $QH_1(R)$ et l'application ρ est bien définie sur les quotients $QL_1(R)$ et $QH_1(R)$. Nous démontrons également les propriétés suivantes

PROPOSITION 2.2. — *Soient α et β des éléments de R, on a*

1) $\rho(\alpha\beta) \geqslant \min(\rho(\alpha), \rho(\beta))$.

2) $\rho(\alpha + \beta) \geqslant \min(\rho(\alpha), \rho(\beta))$.

Démonstration. —

1) On montre que

$$\forall \alpha, \beta \in R, \quad \rho(\alpha\beta) \geqslant \min(\rho(\alpha), \rho(\beta)).$$

Soient k_1, k_2 deux entiers positifs, α, β deux éléments non nuls de R. Si $\rho(\alpha)$ ou $\rho(\beta) = 1$, l'inégalité résulte du lemme principal. Supposons donc $\rho(\alpha)$ et $\rho(\beta) > 1$.

Par définition, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathcal{O}(k_1 n;\alpha) = \max_{\log|q|<k_1 n} -\log|\alpha q - p| = -\log|\alpha q_1 - p_1|$$

et

$$\mathcal{O}(k_2 n;\beta) = \max_{\log|q|<k_2 n} -\log|\beta q - p| = -\log|\beta q_2 - p_2|\,.$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} |\alpha\beta q_1 q_2 - p_1 p_2| &= |\alpha q_1(\beta q_2 - p_2) + p_2(\alpha q_1 - p_1)| \\ &\leqslant |\alpha q_1||\beta q_2 - p_2| + |p_2||\alpha q_1 - p_1| \\ &\leqslant \max(|\alpha q_1|,|p_2|)\max(|\alpha q_1 - p_1|,|\beta q_2 - p_2|). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} -\log|\alpha\beta q_1 q_2 - p_1 p_2| \geqslant& -\log(\max(|\alpha q_1|,|p_2|)) \\ &+ \min(-\log|\alpha q_1 - p_1|, -\log|\beta q_2 - p_2|). \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{O}\left((k_1+k_2)n;\alpha\beta\right)}{n} \geqslant& \min\left(\frac{\mathcal{O}(k_1 n;\alpha)}{n}, \frac{\mathcal{O}(k_2 n;\beta)}{n}\right) \\ &+ \min\left(-\frac{\log|\alpha|}{n} - \frac{\log|q_1|}{n}, -\frac{\log|p_2|}{n}\right). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} |p_2| &\leqslant |\beta q_2 - p_2 + \beta q_2| \\ &\leqslant |\beta q_2 - p_2| + |\beta q_2| \\ &\leqslant 1 + |\beta q_2| \\ &\leqslant (1+\beta)|q_2|. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{O}\left((k_1+k_2)n;\alpha\beta\right)}{n} \geqslant& \min\left(\frac{\mathcal{O}(k_1 n;\alpha)}{n}, \frac{\mathcal{O}(k_2 n;\beta)}{n}\right) \\ &+ \min\left(-\frac{\log|\alpha|}{n} - k_1, -\frac{\log(1+|\beta|)}{n} - k_2\right) \end{aligned}$$

On a, dans $^*\mathbb{R}$

$$\frac{\mathcal{O}_{(k_1+k_2)\omega}(\alpha\beta)}{\omega} \geqslant \min\left(\frac{\mathcal{O}_{k_1\omega}(\alpha)}{\omega}, \frac{\mathcal{O}_{k_2\omega}(\beta)}{\omega}\right) - \max(k_1, k_2) - \varepsilon$$

où ε est un infiniment petit. Cette inégalité est vraie pour tout k_1 et k_2, elle est donc vraie en particulier pour les entiers réalisant le maximum dans la définition de $\rho(\alpha)$ et $\rho(\beta)$ (resp.). Comme $\rho(\alpha)$ et $\rho(\beta) > 1$, on a dans Γ

$$\rho(\alpha\beta) \geqslant \min(\rho(\alpha), \rho(\beta)).$$

2) On montre que

$$\forall \alpha, \beta \in R^*, \quad \rho(\alpha+\beta) \geqslant \min(\rho(\alpha), \rho(\beta)).$$

Or

$$\rho(\alpha+\beta) = \rho\left(\alpha\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\right) \geqslant \min\left(\rho(\alpha), \rho\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\right).$$

Mais, d'après la proposition 2.1,

$$\rho\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right) = \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Donc

$$\rho(\alpha+\beta) \geqslant \min\left(\rho(\alpha), \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\right) \geqslant \min(\rho(\alpha), \rho(\beta)).$$

Car, d'après la proposition 2.1, 1,

$$\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \geqslant \min(\rho(\alpha), \rho(\beta)).$$

D'où

$$\rho(\alpha+\beta) \geqslant \min(\rho(\alpha), \rho(\beta)).$$

Ce qui achève de démontrer les propriétés de ρ.

Remarque. — Si α a une mesure d'irrationalité finie, alors, $\frac{\mathcal{O}(n;\alpha)}{n}$ est fini et, donc, $\rho(\alpha) = 1$. Mais, il peut arriver, en raison du choix de l'ultrafiltre qui définit $^*\mathbb{R}$, que $\rho(\alpha) = 1$ pour un α dont la mesure d'irrationnalité est infinie. Il suffit que l'ultrafiltre ne contienne pas les entiers naturels n qui correspondent aux très bonnes approximations de α. Toutefois, si α a une mesure d'irrationnalité infinie, il existe un ultrafiltre qui définit un $^*\mathbb{R}$ (et donc un Γ) tel que $\rho(\alpha)$ soit un infiniment grand.

Nous allons maintenant, pour chacun des ensembles quotients définis dans l'introduction, définir une distance à valeurs non standard et étudier les topologies uniformes ainsi définies.

2.2. Distance non standard et topologie sur $QL_1(R)$

D'après la proposition 1.1, l'application ρ est bien définie sur $QL_1(R)$ et permet alors de munir cet ensemble d'une « distance » à valeurs non standard de la manière suivante :

DÉFINITION 2.3. — *Pour α et β dans $QL_1(R)$ on pose*

$d_L(\alpha, 1) = \frac{1}{\rho(\alpha)}$

et

$d_L(\alpha, \beta) = d_L\left(\frac{\alpha}{\beta}, 1\right) = \frac{1}{\rho(\frac{\alpha}{\beta})}$

Cette application d_L, dont il convient de noter qu'elle dépend du choix de l'ultrafiltre définissant $^*\mathbb{R}$, est à valeur dans $\Gamma \cup \{0\}$ et 1 désigne la classe de Q^*.

PROPOSITION 2.3. — *L'application de $QL_1(R) \times QL_1(R)$ à valeurs dans $\Gamma \cup \{0\}$, notée d_L, vérifie les propriétés suivantes : pour α, β, et γ dans $QL_1(R)$ on a*

1) $d_L(\alpha, \beta) = 0 \iff \alpha = \beta$,

2) $d_L(\alpha, \beta) = d_L(\beta, \alpha)$,

3) $d_L(\alpha, \beta) \leqslant \max\left(d_L(\alpha, \gamma), d_L(\gamma, \beta)\right)$.

Démonstration. —

1) Par définition : $d_L(\alpha, \beta) = d_L\left(\frac{\alpha}{\beta}, 1\right) = \frac{1}{\rho(\frac{\alpha}{\beta})}$ et, pour $\alpha \in R^*$, $\rho(\alpha) = +\infty \iff \alpha = Q^*$.

2) Évident, car pour $\alpha \in R$, on a $\rho(\alpha) = \rho\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

3) Compte tenu des définitions, l'inégalité ultramétrique découle directement de la proposition 2.2.

Topologie uniforme sur $QL_1(R)$

La distance que nous venons de définir munit l'ensemble $QL_1(R)$, d'une structure uniforme, et l'on considère sur $QL_1(R)$ la topologie déduite de cette structure uniforme ([BBK]).

Pour tout $\varepsilon \in \Gamma$ on note V_ε l'ensemble suivant

$$V_\varepsilon = \{(\alpha,\beta) \in QL_1(R) \times QL_1(R) \ / \ d_L(\alpha,\beta) < \varepsilon\}$$

L'ensemble $\mathcal{E} = \{V_\varepsilon;\ \varepsilon \in \Gamma\}$ est un système fondamental d'entourages. On notera que les ensembles

$$\{V_{1/\overline{N}},\ N \in {}^*\mathbb{N}\},$$

($1/\overline{N}$ étant l'image dans Γ de $1/N$), forment également un système fondamental d'entourages.

Soit $\alpha \in QL_1(R)$, pour $\varepsilon \in \Gamma$, on note

$$V_\varepsilon(\alpha) = \{\beta \in QL_1(R) \ / \ d_L(\alpha,\beta) < \varepsilon\}$$

et

$$\mathcal{B}(\alpha) = \{V_\varepsilon(\alpha),\ \varepsilon \in \Gamma\}.$$

Il existe une unique topologie telle que pour tout α dans $QL_1(R)$, $\mathcal{B}(\alpha)$ soit le filtre des voisinages de α ; c'est la topologie déduite de la structure uniforme.

PROPOSITION 2.4. — *La topologie ainsi définie n'est pas triviale.*

Démonstration. — Nous allons démontrer que pour tout $\varepsilon \in \Gamma$, ε infiniment petit, il existe $\alpha \in QL_1(R)$, $\alpha \neq 1$, tel que $d(\alpha, 1) \leqslant \varepsilon$.

Soit $\varepsilon \in \Gamma$, $\varepsilon = \langle \varepsilon_\omega \rangle$, $\varepsilon_\omega \in {}^*\mathbb{R}$, et ε_ω est la classe d'une suite de réels $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que nous pouvons choisir décroissante. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers non nuls, pour $j \in \mathbb{N}$, on pose

$$\psi_j = \sum_{k=0}^{2j} a_k \quad \text{et} \quad \psi'_j = \sum_{k=0}^{2j+1} a_k.$$

On définit alors

$$\alpha = \sum_{j=0}^{+\infty} t^{-\psi_j} \quad \text{et} \quad \alpha' = \sum_{j=0}^{+\infty} t^{-\psi'_j},$$

où l'on prend $t = 10$ dans le cas réel et $t = T$ dans le cas de $k((1/T))$. Nous allons montrer que l'on peut construire par récurrence une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, ou bien α, ou bien α' soit dans la boule de centre 1 et de rayon ε de $QL_1(R)$. On considère les ensembles

$$E = \bigcup_{j=0}^{+\infty} [\psi_j \log|t|, \psi'_j \log|t|[\cap \mathbb{N} \quad \text{et} \quad E' = \bigcup_{j=0}^{+\infty} [\psi'_j \log|t|, \psi_{j+1} \log|t|[\cap \mathbb{N},$$

par construction, on a $E \cap E' = \emptyset$ et, comme $\mathbb{N} \setminus (E \cup E')$ est fini, ou bien E, ou bien E' est dans l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ définissant ${}^*\mathbb{R}$.

Soit $j \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in [\psi_j \log|t|, \psi'_j \log|t|[$, il existe $q_n = |t|^{\psi_j}$ et p_n tels que $\log q_n = \psi_j \log|t| \leqslant n$, et

$$|q_n\alpha - p_n| \leqslant \frac{2}{|t|^{\psi_{j+1}-\psi_j}} = \frac{2}{|t|^{a_{2j+2}+a_{2j+1}}} .$$

On a donc, pour tout $n \in [\psi_j \log|t|, \psi'_j \log|t|[$

$$-\frac{\log|q_n\alpha - p_n|}{n} \geqslant \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{\psi'_j}.$$

De même, pour tout $n \in [\psi'_j \log|t|, \psi_{j+1} \log|t|[$, il existe $q'_n = t^{\psi'_j}$ et p'_n tels que $\log q'_n = \psi'_j \log t \leqslant n$, et

$$|q'_n\alpha' - p'_n| \leqslant \frac{2}{|t|^{\psi'_{j+1}-\psi'_j}} = \frac{2}{|t|^{a_{2j+3}+a_{2j+2}}} .$$

On a donc, pour tout $n \in [\psi'_j \log|t|, \psi_{j+1} \log|t|[$

$$-\frac{\log|q'_n\alpha' - p'_n|}{n} \geqslant \frac{\psi'_{j+1} - \psi'_j}{\psi_{j+1}}.$$

Ainsi, en prenant pour n'_j la partie entière de $\psi'_j \log|t|$ et pour n_{j+1} celle de $\psi_{j+1} \log|t|$, compte tenu de la décroissance de la suite ε_n, on impose

$$\frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{\psi'_j} \geqslant \frac{1}{\varepsilon_{n'_j}} \quad \text{et} \quad \frac{\psi'_{j+1} - \psi'_j}{\psi_{j+1}} \geqslant \frac{1}{\varepsilon_{n_{j+1}}}.$$

Donc, pour $n \in [\psi_j \log|t|, \psi'_j \log|t|[$, on a

$$\frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{\psi'_j} \geqslant \frac{1}{\varepsilon_{n'_j}} \geqslant \frac{1}{\varepsilon_n} ,$$

et pour $n \in [\psi'_j \log|t|, \psi_{j+1} \log|t|[$ on a

$$\frac{\psi'_{j+1} - \psi'_j}{\psi_{j+1}} \geqslant \frac{1}{\varepsilon_{n_{j+1}}} \geqslant \frac{1}{\varepsilon_n}$$

Ainsi, en posant A'_j = partie entière de $1/\varepsilon_{n'_j}$ et A_{j+1} = partie entière de $1/\varepsilon_{n_{j+1}}$, on impose

$$\begin{aligned} a_{2j+2} &= A'_j(a_0 + a_1 + \cdots a_{2j+1}) - a_{2j+1} \\ \text{et} \quad a_{2j+3} &= A_{j+1}(a_0 + a_1 + \cdots a_{2j+2}) - a_{2j+2} \ , \end{aligned}$$

et, ces relations définissent, par le choix de a_0 et a_1 une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à partir de laquelle on définit α et α'. Sachant que E ou E' est dans l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ définissant ${}^*\mathbb{R}$, alors, si $E \in \mathcal{U}$, on a

$$E \subset \left\{ n \in \mathbb{N} / \ \exists q_n, p_n / \ \log|q_n| \leqslant n \text{ et } -\frac{\log|q_n\alpha - p_n|}{n} \geqslant \frac{1}{\varepsilon_n} \right\} \in \mathcal{U} \ ,$$

ce qui prouve que

$$\left\{ n \in \mathbb{N} / \ \frac{\mathcal{O}(n;\alpha)}{n} \geqslant \frac{1}{\varepsilon_n} \right\} \in \mathcal{U} \ ,$$

d'où

$$\frac{\mathcal{O}_\omega(\alpha)}{\omega} \geqslant \frac{1}{\varepsilon_\omega} \quad \text{et, donc} \quad \max\left\{ \left\langle \frac{\mathcal{O}_{k\omega}(\alpha)}{\omega} \right\rangle, k \in \mathbb{N} \right\} \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \ ,$$

c'est-à-dire

$$d(\alpha, 1) \leqslant \varepsilon.$$

Si $E' \in \mathcal{U}$, alors, de la même manière on a $d(\alpha', 1) \leqslant \varepsilon$, la topologie que nous avons définie n'est donc pas triviale.

3. Approximation rationnelle

De même que nous venons de munir l'ensemble $QL_1(R)$ d'une topologie définie à partir d'une « distance » non standard, nous allons maintenant munir l'ensemble $QH_1(R)$ d'une topologie analogue et, pour cela, nous commençons par définir un ordre d'approximation mutuelle.

3.1. Définition de l'ordre d'approximation

DÉFINITION 3.1. — *Notons*

$$Z^4(n) = \{(a,b,c,d) \in Z^4, \ \max(\log|a|, \log|c|, \log|d|) \leqslant n, |ad - bc| \neq 0\}.$$

Soient α et $\beta \in R$, $n \in \mathbb{N}$, on définit l'ordre d'approximation rationnelle mutuelle de la manière suivante :

$$\mathcal{O}_H(n;\alpha,\beta) = \max_{(a,b,c,d)\in Z^4(n)} -\log|c\alpha\beta + d\beta - a\alpha - b|.$$

Pour $\alpha \sim_H \beta$ on convient de noter $\mathcal{O}_H(n;\alpha,\beta) = +\infty$ pour n suffisamment grand.

Il s'agit maintenant de définir un $\rho_H(\alpha,\beta)$ qui ne dépende pas des représentants choisis dans les classes d'équivalence modulo $\sim_H$ et tel que pour tout α, on ait $\rho_H(\alpha,1) = \rho(\alpha)$.

Comme précédemment, on note $\mathcal{O}_{H,\omega}(\alpha,\beta)$ la classe dans ${}^*\mathbb{R}$ de la suite $(\mathcal{O}_H(n;\alpha,\beta))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\langle\mathcal{O}_{H,\omega}(\alpha,\beta)\rangle$ la classe de $\mathcal{O}_{H,\omega}(\alpha,\beta)$ dans Γ.

DÉFINITION 3.2. — *Pour α et β non équivalents modulo H, on pose*

$$\rho_H(\alpha,\beta) = \max\left\{\left\langle\frac{\mathcal{O}_{H,k\omega}(\alpha,\beta)}{\omega}\right\rangle,\ k\in\mathbb{N}^*\right\}$$

dans Γ.

L'existence d'un tel maximum est assurée par le lemme suivant :

LEMME. — *Soient α et β dans R tels que α et β non équivalents modulo H, on a les propriétés suivantes :*

1) $\left\langle\dfrac{\mathcal{O}_{H,\omega}(\alpha,\beta)}{\omega}\right\rangle \geqslant 1$ *dans Γ.*

2) Si $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3$ sont trois entiers positifs, alors, dans ${}^*\mathbb{R}$, on a

ou bien $\mathcal{O}_{H,n_2\omega}(\alpha,\beta) = \mathcal{O}_{H,n_3\omega}(\alpha,\beta)$,

ou bien $\mathcal{O}_{H,n_2\omega}(\alpha,\beta) \leqslant 2\mathcal{O}_{H,n_1\omega}(\alpha,\beta) + C\omega n_3$,

ou bien $\mathcal{O}_{H,n_1\omega}(\alpha,\beta) \leqslant Bn_3\omega + A$

avec $C = 18, A = \log[4608(|\alpha|+1)], B = 9$.

Ainsi, dans Γ, si $\left\langle\dfrac{\mathcal{O}_{H,n_1\omega}(\alpha,\beta)}{\omega}\right\rangle > 1$ alors, ou bien

$$\left\langle\frac{\mathcal{O}_{H,n_2\omega}(\alpha,\beta)}{\omega}\right\rangle = \left\langle\frac{\mathcal{O}_{H,n_1\omega}(\alpha,\beta)}{\omega}\right\rangle$$

(car $\mathcal{O}_{H,n_1\omega}(\alpha,\beta) \leqslant \mathcal{O}_{H,n_2\omega}(\alpha,\beta)$) ou bien

$$\left\langle\frac{\mathcal{O}_{H,n_2\omega}(\alpha,\beta)}{\omega}\right\rangle = \left\langle\frac{\mathcal{O}_{H,n_3\omega}(\alpha,\beta)}{\omega}\right\rangle.$$

Considérons alors l'ensemble

$$\left\{\left\langle\frac{\mathcal{O}_{H,k\omega}(\alpha,\beta)}{\omega}\right\rangle,\ k\in\mathbb{N}^*\right\}$$

si, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\left\langle\frac{\mathcal{O}_{H,k\omega}(\alpha,\beta)}{\omega}\right\rangle=1$, alors $\rho_H(\alpha,\beta)=1$ sinon, il existe n_1 tel que $\left\langle\frac{\mathcal{O}_{H,n_1\omega}(\alpha,\beta)}{\omega}\right\rangle>1$, alors, ou bien $\forall n\geqslant n_1$ $\left\langle\frac{\mathcal{O}_{H,n\omega}(\alpha,\beta)}{\omega}\right\rangle=\left\langle\frac{\mathcal{O}_{H,n_1\omega}(\alpha,\beta)}{\omega}\right\rangle=\rho_H(\alpha,\beta)$ sinon il existe n_2 tel que $\left\langle\frac{\mathcal{O}_{H,n_2\omega}(\alpha,\beta)}{\omega}\right\rangle>\left\langle\frac{\mathcal{O}_{H,n_1\omega}(\alpha,\beta)}{\omega}\right\rangle$ mais alors, $\forall n\geqslant n_2$ $\left\langle\frac{\mathcal{O}_{H,n\omega}(\alpha,\beta)}{\omega}\right\rangle=\left\langle\frac{\mathcal{O}_{H,n_2\omega}(\alpha,\beta)}{\omega}\right\rangle=\rho_H(\alpha,\beta)$ d'où l'existence de $\rho_H(\alpha,\beta)$ dans tous les cas.

Démonstration. —

1) Soient α et β non équivalents modulo H, $n\in\mathbb{N}$. Par définition,

$$\mathcal{O}_H(n;\alpha,\beta)=\max_{(a,b,c,d)\in Z^4(n)}-\log|c\alpha\beta+d\beta-a\alpha-b|\geqslant\max_{\log|q|<n}-\log|q\alpha\beta-p|.$$

C'est-à-dire

$$\mathcal{O}_H(n;\alpha,\beta)\geqslant\mathcal{O}(n,\alpha\beta).$$

Ce qui prouve que, pour tout n, on a

$$\frac{\mathcal{O}_H(n;\alpha,\beta)}{n}\geqslant\frac{\mathcal{O}(n,\alpha\beta)}{n}\geqslant 1\ .$$

Ainsi, dans Γ, on a :

$$\left\langle\frac{\mathcal{O}_{H,\omega}(\alpha,\beta)}{\omega}\right\rangle\geqslant 1\ .$$

2) Soient $n_1\leqslant n_2\leqslant n_3$, trois entiers positifs et $\mathcal{U}$ l'ultrafiltre définissant ${}^*\mathbb{R}$. Notons

$$E=\{n\in\mathbb{N}/\mathcal{O}_H(n_2n;\alpha,\beta)=\mathcal{O}_H(n_3n;\alpha,\beta)$$

$$\text{ou bien}\quad\mathcal{O}_H(n_2n;\alpha,\beta)\leqslant 2\mathcal{O}_H(n_1n;\alpha,\beta)+Cnn_3\}.$$

Si $E\in\mathcal{U}$, on est dans l'un des deux premiers cas, sinon, en raison de la propriété des ultrafiltres, $\overline{E}\in\mathcal{U}$. Pour $n\in\overline{E}$, on a donc

$$\mathcal{O}_H(n_2n;\alpha,\beta)<\mathcal{O}_H(n_3n;\alpha,\beta)$$

et

$$\mathcal{O}_H(n_2n;\alpha,\beta)>2\mathcal{O}_H(n_1n;\alpha,\beta)+Cnn_3.$$

Soit $n \in \overline{E}$, on omet les indices n et on note a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2 et a_3, b_3, c_3, d_3 les éléments de Z réalisant les maximums dans les définitions de $\mathcal{O}_H(n_1 n; \alpha, \beta)$, $\mathcal{O}_H(n_2 n; \alpha, \beta)$ et $\mathcal{O}_H(n_3 n; \alpha, \beta)$. On a

$$\begin{aligned} -\log|c_3\alpha\beta + d_3\beta - a_3\alpha - b_3| &> -\log|c_2\alpha\beta + d_2\beta - a_2\alpha - b_2| \\ &> -2\log|c_1\alpha\beta + d_1\beta - a_1\alpha - b_1| + Cn_3 n. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$|c_3\alpha\beta+d_3\beta-a_3\alpha-b_3| < |c_2\alpha\beta+d_2\beta-a_2\alpha-b_2| < e^{-Cnn_3}|c_1\alpha\beta+d_1\beta-a_1\alpha-b_1|^2. \tag{3.1}$$

Notons, pour $i = 1, 2, 3$: $\phi_i = \phi_i(\alpha, \beta) = c_i\alpha\beta + d_i\beta - a_i\alpha - b_i$, et

$$Q_1(\alpha) = (c_2\alpha+d_2)\phi_3-(c_3\alpha+d_3)\phi_2 = (c_3\alpha+d_3)(a_2\alpha+b_2)-(c_2\alpha+d_2)(a_3\alpha+b_3).$$

$$Q_2(\alpha) = (c_3\alpha+d_3)\phi_1-(c_1\alpha+d_1)\phi_3 = (c_1\alpha+d_1)(a_3\alpha+b_3)-(c_3\alpha+d_3)(a_1\alpha+b_1).$$

Vérifions que ces polynômes ne peuvent pas être identiquement nuls. Par exemple

$$\begin{aligned} Q_1 \equiv 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} c_3a_2 - c_2a_3 = 0 \\ c_3b_2 - c_2b_3 + d_3a_2 - d_2a_3 = 0 \\ d_3b_2 - d_2b_3 = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists k \in Q, \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En effet

$$c_3a_2 - c_2a_3 = 0 \Longleftrightarrow \exists k_1 \in Q, \begin{pmatrix} a_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

et

$$d_3b_2 - d_2b_3 = 0 \Longleftrightarrow \exists k_2 \in Q, \begin{pmatrix} b_3 \\ d_3 \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} b_2 \\ d_2 \end{pmatrix},$$

mézalors, on a

$$c_3b_2 - c_2b_3 + d_3a_2 - d_2a_3 = 0 \Longleftrightarrow (k_1 - k_2)(c_2b_2 - a_2d_2) = 0,$$

Or, par hypothèse, $c_2b_2 - a_2d_2 \neq 0$, donc $k_1 = k_2$. Compte tenu des définitions des coefficients des ϕ_i, on a $|k| > 1$, mais cela contredit alors l'inégalité (3.1). On montre de même que $Q_2 \not\equiv 0$.

Considérons donc les polynômes non nuls Q_1 et Q_2, on a les majorations suivantes :

$$\begin{array}{rcl}|Q_1(\alpha)| & \leqslant & |c_3\alpha+d_3||\phi_2(\alpha,\beta)|+|c_2\alpha+d_2||\phi_3(\alpha,\beta)| \\ & \leqslant & e^{nn_3}(|\alpha|+1)|\phi_2(\alpha,\beta)|+e^{nn_2}(|\alpha|+1)|\phi_3(\alpha,\beta)| \\ & \leqslant & 2(|\alpha|+1)e^{(1-C)nn_3}|\phi_1(\alpha,\beta)|^2\end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl}|Q_2(\alpha)| & \leqslant & |c_3\alpha+d_3||\phi_1(\alpha,\beta)|+|c_1\alpha+d_1||\phi_3(\alpha,\beta)| \\ & \leqslant & e^{nn_3}(|\alpha|+1)|\phi_1(\alpha,\beta)|+e^{nn_1}(|\alpha|+1)|\phi_3(\alpha,\beta)| \\ & \leqslant & e^{nn_3}(|\alpha|+1)(1+e^{-Cnn_3})|\phi_1(\alpha,\beta)| \\ & \leqslant & 2e^{nn_3}(|\alpha|+1)|\phi_1(\alpha,\beta)|.\end{array}$$

Car, dès que n est assez grand, il est clair que $|\phi_1(\alpha,\beta)|<1$ et, donc que $|\phi_1(\alpha,\beta)|^2\leqslant|\phi_1(\alpha,\beta)|$.

Si Q_1 ou Q_2 est une constante non nulle, alors, on a $|Q_1(\alpha)|$ ou $|Q_2(\alpha)|\geqslant 1$ d'où

$$-\log|\phi_1(\alpha,\beta)|\leqslant\log\left(2(|\alpha|+1)\right)+nn_3. \tag{I_1}$$

On suppose les polynômes Q_1 et Q_2 non constants.

1) Supposons Q_1 et Q_2 premiers entre eux, leur résultant est non nul et on obtient ([MIW], p.147) :

$$1<2304e^{8nn_3}\max(|Q_1(\alpha)|,|Q_2(\alpha)|),$$

c'est-à-dire

$$1<4608e^{9nn_3}(|\alpha|+1)|\phi_1(\alpha,\beta)|.$$

D'où, en prenant les logarithmes

$$-\log|\phi_1(\alpha,\beta)|<\log 4608+\log(|\alpha|+1)+9nn_3. \tag{I_2}$$

2) On suppose maintenant que Q_1 et Q_2 ne sont plus premiers entre eux. Ils ont alors au moins une racine commune, nous noterons r la racine commune la plus proche de α. Tout d'abord, remarquons la chose suivante : on a $Q_1(r)=Q_2(r)=0$, donc, si $c_1r+d_1=0$, alors, comme $Q_2(r)=0$ et que $a_1d_1-c_1b_1\neq 0$, on a $c_3r+d_3=0$ puis, comme $a_3d_3-c_3b_3\neq 0$, $c_2r+d_2=0$. Ainsi, ou bien pour tout $i=1,2,3$ on a $c_ir+d_i=0$, ou bien pour tout $i=1,2,3$ on a $c_ir+d_i\neq 0$. Notons r_1 l'autre racine de Q_1 éventuellement confondue avec r.

2.1) On suppose $|\alpha - r_1| < |\alpha - r|$ c'est-à-dire que $r \neq r_1$, r n'est pas la racine de Q_1 la plus proche de α et $r_1 \neq r_2$. On a alors

$$|\alpha - r_1|^2 \leqslant |Q_1(\alpha)|,$$

donc,

$$|\alpha - r_1| \leqslant \sqrt{2(|\alpha| + 1)}e^{(1-C)\frac{nn_3}{2}}|\phi_1(\alpha, \beta)|,$$

en raison de la majoration de $|Q_1(\alpha)|$. Remarquons tout d'abord que l'on peut minorer la distance $|r - r_1|$, en effet, on a

$$|r - r_1| \geqslant \frac{1}{2}e^{-2nn_3}.$$

Par ailleurs, r_1 étant la racine de Q_1 la plus proche de α, compte tenu de la majoration de $|Q_1(\alpha)|$, r_1 est « très » proche de α, et donc, r n'est pas « trop » proche de α, en effet, on peut écrire

$$|\alpha - r| \geqslant |r - r_1| - |\alpha - r_1| \geqslant 1/2e^{-2nn_3} - \sqrt{2(|\alpha| + 1)}e^{(1-C)\frac{nn_3}{2}}|\phi_1(\alpha, \beta)|,$$

donc,

$$|\alpha - r| \geqslant \frac{1}{2}e^{-2nn_3}(1 - \sqrt{2(|\alpha| + 1)}e^{(5-C)\frac{nn_3}{2}}|\phi_1(\alpha, \beta)|).$$

Il existe donc $N > 0$ tel que pour tout $n > N$ on ait

$$|\alpha - r| \geqslant \frac{1}{4}e^{-2nn_3}.$$

Nous allons alors distinguer trois sous-cas :

a) $Q_2 = (c_1a_3 - c_3a_1)(X - r)^2$, la majoration de $|Q_2(\alpha)|$ implique alors

$$|\alpha - r| \leqslant \sqrt{2}e^{nn_3/2}\sqrt{|\alpha| + 1}|\phi_1|^{1/2},$$

on a donc

$$|r-r_1| \leqslant |\alpha-r|+|\alpha-r_1| \leqslant \sqrt{2}e^{nn_3/2}\sqrt{|\alpha| + 1}|\phi_1|^{1/2}+\sqrt{2(|\alpha| + 1)}e^{(1-C)\frac{nn_3}{2}}|\phi_1|,$$

c'est-à-dire

$$1 \leqslant 2\sqrt{2}e^{5nn_3/2}\sqrt{|\alpha| + 1}|\phi_1|^{1/2} + 2\sqrt{2(|\alpha| + 1)}e^{(5-C)nn_3/2}|\phi_1|,$$

mais, si $C > 5$ et n est suffisamment grand, on a

$$1 \leqslant \sqrt{(|\alpha| + 1)}e^{3nn_3}|\phi_1|^{1/2},$$

et, en prenant les logarithmes

$$-\log|\phi_1(\alpha,\beta)| \leqslant \log(|\alpha|+1)+6nn_3. \tag{I_3}$$

b) $Q_2 = (c_1b_3 - c_3b_1 + d_1a_3 - d_3a_1)(X - r)$ la majoration de $|Q_2(\alpha)|$ implique alors

$$\frac{1}{4}e^{-2nn_3} \leqslant |\alpha - r| \leqslant 2e^{nn_3}(|\alpha|+1)|\phi_1|,$$

ce qui nous donne, pour n assez grand

$$1 \leqslant 8e^{3nn_3}(|\alpha|+1)|\phi_1(\alpha,\beta)|,$$

d'où

$$-\log|\phi_1(\alpha,\beta)| \leqslant \log 5(|\alpha|+1)+3nn_3. \tag{I_4}$$

c) $Q_2 = (c_1a_3 - c_3a_1)(X - r)(X - r_2)$ où $r_2{\neq}r$ et $r_2{\neq}r_1$. Notons que dans ce cas, les racines r, r_1 et r_2 sont rationnelles. En effet, Q_1 et Q_2 étant à coefficients entiers, si leurs racines ne sont pas rationnelles, elles sont conjuguées, et donc, s'ils en ont une commune, ils ont les deux mêmes. Les racines r_1 et r_2 étant rationnelles et distinctes, on a

$$|r_1 - r_2| \geqslant \frac{1}{4}e^{-4nn_3}$$

On a pour tout $n \in \overline{E}$ et $n > N$

$$|\alpha - r||\alpha - r_2| \leqslant |Q_2(\alpha)| \leqslant 2e^{nn_3}(|\alpha|+1)|\phi_1(\alpha,\beta)|,$$

d'où compte tenu de la minoration de $|\alpha - r|$,

$$|\alpha - r_2| \leqslant 8e^{3nn_3}(|\alpha|+1)|\phi_1(\alpha,\beta)|.$$

On a donc

$$|r_1-r_2| \leqslant |\alpha-r_1|+|\alpha-r_2| \leqslant 8(|\alpha|+1)e^{3nn_3}|\phi_1|+\sqrt{2(|\alpha|+1)}e^{(1-C)\frac{nn_3}{2}}|\phi_1(\alpha,\beta)|,$$

d'où, dès que n est assez grand

$$1 \leqslant 33e^{7nn_3}(|\alpha|+1)|\phi_1|.$$

Ce qui nous donne

$$-\log|\phi_1(\alpha,\beta)| \leqslant \log\left(33(|\alpha|+1)\right)+7nn_3. \tag{I_5}$$

2.2) On suppose maintenant $|\alpha - r| \leqslant |\alpha - r_1|$.

2.2.1) Si pour $i = 1,2,3$ $c_i r + d_i \neq 0$; on a

$$\frac{a_3 r + b_3}{c_3 r + d_3} = \frac{a_2 r + b_2}{c_2 r + d_2} = \frac{a_1 r + b_1}{c_1 r + d_1},$$

nous noterons s cette valeur et il est clair que $\phi_i(r,s) = 0$ pour $i = 1,2,3$. On a donc

$$\begin{aligned}
|\phi_1(\alpha,\beta)| &= |\phi_1(\alpha,\beta) - \phi_1(r,s)| \\
&= |(c_1\alpha + d_1)\beta - (a_1\alpha + b_1) - (c_1 r + d_1)s + (a_1 r + b_1)| \\
&= |(c_1 r + d_1)(\beta - s) + c_1(\alpha - r)\beta - a_1(\alpha - r)| \\
&\leqslant \left|(c_1 r + d_1)\left(\beta - \frac{a_2 r + b_2}{c_2 r + d_2}\right)\right| + |c_1(\alpha - r)\beta| + |a_1(\alpha - r)| \\
&\leqslant \left|\frac{c_1 r + d_1}{c_2 r + d_2}\right| |(c_2 r + d_2)\beta - (a_2 r + b_2)| + |c_1\beta||\alpha - r| \\
&\quad + |a_1||\alpha - r| \\
&\leqslant \left|\frac{c_1 r + d_1}{c_2 r + d_2}\right| |c_2(r - \alpha)\beta + a_2(\alpha - r) + \phi_2(\alpha,\beta)| \\
&\quad + |c_1\beta||\alpha - r| + |a_1||\alpha - r| .
\end{aligned}$$

Mais r est racine de polynômes du second degré dont les coefficients sont majorés par $4e^{2nn_3}$, on a alors

$$|r| \leqslant 12e^{2nn_3} \quad \text{d'où } |c_1 r + d_1| \leqslant 13e^{3nn_3}$$

et, d'autre part, comme r est algébrique, on peut majorer

$$\left|\frac{c_1 r + d_1}{c_2 r + d_2}\right| \leqslant 180e^{7nn_3}.$$

Et, on peut écrire

$$|\phi_1(\alpha,\beta)| \leqslant 181e^{8nn_3}(|\beta| + 1)|\alpha - r| + 180e^{(7-C)nn_3}|\phi_1(\alpha,\beta)|^2 \qquad (3.2)$$

Nous allons alors distinguer deux sous-cas :

a) On suppose que r est l'unique racine de Q_1, c'est-à-dire que l'on a : ou bien

$$Q_1 = (c_3 a_2 - c_2 a_3)(X - r)^2 \text{ avec } c_3 a_2 - c_2 a_3 \neq 0,$$

ou bien

$$c_3a_2 - c_2a_3 = 0 \text{ et } Q_1 = (c_3b_2 - c_2b_3 + d_3a_2 - d_2a_3)(X - r).$$

Dans les deux cas, la majoration de $|Q_1(\alpha)|$ nous donne une majoration de $|\alpha - r|$ qui, reportée dans l'inégalité (3.2) rend cette dernière contradictoire dès que n est assez grand et $C > 17$.

b) On suppose maintenant que Q_1 admet deux racines distinctes, r et r_1. La racine r étant la plus proche de α. On a alors :

$$|\alpha - r| \leqslant \sqrt{2(|\alpha| + 1)}e^{(1-C)\frac{nn_3}{2}}|\phi_1(\alpha, \beta)|$$

Cette majoration de $|\alpha - r|$ rend, là encore, l'inégalité (3.2) contradictoire dès que n est assez grand et $C > 17$.

2.2.2) Si pour $i = 1, 2, 3$ $c_ir + d_i = 0$, alors,

$$\phi_i(\alpha, \beta) = c_i(\alpha - r)\beta - a_i\alpha - b_i = c_i(\alpha - r)\beta - a_i(\alpha - r) - a_ir - b_i,$$

et

$$Q_1(\alpha) = (\alpha - r)(c_3(a_2\alpha + b_2) - c_2(a_3\alpha + b_3)).$$

Et, nous allons alors aboutir à une contradiction. En effet, comme $a_id_i - c_ib_i \neq 0$, on a $a_ir - b_i \neq 0$. D'où, la minoration

$$e^{-nn_3} \leqslant \frac{1}{c_i} \leqslant |a_ir - b_i|.$$

Mais, d'autre part, on a la majoration

$$|a_ir - b_i| \leqslant |\phi_i(\alpha, \beta)| + |(c_i\beta - a_i)(\alpha - r)|.$$

On distingue alors deux cas

– Si $c_3a_2 - c_2a_3 = 0$, $Q_1(\alpha) = (\alpha - r)(c_3b_2 - c_2b_3 + d_3a_2 - d_2a_3)$, d'où, compte tenu de la majoration de $|Q_1(\alpha)|$,

$$|\alpha - r| \leqslant 2(|\alpha| + 1)e^{(1-C)nn_3}|\phi_1(\alpha, \beta)|^2.$$

On a donc, par exemple en prenant $i = 3$

$$|a_3r - b_3| \leqslant |\phi_3(\alpha, \beta)| + (|\beta| + 1)e^{nn_3}|\alpha - r|,$$

c'est-à-dire

$$e^{-nn_3} \leqslant |a_3r - b_3| \leqslant e^{-Cnn_3}|\phi_1(\alpha, \beta)|^2 + 2(|\alpha| + 1)(|\beta| + 1)e^{(1-C)nn_3}|\phi_1(\alpha, \beta)|^2.$$

Ce qui est contradictoire dès que $C > 2$ et n est assez grand.

– Si $c_3a_2-c_2a_3\neq 0$, $Q_1(\alpha) = (c_3a_2-c_2a_3)(\alpha-r)(\alpha-r_1)$ où $r_1 = \frac{c_2b_3-c_3b_2}{c_3a_2-c_2a_3}$. Or, on est dans le cas $|\alpha - r| \leqslant |\alpha - r_1|$, donc on a $|\alpha - r|^2 \leqslant |Q_1(\alpha)|$ et cette majoration de $|\alpha - r|$ nous amène là encore à une contradiction.

Ainsi, dans tous les cas, en considérant les inégalités (I_1), (I_2), (I_3), (I_4) et (I_5), on obtient pour n assez grand

$$-\log|\phi_1(\alpha,\beta)| \leqslant \log(4608(|\alpha|+1)) + 9nn_3.$$

Ce qui démontre le lemme, en effet si $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3$ sont trois entiers positifs, alors, dans ${}^*\mathbb{R}$, on a la propriété suivante :

dès que $\mathcal{O}_{H,n_2\omega}(\alpha,\beta)\neq\mathcal{O}_{H,n_3\omega}(\alpha,\beta)$, ou $\mathcal{O}_{H,n_2\omega}(\alpha,\beta) \leqslant 2\mathcal{O}_{H,n_1\omega}(\alpha,\beta) + 18\omega n_3$, alors on a

$$\mathcal{O}_{H,n_1\omega}(\alpha,\beta) \leqslant \log[4608(|\alpha|+1)] + 9\omega n_3.$$

PROPOSITION 3.1.— *Soient α, β et γ des éléments de R, on a*

1) $\rho_H(\alpha,\beta) \geqslant \min(\rho_H(\alpha,\gamma),\rho_H(\gamma,\beta))$.

2) $\rho_H(\alpha,1) = \rho(\alpha)$.

Démonstration. —

1) Soit k_1 (resp. k_2) l'entier strictement positif tel que $\rho_H(\alpha,\gamma)$ (resp. $\rho_H(\gamma,\beta)$) soit égal à la classe dans Γ de l'hyperréel $\frac{\mathcal{O}_{H,k_1\omega}(\alpha,\gamma)}{\omega}$ (resp. $\frac{\mathcal{O}_{H,k_2\omega}(\alpha,\gamma)}{\omega}$).

Soit $n \in \mathbb{N}$, notons

$$\mathcal{O}_H(k_1n;\alpha,\gamma) = -\log|c_1\alpha\gamma + d_1\gamma - a_1\alpha - b_1| = -\log|\phi_{k_1n}(\alpha,\gamma)|$$

et

$$\mathcal{O}_H(k_2n;\beta,\gamma) = -\log|c_2\beta\gamma + d_2\gamma - a_2\alpha - b_2| = -\log|\phi_{k_2n}(\beta,\gamma)|.$$

De

$$\left|\gamma - \frac{a_1\alpha+b_1}{c_1\alpha+d_1}\right| = \frac{1}{|c_1\alpha+d_1|}|\phi_{k_1n}(\alpha,\gamma)|,$$

et

$$\left|c_2\beta\frac{a_1\alpha+b_1}{c_1\alpha+d_1}+d_2\frac{a_1\alpha+b_1}{c_1\alpha+d_1}-a_2\beta-b_2\right|$$
$$\leqslant\left|c_2\beta\left(\gamma-\frac{a_1\alpha+b_1}{c_1\alpha+d_1}\right)+d_2\left(\gamma-\frac{a_1\alpha+b_1}{c_1\alpha+d_1}\right)\right|+|\phi_{k_2n}(\beta,\gamma)|\ ,$$

on tire

$$|(c_2a_1-c_1a_2)\alpha\beta+(c_2b_1-d_1a_2)\beta-(c_1b_2-d_2a_1)\alpha-(d_1b_2-d_2b_1)|\leqslant$$
$$(|c_2\beta|+|d_2|)|\phi_{k_1n}(\alpha,\gamma)|+|c_1\alpha+d_1||\phi_{k_2n}(\beta,\gamma)|.$$

On a ainsi une relation quadratique en α et β dont les coefficients sont majorés par $2e^{(k_1+k_2)n}$et qui est majorée par

$$Ce^{kn}\max\left(|\phi_{k_1n}(\alpha,\gamma)|,|\phi_{k_2n}(\beta,\gamma)|\right),$$

où C est une constante qui ne dépend que de α et de β et $k=\max(k_1,k_2)$.

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{\mathcal{O}((k_1+k_2)n;\alpha,\beta)}{n}\geqslant\min\left(\frac{\mathcal{O}(k_1n;\alpha,\gamma)}{n},\frac{\mathcal{O}(k_2n;\gamma,\beta)}{n}\right)-\frac{\log C}{n}-k.$$

Ce qui prouve que

$$\rho_H(\alpha,\beta)\geqslant\min(\rho_H(\alpha,\gamma),\rho_H(\gamma,\beta)).$$

2) Soit $\alpha\in R$, et $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\mathcal{O}(n;\alpha)\leqslant\mathcal{O}_H(n;\alpha,1)=\max_{(a,b,c,d)\in\mathbb{Z}^4(n)}-\log|(c-a)\alpha+(d-b)|\leqslant\mathcal{O}(2n;\alpha),$$

ce qui implique l'égalité $\rho_H(\alpha,1)=\rho(\alpha)$.

COROLLAIRE. — *Soient α, α', β et β' des éléments de R tels que $\alpha\sim_H\alpha'$ et $\beta\sim_H\beta'$, on a*

$$\rho_H(\alpha,\beta)=\rho_H(\alpha',\beta').$$

Démonstration. — D'après l'inégalité démontrée dans la proposition 3.1., on a

$$\rho_H(\alpha,\beta)\geqslant\min(\rho_H(\alpha,\alpha');\rho_H(\alpha',\beta)),$$

or, $\rho_H(\alpha,\alpha')=+\infty$, donc $\rho_H(\alpha,\beta)\geqslant\rho_H(\alpha',\beta)$. Mais, de même, on a

$$\rho_H(\alpha',\beta)\geqslant\min(\rho_H(\alpha',\beta');\rho_H(\beta',\beta))\geqslant\rho_H(\alpha',\beta'),$$

car $\rho_H(\beta, \beta') = +\infty$. On a donc

$$\rho_H(\alpha, \beta) \geqslant \rho_H(\alpha', \beta').$$

Et, de la même manière, on peut démontrer l'inégalité inverse, d'où l'égalité.

Ce corollaire prouve que la définition de $\rho_H(\alpha, \beta)$ ne dépend que des classes d'équivalence modulo $\sim_H$ des éléments α et β et, ainsi, ρ_H est défini sur $QH_1(R) \times QH_1(R)$, c'est ce qui va nous permettre de définir une « distance » ultamétrique sur $QH_1(R)$.

3.2. Distance et topologie sur $QH_1(R)$

L'existence de ρ_H étant assurée, on peut définir sur $QH_1(R)$ une « distance » à valeurs non standard de la manière suivante :

DÉFINITION 3.3. — *Pour α et β dans $QH_1(R)$, on pose*

$$d_H(\alpha, \beta) = \frac{1}{\rho_H(\alpha, \beta)}.$$

PROPOSITION 3.2. — *L'application d_H de $QH_1(R) \times QH_1(R)$ dans $\Gamma \cup \{0\}$, vérifie les propriétés suivantes : pour α, β et γ dans $QH_1(R)$, on a*

1) $d_H(\alpha, \beta) = 0 \iff \alpha = \beta$,

2) $d_H(\alpha, \beta) = d_H(\beta, \alpha)$,

3) $d_H(\alpha, \beta) \leqslant \max(d_H(\alpha, \gamma), d_H(\gamma, \beta))$.

Ce qui fait de d_H une distance Γ-hypermétrique.

Démonstration. —

1) et 2) évident

3) L'inégalité triangulaire ultramétrique découle directement de la proposition 3.1.

Topologie uniforme

La distance non standard que nous venons de définir permet, comme dans le cas précédent, de munir $QH_1(R)$ d'une topologie uniforme.

4. Applications continues

Nos ensembles étant ainsi munis de topologies uniformes, il est intéressant d'étudier rapidement certaines applications continues, la question qui reste ouverte étant celle d'une structure analogue à celle d'un revêtement pour QL_1 au dessus de QH_1.

Soit $\alpha \in R$, dans ce paragraphe, nous noterons $[\alpha]_L$ la classe de α dans $QL_1(R)$ et $[\alpha]_H$ la classe de α dans $QH_1(R)$, on a donc

$$[\alpha]_L = \left\{ \frac{p}{q}\alpha,\ (p,q) \in Z \times Z^* \right\} ,$$

et

$$[\alpha]_H = \left\{ \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d},\ (a,b,c,d) \in Z^4, |ad - bc| \neq 0 \right\} .$$

Il est clair que $[\alpha]_L \subset [\alpha]_H$ et que l'on a une surjection, que nous noterons s de $QL_1(R)$ sur $QL_H(R)$.

Proposition 4.1. — *La surjection s est uniformément continue sur $QL_1(R)$.*

Démonstration. — Clair, car pour tout α et β dans R, on a

$$d_H([\alpha]_H, [\beta]_H) \leqslant d_L([\alpha]_L, [\beta]_L) .$$

Proposition 4.2. — *Soit $\lambda \in R^*$, et φ_λ définie par*

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda : QL_1(R) &\longrightarrow QL_1(R) \\ [\alpha]_L &\longmapsto [\lambda\alpha]_L \end{aligned} ,$$

l'application φ_λ ainsi définie est un homéomorphisme.

Démonstration. — L'application φ_λ est clairement surjective, vérifions qu'elle est injective : soient $[\alpha]_L$ et $[\beta]_L \in QL_1(R)$,

$$[\lambda\alpha]_L = [\lambda\beta]_L \iff \exists (p,q) \in Z^{*2},\ \lambda\alpha = \frac{p}{q}\lambda\beta \iff [\alpha]_L = [\beta]_L .$$

Par ailleurs, comme $d_L(\lambda\alpha, \lambda\beta) = d_L(\alpha, \beta)$, cette application est trivialement continue.

Ceci prouve que notre espace $QL_1(R)$ est homogène.

5. Annexe 1 : Définition de $^*\mathbb{R}$ ([LIND.], [GOLD.])

Introduction

De même que l'on construit $\mathbb{R}$ à partir des suites de Cauchy de rationnels, on construit $^*\mathbb{R}$ comme quotient de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par une relation d'équivalence judicieusement choisie. Dans le cas de la construction de $\mathbb{R}$, on s'intéressait à la limite des suites, on identifiait donc le plus de suites possibles ; toutes celles ayant la même limite. Dans le cas de $^*\mathbb{R}$, on souhaite une structure algébrique riche qui tienne compte non seulement de la convergence des suites, mais aussi de leur mode de convergence. C'est-à-dire que l'on veut distinguer par exemple les suites $\left\{\frac{1}{n}\right\}, \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ et $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$. Il s'agit donc plutôt d'en identifier le moins possible sans que ce soit trivial. De plus, on aimerait éviter les diviseurs de zéro. En effet dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on a

$$(1,0,1,0,\ldots) \times (0,1,0,1,\ldots) = \underline{0}.$$

On va donc définir une relation d'équivalence juste assez forte pour éviter les diviseurs de zéro, mais en gardant le plus de richesse possible à la structure.

Ultrafiltres. — *Un ultrafiltre est un sous-ensemble $\mathcal{U}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

- *Pour tout $A, B \in \mathcal{U}, \quad A \cap B \in \mathcal{U}$*
- *Si $A \in \mathcal{U}$ et $A \subset B$ alors $B \in \mathcal{U}$*
- *Pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, ou bien $A \in \mathcal{U}$ ou bien $\overline{A} \in \mathcal{U}$.*

L'existence d'ultrafiltres non triviaux de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dépend de l'axiome du choix. Nous admettons cet axiome, et fixons un tel ultrafiltre.

Définition de $^*\mathbb{R}$. — *Soit sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la relation d'équivalence*

$$\{a_n\} \sim \{b_n\} \iff \{n \in \mathbb{N} \ / \ a_n = b_n\} \in \mathcal{U}.$$

On définit $^*\mathbb{R}$ comme $^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\sim$. Les opérations algébriques sont définies composante par composante.

$^*\mathbb{R}$ est un corps ordonné qui ne vérifie évidemment pas l'axiome de la borne supérieure ($^*\mathbb{R} \neq \mathbb{R}$). Il n'y a plus de diviseurs de zéro, par exemple, l'une des deux suites $(0,1,0,\ldots)$ et $(1,0,1,\ldots)$ est nulle, et cela dépend de l'ultrafiltre. Mais, dans la mesure où l'on s'intéresse au comportement asymptotique des suites cela importe peu de savoir laquelle. On peut d'ailleurs se limiter à une sous-famille d'ultra-filtres telle que tous les ${}^*\mathbb{R}$ correspondants soient isomorphes. Notons que $\mathbb{R}$ est plongé dans ${}^*\mathbb{R}$ via les suites constantes.

Définitions

On dit que $x \in {}^*\mathbb{R}$ est un *infiniment petit* (*i.p.*) si

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \quad -a < x < a$$

On dit que $x \in {}^*\mathbb{R}$ est *limité* si

$$\exists a \in \mathbb{R}^+, \quad -a < x < a$$

Les hyperréels non limités sont des *infiniment grands* (*i.g.*).

Définition et structure de Γ

On considère ${}^*\mathbb{R}_+$, le groupe multiplicatif des hyperréels strictement positifs, et $\mathcal{A}_+^*$ le sous-groupe de ${}^*\mathbb{R}_+$ des hyperréels, strictement positifs, limités, d'inverse limité. On note Γ le quotient de ${}^*\mathbb{R}_+$ par $\mathcal{A}_+^*$ muni de sa structure de groupe quotient.

Proposition

1) Γ est un ensemble totalement ordonné.

2) Soient x et y des éléments de ${}^*\mathbb{R}_+$, l'addition pour $\langle x \rangle$ et $\langle y \rangle$ dans Γ, est définie par

$$\langle x \rangle + \langle y \rangle = \langle x + y \rangle = \max(\langle x \rangle, \langle y \rangle)$$

Démonstration

1) Soient (x_n) et (y_n) deux éléments de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, soit $\mathcal{U}$ l'ultrafiltre définissant ${}^*\mathbb{R}$, comme $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre, l'un des deux ensembles suivants est dans $\mathcal{U}$:

$$\{n \in \mathbb{N} / x_n < y_n\} \text{ ou bien } \{n \in \mathbb{N} / x_n \geqslant y_n\}.$$

Si l'on désigne par x_ω et y_ω les éléments de ${}^*\mathbb{R}$ correspondants, on a ou bien $x_\omega < y_\omega$, ou bien $x_\omega \geqslant y_\omega$. Ce qui prouve que ${}^*\mathbb{R}$ est totalement ordonné.

Démontrons que cet ordre total sur $^*\mathbb{R}$ induit une relation d' ordre total sur Γ, que nous noterons encore $<$,

Supposons $x_\omega < y_\omega$ alors, $\{n \in \mathbb{N}/x_n < y_n\} \in \mathcal{U}$. Soient ℓ_ω et ℓ'_ω deux éléments de $\mathcal{A}_+^*$ ou bien

$$\{n \in \mathbb{N}/\ell_n x_n < \ell'_n y_n\} \in \mathcal{U} \text{ ou bien } \{n \in \mathbb{N}/\ell_n x_n \geqslant \ell'_n y_n\} \in \mathcal{U}.$$

Dans le premier cas, on a $\ell_\omega x_\omega < \ell'_\omega y_\omega$ et dans le second, on a $x_\omega < y_\omega \leqslant \frac{\ell_\omega}{\ell'_\omega} x_\omega$. Ainsi, si pour tout ℓ_ω et ℓ'_ω dans $\mathcal{A}_+^*$ on a $\ell_\omega x_\omega < \ell'_\omega y_\omega$, alors, dans Γ

$$\langle x_\omega \rangle < \langle y_\omega \rangle,$$

et, sinon, la double inégalité $x_\omega < y_\omega \leqslant \frac{\ell_\omega}{\ell'_\omega} x_\omega$ implique

$$\langle x_\omega \rangle = \langle y_\omega \rangle \text{ dans } \Gamma.$$

2) Notons x et y deux éléments de Γ et vérifions que la définition de la somme a bien un sens. Supposons, par exemple $x < y$, alors

$$x + y = y\left(1 + \frac{x}{y}\right),$$

mais comme $x < y$, $\dfrac{x}{y} < 1$, et donc, $x + y = y$.

La somme de deux éléments de Γ est donc bien définie par $x + y = \max(x, y)$.

En conclusion, Γ est un groupe multiplicatif, totalement ordonné et muni d'une addition.

6. Annexe 2 : Espaces Γ-hypermétriques

Définition. — *On appelle espace Γ-hypermétrique un espace X muni d'une Γ-distance, c'est-à-dire une « distance » à valeurs dans Γ.*

Pour tout $\varepsilon \in \Gamma$ on note V_ε l'ensemble suivant

$$V_\varepsilon = \{(\alpha, \beta) \in X \times X \ / \ d(\alpha, \beta) < \varepsilon\}$$

L'ensemble $\mathcal{E} = \{V_\varepsilon;\ \varepsilon \in \Gamma\}$ est un système fondamental d'entourages. Les ensembles

$$\{V_{1/N},\ N \in {}^*\mathbb{N}\},$$

où l'on assimile N à sa classe dans Γ, forment également un système fondamental d'entourages.

Soit $\alpha \in X$, pour $\varepsilon \in \Gamma$, on note

$$V_\varepsilon(\alpha) = \{\beta \in X \quad / \quad d(\alpha, \beta) < \varepsilon\}$$

et

$$\mathcal{B}(\alpha) = \{V_\varepsilon(\alpha), \quad \varepsilon \in \Gamma\}.$$

Il existe une unique topologie telle que, pour tout α dans X, $\mathcal{B}(\alpha)$ soit le filtre des voisinages de α ; c'est la topologie déduite de la structure uniforme. Notons la $\mathcal{T}_\Gamma$.

Hypersuites de Cauchy et espace complet

DÉFINITIONS. — Soit $(X, \mathcal{T}_\Gamma)$ un espace Γ-hypermétrique

– Un filtre $\mathcal{F}$, de parties de X, est dit de *Cauchy* si, pour tout entourage V de X, il existe $\mathcal{U} \in \mathcal{F}$ tel que $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \subset V$.

– L'espace $(X, \mathcal{T}_\Gamma)$ est dit *complet* si tout filtre de Cauchy y est convergent.

– On dit que le filtre $\mathcal{F}$ *converge* vers un point $x \in X$ si $\mathcal{F}$ est plus fin que le filtre des voisinages de x. C'est-à-dire, si $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{F}$.

– Soit $(x_N)_{N \in {}^*\mathbb{N}}$ une hypersuite. $(x_N)_{N \in {}^*\mathbb{N}}$ est dite de *Cauchy* si

$$\forall \varepsilon \in \Gamma \quad \exists N \in^* \mathbb{N} \,/\, \forall (K, K') \in {}^*\mathbb{N} \times {}^*\mathbb{N}, \quad K \geqslant N, K' \geqslant N \Longrightarrow d(x_K, x_{K'}) < \varepsilon.$$

– Soit $(x_N)_{N \in {}^*\mathbb{N}}$ une hypersuite. $(x_N)_{N \in {}^*\mathbb{N}}$ est dite *convergente* vers une limite L si

$$\forall \varepsilon \in \Gamma \quad \exists N \in {}^*\mathbb{N} \,/\, \forall K \in {}^*\mathbb{N}, \quad K \geqslant N \Longrightarrow d(x_K, L) < \varepsilon.$$

PROPOSITION 1. — *L'espace $(X, \mathcal{T}_\Gamma)$ est complet si et seulement si toute hypersuite de Cauchy y est convergente.*

Démonstration. —

$(\Longrightarrow)$ Supposons l'espace complet, c'est-à-dire que tout filtre de Cauchy est convergent. Soit $(x_N)_{N \in {}^*\mathbb{N}}$ une hypersuite de Cauchy, et soit $\mathcal{F}$ le filtre engendré par

$$\{\{x_K, \quad K \in {}^*\mathbb{N}, K \geqslant N\}, \quad N \in {}^*\mathbb{N}\}.$$

Soit $N \in {}^*\mathbb{N}$, notons $V_{1/N} = \{(x,y) \in X \times X \quad / \quad d(x,y) < \frac{1}{N}\}$. L'ensemble $\{V_{1/N}, \quad N \in {}^*\mathbb{N}\}$ est une base d'entourages de X.

Montrons que le filtre $\mathcal{F}$ défini ci-dessus est un filtre de Cauchy.

Soit $N \in {}^*\mathbb{N}$, on considère l'entourage $V_{1/N}$; l'hypersuite $(x_N)_{N \in {}^*\mathbb{N}}$ étant de Cauchy, il existe $M \in {}^*\mathbb{N}$ tel que, pour tout $K, K' \in {}^*\mathbb{N}$, $K \geqslant M$ et $K' \geqslant M$ implique $d(x_K, x_{K'}) < \frac{1}{N}$. Et donc, il existe $U \in \mathcal{F}$ tel que $U \times U \subset V_{1/N}$. En effet

$$\{x_K,\ K \geqslant M\} \times \{x_K,\ K \geqslant M\} \subset V_{1/N} = \left\{(x,y) \in X \times X \ / \ d(x,y) < \frac{1}{N}\right\}.$$

Le filtre $\mathcal{F}$ est bien de Cauchy, donc convergent dans l'espace X que l'on a supposé complet. Soit x sa limite. Montrons que l'hypersuite de Cauchy $(x_N)_{N \in {}^*\mathbb{N}}$ converge vers x. Comme $\mathcal{F}$ converge vers x, le filtre $\mathcal{B}(x)$ des voisinages de x est inclus dans $\mathcal{F}$. C'est-à-dire que pour tout $N \in {}^*\mathbb{N}$,

$$V_{1/N}(x) = \left\{y \in X \ / \ d(x,y) < \frac{1}{N}\right\} \in \mathcal{F}.$$

Donc, il existe $M \in {}^*\mathbb{N}$ tel que $\{x_K,\ K \in {}^*\mathbb{N}, K \geqslant M\} \subset V_{1/N}(x)$. Ce qui prouve que l'hypersuite $(x_N)_{N \in {}^*\mathbb{N}}$ converge vers x.

$(\Longleftarrow)$ On suppose que toute hypersuite de Cauchy est convergente dans X.

Soit $\mathcal{F}$ un filtre de Cauchy. Pour tout $N \in {}^*\mathbb{N}$, il existe $U_N \in \mathcal{F}$ tel que $U_N \times U_N \subset V_{1/N}$.

Dans chaque U_N, on choisit un élément x_N et l'on considère l'hypersuite ainsi obtenue. Cette hypersuite est de Cauchy, en effet, pour tout $N \in {}^*\mathbb{N}$, il existe $M \in {}^*\mathbb{N}$ tel que

$$\{x_K,\ K \geqslant M\} \times \{x_K,\ K \geqslant M\} \subset V_{1/N} = \left\{(x,y) \in X \times X \ / \ d(x,y) < \frac{1}{N}\right\}.$$

Par hypothèse, elle est donc convergente. Notons x sa limite, on a $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{F}$. En effet, si $M \geqslant N$, alors, $U_N \times U_M \subset V_{1/N}$ et il existe $x_M \in U_M$ tel que $d(x, x_M) < 1/M$ d'où pour tout $y \in U_N$, $d(y,x) < 1/N$ et $U_N \subset V_{1/N}(x)$. Ce qui prouve que le filtre $\mathcal{F}$ est convergent vers x.

Conclusion : Comme dans le cas des espaces métriques, l'espace «Γ-hypermétrique» X est complet si et seulement si toute hypersuite de Cauchy y est convergente.

Complétion

Soit X un espace Γ-hypermétrique, d'après ce qui précède, il est muni d'une structure uniforme. Son complété est défini de la manière suivante :

DÉFINITION ([BBK]). — *Soit $\hat{X}$ l'ensemble des filtres de Cauchy minimaux (pour la relation d'inclusion). On définit sur $\hat{X}$ une structure uniforme de la manière suivante : pour tout entourage symétrique V de X, on désigne par $\tilde{V}$ l'ensemble des couples $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ de filtres de Cauchy minimaux ayant en commun un ensemble petit d'ordre V (i.e. $\exists A \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$, tel que $A \times A \subset V$.) Les ensembles $\tilde{V}$ forment un système fondamental d'entourages sur $\hat{X}$.*

$\hat{X}$ est complet et, si l'on note i l'injection de X dans $\hat{X}$ définie pour tout $x \in X$ par $i(x) = \mathcal{B}(x)$, où $\mathcal{B}(x)$ désigne le filtre des voisinages de x, $i(X)$ est dense dans $\hat{X}$.

PROPOSITION 2. — *Tout élément de la complétion $\hat{X}$ de X correspond à la limite d'une hypersuite de Cauchy d'éléments de X.*

Démonstration. — Nous avons vu dans la proposition 1 la correspondance entre filtre de Cauchy convergent et hypersuite convergente dans X. Soit $(x_N)_{N \in {}^*\mathbb{N}}$ une hypersuite de Cauchy d'éléments de X, $\mathcal{F}$ le filtre engendré par

$$\{\{x_K, \quad K \in {}^*\mathbb{N}, K \geqslant N\}, \quad N \in {}^*\mathbb{N}\}$$

est un filtre de Cauchy. Notons $\mathcal{F}_0$, l'unique filtre de Cauchy minimal tel que $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$. Si l'on note x_0 la limite, dans un complété de X, du filtre $\mathcal{F}_0$, par minimalité de $\mathcal{F}_0$, on a $\mathcal{F}_0 = \mathcal{B}(x_0)$, c'est-à-dire que $\mathcal{F}_0$ est le filtre des voisinages de x_0, et il est clair que l'hypersuite $(x_N)_{N \in {}^*\mathbb{N}}$ converge vers x_0.

Bibliographie

[BBK] BOURBAKI (N.). — Topologie générale, « Structures uniformes » Ch. 2, §3.

[CAS] CASSELS (J.W.S.). — An introduction to diophantine approximation Ch.VI et VII, Cambridge Univ. Press (1957).

[DESC] DESCOMBES (R.). — Eléments de théorie des nombres, PUF 198.

[GOLD] GOLDBLATT (R.). — Lectures on the Hyperreals, Graduate Texts in Math., Springer (1998).

[L.d.M] LASJAUNIAS (A.), DE MATHAN (B.). — Thue's theorem in positive characteristic, J. Reine Angew. Math. 473, p. 195-206 (1996).

[LIND] LINDSTROM (T.). — A set of hyperreals, in Non standard analysis and its applications, Edited by Nigel Cutland, London Math. Soc., Student text 10, Cambridge Univ. press, p. 1-99 (1988).

[MIW] WALDSCHMIDT (M.). — Nombres transcendants, Lecture Note 402.

[PPH] PHILIPPON (P.). — Classification de Mahler et distances locales, Bull. Austral. Math. Soc., vol. 49, Number 2, p. 219-238 (1994).

[VDP] VAN DER POORTEN (A.J.). — Continued fractions of formal power series, Adv. Number Theory, Oxford, p. 453-466 (1993).